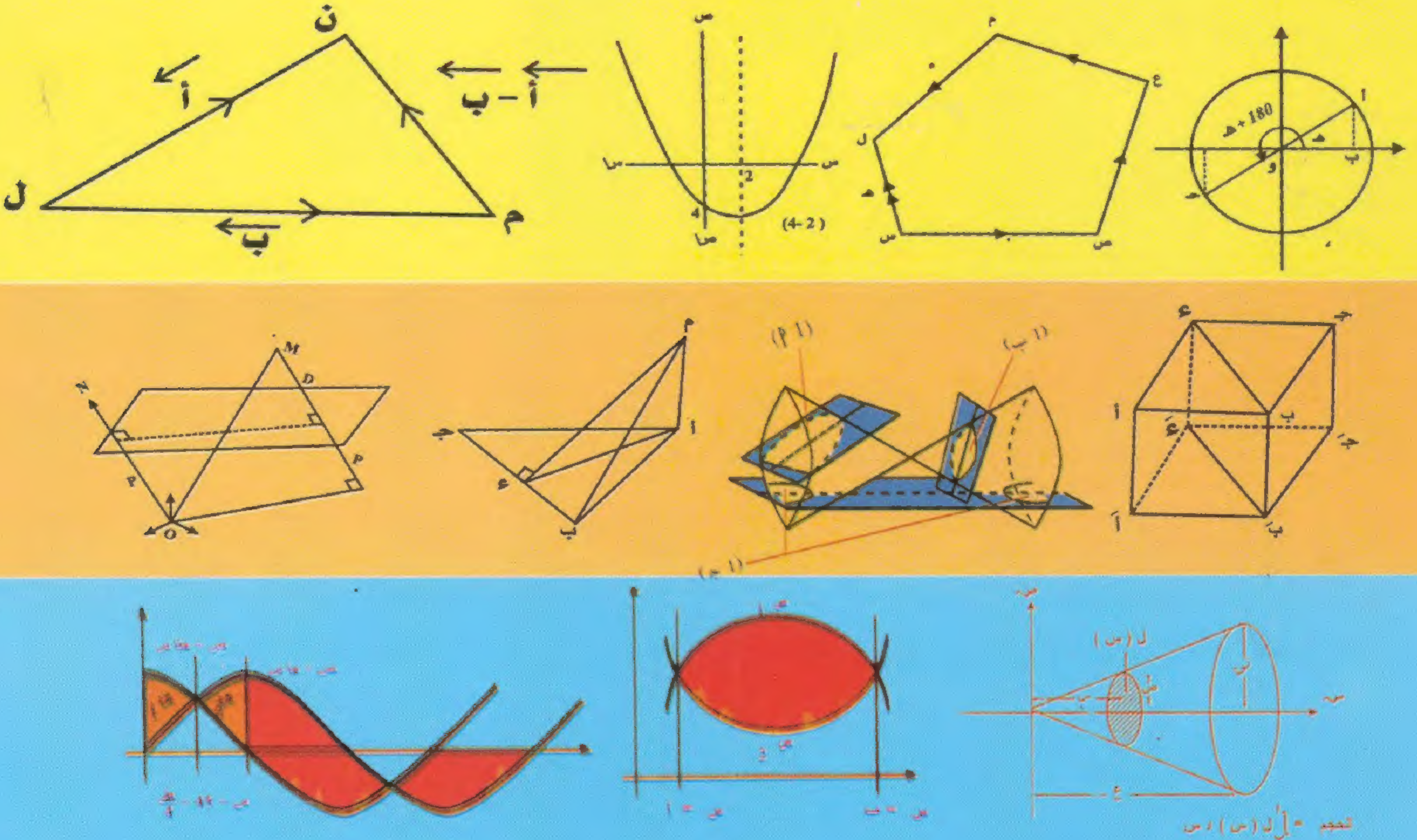


الرياضة II

الجبر - الهندسة الفراغية

التفاضل والتكامل



أحمد السيد عامر

دار الفجر للنشر والتوزيع

**الجبر - الهندسة الفراغية
التفاضل والتكامل**

إهداء ٢٠٠٨
دار الكتب و الوثائق القومية
القاهرة

الرياضة II

الجبر - الهندسة الفراغية التفاضل والتكامل

أحمد السيد عامر

دار الفجر للنشر والتوزيع

2007

الرياضيات II
الجبر - الهندسة الفراغية
التفاضل والتكامل

أ. أحمد السيد عامر

رقم الإيداع
15683
الترقيم الدولي I.S.B.N.
977 - 358 - 124 - 1

حقوق النشر
الطبعة الأولى 2007
جميع الحقوق محفوظة للناشر

دار الفجر للنشر والتوزيع
4 شارع هاشم الأشقر - النهضة الجديدة - القاهرة
ت : 6246252 (00202) ف : 6246265 (00202)

لا يجوز نشر أي جزء من الكتاب أو اختزان مادته بطريقة الاسترجاع أو نقله على أي
نحو أو بأي طريقة سواء كانت إلكترونية أو ميكانيكية أو بخلاف ذلك إلا بموافقة
الناشر على هذا كتابة و مقدما .

بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمة

■ لقد تميز القرن التاسع عشر عن غيره من القرون السابقة بأهمية بالغة في مجال تطوير واكتشاف الرياضيات . وترجع أهمية هذا القرن في اكتشاف وظهور ثلاثة أحداث هامة في العلوم الرياضية . الحدث الأول كان ظهور مجال جديد في الهندسة يختلف عن الهندسة اليونانية أو الهندسة الإقليدية . وجاء اكتشاف هذه الهندسة التي تعرف بالهندسة اللا إقليدية على يد ثلاثة مكتشفين هم العالم الروسى نيكولاي لوباشفسكى N.Lobachevsky (1856-1793) والعالم المجرى جون بوليا J.Bolyai (1856-1793) والعالم الألمانى تشارل جاوس C.Gauss (1856 - 1793) .

■ أما الحدث الثانى فكان في مجال التحليل الرياضى حيث ظهر فهم أعمق وتكامل أكثر لموضوع التحليل الرياضى وذلك بظهور ما يعرف بتحسين التحليل الرياضى في سنة ١٨٧٤ م . وكذلك بظهور فكرة اللانهاية في التحليل الرياضى التي قدمها العالم الألمانى جورج كانتور G.Cantor (1918 - 1845) .

■ أما الحدث الثالث كان في مجال الجبر حيث نجد كثيراً من المشتغلين في هذا المجال ساهموا بأبحاث مفيدة نذكر منهم على سبيل المثال لاجرانج (1813-1736) ، جالوا (1832 - 1811) ، جون بول (1864 - 1815) . وذلك بتقديمهم لمفاهيم ونظريات جديدة أثرت في تطور علم الجبر ودفعت إلى تقدمه بعد ذلك .

■ إن الرياضيات تلعب دوراً أساسياً في حياة الإنسان منذ ظهوره على وجه الأرض فاختراع العدد وطريقة التغيير عنه بتطور نكاه الإنسان وتعدد حاجاته .

فوصل إلى العدد ((الصفر)) ويعتبر من أعظم الاختراعات التي وصل إليها الإنسان ولم يقف الرياضيون منذ ذلك الحد بل اكتشفوا وبحثوا في علوم الرياضيات حتى وصلوا إلى سطح القمر .

■ ومازال علم حساب التفاضل والتكامل منذ اكتشافه في القرن السابع عشر هو الأساس والمحك المرتب في دراسة العلوم الرياضية والفيزيائية وغيرها من العلوم الأخرى .

ومن المعروف عن علم التفاضل والتكامل هو كثرة تطبيقاته سواء أكانت رياضية أم فيزيائية .

أولاً: الجبر

الباب الأول

التباديل والتوافيق ونظرية ذات الحدين

مبدأ العد:

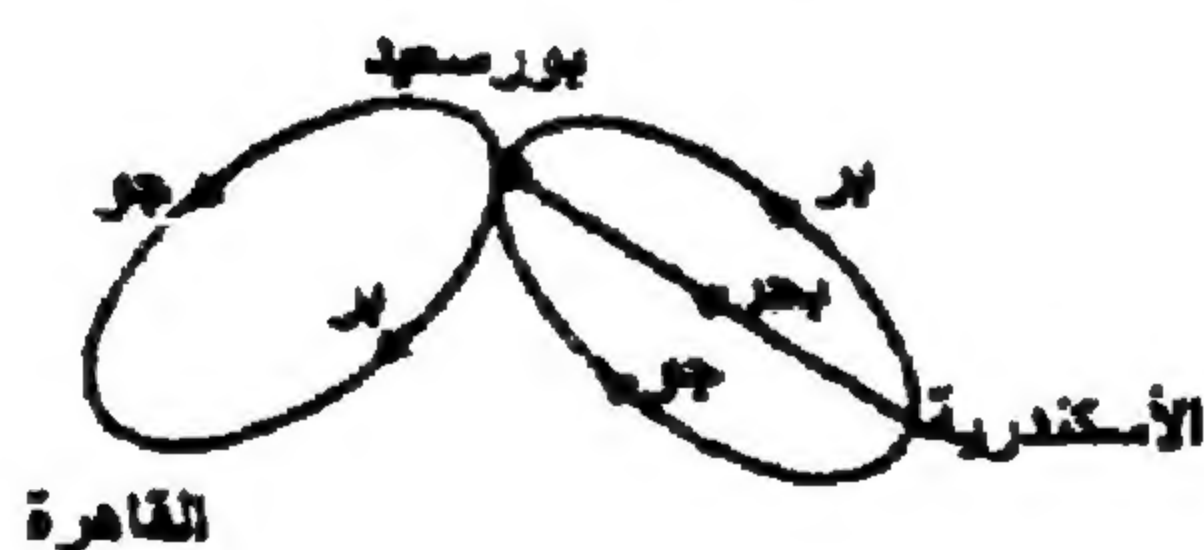
- هو الذي يعين عدد طرق اختيار عنصر من مجموعة مع عنصر من مجموعة أخرى يسمى مبدأ العد .
- فعدد طرق اختيار عنصر من مجموعة (س) عدد عناصرها (ن) مع عنصر من مجموعة أخرى (ص) عدد عناصرها (م) يساوي عدد الأزواج المرتبة من س إلى ص = عدد عناصر المجموعة ص = $n \times m$.
- يمكن تعميم مبدأ العد لأكثر من مجموعتين .

مثال:

إذا كان السفر من الإسكندرية إلى بورسعيد ممكناً بثلاث طرق هي بر ، بحر جو ويمكن السفر من الإسكندرية إلى القاهرة بطريقتين بر ، جو . فبكم طريقة يمكن السفر من الإسكندرية إلى القاهرة ماراً ببورسعيد .

الحل

∴ عدد الاختيارات = $3 \times 2 = 6$ اختيارات



مثال :

إذا اخترت معك في رحلة ٣ بدلات ، ٤ قمصان . فبكم طريقة يمكن اختيار لباس هذه الملابس؟

الحل

عدد طرق لبس هذه الملابس = $3 \times 4 = 12$

التباديل

إذا كان لدينا n من الأشياء فإن عدد الأشياء المرتبة التي يمكن اختيارها من (n) دون تكرار يسمى وتقرأ تباديل (n) مأخوذة راء راء ويرمز لها بالرمز $n!$

مثال : أوجد تباديل الأعداد $1, 2, 3, 4$ مأخوذة اثنين اثنين .

الحل

العدد 1 يؤخذ مع $2, 3, 4$ أي $12, 13, 14$

العدد 2 يؤخذ مع $1, 3, 4$ أي $21, 23, 24$

العدد 3 يؤخذ مع $1, 2, 4$ أي $31, 32, 34$

العدد 4 يؤخذ مع $1, 2, 3$ أي $41, 42, 43$

$\therefore 4! = 24$ أي $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$$\therefore n! = n(n-1)(n-2)\dots(1) \quad (1)$$

مثلاً: $7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$ ، $10! = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 362880$ ، $12! = 479001600$

نتيجة :

من المعادلة (1) بوضع $r = n$ ينتج أن :

$$n! = n(n-1)(n-2)\dots(1)$$

$$n! = n(n-1)(n-2)\dots(1)$$

ويمكن كتابة $n!$ على الصورة $n!$ وتقرأ مضروب n أي أن :-

$$n! = n(n-1)(n-2)\dots(1) \quad (2)$$

$$\text{مثلاً: } 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

$$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

ملاحظه : $n! = n(n-1)(n-2)\dots(1)$ ، $(n-1)! = (n-1)(n-2)\dots(1)$ وهكذا

مثلاً: $5! = 5 \times 4! = 120$ وهكذا

قاعدة (1) :

$$\frac{n!}{(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

الاثبات :

$$\therefore \text{ل} \text{ ر} = \text{ن} (\text{ن}-1) (\text{ن}-2) \dots (\text{ن}-\text{ر}+1)$$

بضرب الطرف الأيسر في $\frac{\text{ل}-\text{ن}}{\text{ل}-\text{ر}}$

$$\therefore \text{ل} \text{ ر} = \frac{\text{ن} (\text{ن}-1) (\text{ن}-2) \dots (\text{ن}-\text{ر}+1) (\text{ل}-\text{ن})}{\text{ل}-\text{ر}}$$

$$\therefore \text{ل} \text{ ر} = \frac{\text{ل}}{\text{ل}-\text{ر}} \quad (3)$$

وهذا القانون يعتبر صيغة أخرى لإيجاد قيمة $\text{ل} \text{ ر}$ بدلالة مضروب ن ، مضروب $(\text{ن}-\text{ر})$

نتيجة :

$$\text{ل} = 1, \quad \text{ل} \text{ ر} = 1$$

ملاحظة :

الصورة (1) تستخدم عندما ر عدد صغير معلوم

الصورة (3) تستخدم عندما ر عدد كبير أو مجهول

$$\text{مثال : اختصر} \quad \frac{8}{6} + \frac{9}{7}$$

$$\text{الحل} \\ 128 = 7 \times 8 + 8 \times 9 = \frac{7 \times 8}{6} + \frac{8 \times 9}{7} = \frac{8}{6} + \frac{9}{7}$$

مثال : إذا كان $\text{ل} \text{ ن} = 720$ فما قيمة ن

الحل

$$\text{ل} \text{ ر} = 8 \times 9 \times 10 = 720$$

$$\therefore \text{ن} = 10$$

مثال : إذا كان $5 \text{ ل ر} = 120$ فاوجد قيمة ر

الحل

$$5 \text{ ل ر} = 120 \Rightarrow 5 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$$

أي نضرب العوامل في بعضها حتى نصل إلى العدد 120

$$120 = 2 \times 60, \quad 60 = 3 \times 20, \quad 20 = 4 \times 5$$

$$\therefore 5 \text{ ل ر} = 120 = 2 \times 3 \times 4 \times 5 \therefore 4 = \text{ر}$$

مثال : إذا كان $5 \text{ ل ن} = 120$ فما قيمة ن ؟

الحل

نحلل 120 إلى أعداد متتالية تبدأ بالعدد 1

$$\therefore 120 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$$

$$\therefore 5 \text{ ل ن} = 5 \therefore 5 = \text{ن}$$

مثال : إذا كان $5 \text{ ل س} + 3 \text{ ل ص} = 50$ ، $5 \text{ ل س} - 2 \text{ ل ص} = 20$ فما قيمة كل من س ، ص ؟

الحل

$$5 \text{ ل س} - 2 \text{ ل ص} = 20$$

$$5 \text{ ل س} =$$

$$\therefore 5 \text{ ل س} = 20 \quad (2)$$

$$5 \text{ ل س} + 3 \text{ ل ص} = 50$$

$$3 \text{ ل ص} =$$

$$\therefore 3 \text{ ل ص} = 9 \quad (1)$$

من (1) ، (2) بالجمع ثم بالطرح نجد أن $5 \text{ ل س} = 20$ ، $3 \text{ ل ص} = 9$

مثال : إذا كان $5 \text{ ل ن} - 3 \text{ ل ص} = 20$ ، $5 \text{ ل ن} + 2 \text{ ل ص} = 42$ أوجد ن

الحل

$$\frac{2}{5} = \frac{(3-ن)(2-ن)(1-ن)}{(1-ن)(ن)(1+ن)}$$

$$\therefore 5 \text{ ل ن} + 2 \text{ ل ص} = 42$$

$$\therefore \frac{2}{5} = \frac{6+ن-2}{ن+1}$$

$$\therefore 0 = (6-ن)(7-ن)$$

$$0 = 42 + ن - 2$$

$$\therefore \frac{7}{5} = \text{ن مرفوض} ، 6 = \text{ن}$$

مثال : حل المعادلة :-

$$\frac{n}{n-1} = \frac{12}{n-12}$$

الحل

$$\frac{n}{n-1} \times 12 = \frac{n}{n-12}$$

$$\therefore n = 12 \quad \therefore \frac{12}{12-1} = \frac{12}{12-12}$$

مثال : حل المعادلة :-

$$\frac{3}{4+n} = \frac{3+n}{4}$$

الحل

$$\therefore \frac{3}{4+n} \times 4 = (4+n) \times \frac{3+n}{4} \quad \text{ضربنا الطرفين } \times \text{ الوسطين}$$

$$\therefore \frac{3}{4} \times 1 \times 2 \times 3 \times 4 = \frac{3}{4} \times 4 = 4+n$$

$$\frac{9}{4} = \frac{3}{4} \times 9 = 4+n$$

$$\therefore n = 5 \quad \therefore 9 = 4+n$$

مثال : إذا كان $\frac{208}{n} = \frac{5}{n-1} + \frac{3}{n-2}$ فاوجد قيمة ن

الحل

بضرب طرفي المعادلة في n

$$\therefore \frac{208n}{n} = \frac{5n}{n-1} + \frac{3n}{n-2}$$

$$208 = \frac{5n(n-1)}{n-1} + \frac{3n(n-2)}{n-2}$$

$$\therefore 208 = 5n - 5 + 3n^2 - 6n$$

$$\therefore 208 = 5n + (1-n)3n^2$$

$$\therefore n = 8 \quad \text{والقوس الآخر مرفوض}$$

$$\therefore 0 = (26 + 3n)(8-n)$$

الحل

$$o.f. = \underline{1 - n^2} \quad \therefore$$

$$1 \times 7 \times 7 \times 1 \times 0 \times 7 \times 7 = 0.1. \therefore$$

$$\underline{y} = 1 - n^2 \therefore \underline{y} = 0.4 \therefore$$

$$x = n \therefore \quad y = 1 - n \therefore \quad z = n^2 \therefore$$

تقریر (۱)

(۱) إذا كن لن = ۲۴ فالوجد لن ۳

(۲) إذا كان $l^r = 6720$ فأوجد $\underline{r+1}$

(۳) إذا كان n ، $= 14 \times 2^n$ ل n فاجد n .

(٤) أوجد قيمة : $n! + n! + n!$ إذا علم أن $n + 1 : n - 1 = 72$

(٥) إذا كان $l = 6.480$ ، $r = 720$ فلو جد قيمة n ل r ،

(٦) أثبت أن: $n! = n! + n! + \dots + n!$

(٧) إذا كان $l^{n+1} : l^n - l = 72 : 5$ فابعد l عن

(۸) إذا كان $l' = 60.480$ فلوجد l —

(٩) أثبت أن: $10! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10$

(١٠) أثبت أن: $1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (n^2 - 1) \times n^2$ ان

(۱۱) إذا كان $m + n = 360$ ، $2m + n = 540$ أوجد m و n .

(١٢) إذا كان $l^1 = r$ ، $l^2 = r$ ، فلوجد قيمة $\frac{1+r}{2+r} + \frac{r}{1+r} + \frac{2-r}{1-r}$

(۱۳) إذا كانت $s = \{s : s \text{ و } ط، 1 \leq s \leq 7\}$

وگنت ص = $\{(a, b) : a, b \in S, a \neq b\}$ کم عدد عناصر ص ؟

(۱۴) $\{s: s \exists v, -v \geq s \geq t\}$ إذا كانت $s =$

ع = { (ا، ب، ج) : ا، ب، ج، د، س، ا ≠ ب ≠ ج } كم عدد عناصر ع؟

(١٥) إذا كانت $n+1$ ل ٣ : $\frac{n}{n-2}$ فما قيمة n ؟

التوافيق

كنا نهتم بترتيب الرقم المكون للعدد ولكن في التوافيق لا نعطي اهتماماً للترتيب فمثلاً العددين ٣١ ، ١٣ يعتبران توافيقاً واحداً وكذلك الأعداد ٢٣١ ، ٣١٢ ، ١٢٣ ، ٣٢١ تعتبر توافيقاً واحداً ونقول إن اختيار من الاختيارات السابقة تسمى توافيقاً أو توافق .

أي أنه إذا كان الترتيب له قيمة يجيب عندئذ إيجاد عدد التباديل أمام إذا كان الترتيب ليس له قيمة فيكون المطلوب إيجاد عدد التوافيق .

تعريف :

التوافق هي عدد طرق اختيار (ر) من الأشياء من بين (ن) من الأشياء بدون إحلال (تكرار) وبدون مراعاة ترتيب العناصر التي تختارها .
ونرمز لهذا العدد بالرمز ${}^n C_r$ حيث $r \leq n$ ، $r \geq 0$.

العلاقة بين التوافيق والتباديل :

- إذا كان لدينا مجموعة س ، ن من العناصر فإن عدد المجموعات الجزئية للمجموعة س والتي تشمل كل منها على ر من العناصر هو ${}^n C_r$
- أما عدد التباديل المختلفة لعناصر المجموعة س مأخوذة راء راء هو $n!$ ولو أجرينا على كل مجموعة جزئية من المجموعات السابقة جميع التباديل الممكنة لكان عدد تباديل كل مجموعة هو $n!$

$$\therefore {}^n C_r \times n! = n!$$

$$\therefore {}^n C_r = \frac{n!}{r!} \quad (١)$$

نتيجة :-

$$\frac{n!}{r!} = {}^n C_r$$

- البرهان -

$$\frac{n!}{r!} = {}^n C_r$$

$$\therefore {}^n C_r = \frac{n!}{r!}$$

$$\therefore {}^n C_r = \frac{n!}{r!}$$

نتيجة : (قانون التبسيط)

$${}^n\text{ق}_\text{ر} = {}^n\text{ق}_{\text{ن-ر}}$$

- البرهان -

$${}^n\text{ق}_\text{ر} = \frac{\text{لن}}{\text{لن-ر-لر}} = \frac{\text{لن}}{\text{لن-ر-لر}} = {}^n\text{ق}_{\text{ن-ر}}$$

ملاحظة : ${}^n\text{ق}_\text{ن} = {}^n\text{ق}_\text{ن} = 1$

- البرهان -

$${}^n\text{ق}_\text{ن} = {}^n\text{ق}_{\text{ن-ن}} = {}^n\text{ق}_\text{ن} \quad \text{اي ان } {}^n\text{ق}_\text{ن} = {}^n\text{ق}_\text{ن}$$

$$\therefore {}^n\text{ق}_\text{ن} = {}^n\text{ق}_\text{ن} = 1$$

نتيجة : إذا كان ${}^n\text{ق}_\text{ر} = {}^n\text{ق}_\text{ه}$ ، $\therefore \text{ر} = \text{ه}$ ، أو $\text{ن} = \text{ر} + \text{ه}$

- البرهان -

$$\therefore {}^n\text{ق}_\text{ر} = {}^n\text{ق}_\text{ه} \quad \therefore \text{ر} = \text{ه}$$

$$\therefore {}^n\text{ق}_\text{ر} = {}^n\text{ق}_{\text{ن-ر}} = {}^n\text{ق}_\text{ه} \quad \therefore \text{ن} = \text{ر} + \text{ه}$$

نتيجة :

النسبة بين ${}^n\text{ق}_\text{ر}$ ، ${}^n\text{ق}_{\text{ن-ر}}$

$$\therefore \frac{{}^n\text{ق}_\text{ر}}{{}^n\text{ق}_{\text{ن-ر}}} = \frac{\text{لن}}{\text{لن-ر-لر}}$$

- البرهان -

$$\therefore {}^n\text{ق}_\text{ر} = \frac{\text{لن}}{\text{لر-لن-ر}} \quad {}^n\text{ق}_{\text{ن-ر}} = \frac{\text{لن}}{\text{لر-لن-ر-1}}$$

$$\therefore \frac{{}^n\text{ق}_\text{ر}}{{}^n\text{ق}_{\text{ن-ر}}} = \frac{\text{لن}}{\text{لر-لن-ر}} \times \frac{\text{لر-لن-ر-1}}{\text{لن}} = \frac{\text{لر-لن-ر-1}}{\text{لر-لن-ر}}$$

$$= \frac{\text{لر-لن-ر-1}}{\text{لر-لن-ر}} = \frac{\text{لر-لن-ر-1}}{\text{لر-لن-ر-1} + 1} = \frac{\text{لر-لن-ر-1}}{\text{لر-لن-ر}}$$

مثال : أوجد قيمة :

$$(٢ ق^٧ + ٢ ق^٦) - (٢ ق^٩ + ١ ق^٨)$$

الحل

$$(٢ ق^٧ + ٢ ق^٦) - (٢ ق^٩ + ١ ق^٨)$$

$$\therefore ٢ ق^٧ = ٢ ق^٧ \therefore \left(\frac{٥ \times ٦ \times ٧}{١ \times ٢ \times ٣} + \frac{٥ \times ٦}{١ \times ٢} \right) \times ٢ - \frac{٨ \times ٩}{١ \times ٢} + \frac{٥ \times ٦ \times ٧ \times ٨}{١ \times ٢ \times ٣ \times ٤} \therefore$$

$$٦ = ١٠٠ - ١٠٦ = (٣٥ + ١٥) ٢ - (٣٦ + ٧٠) =$$

مثال : إذا كان : $١٠ ق^٧ = ٢ ق^٨ - ٨ ق^٦$ فما قيمة $١٢ ق^٧$ ؟

الحل

$$\therefore ١٠ ق^٧ = ٢ ق^٨ - ٨ ق^٦ \therefore ٥ \therefore$$

$$\therefore ١٢ = ٢٠ = ٨ - ٢ + ٥ \therefore$$

$$\therefore ١٢ ق^٧ = ٢ ق^٨ - ٨ ق^٦ = ١٢ ق^٧$$

مثال : إذا كان $١٢٠ = ٢ ق^٧$ أوجد $١٠ ق^٧$:

الحل

$$\therefore ٢ ق^٧ = ٢ ق^٧ - (٣ - ١) = ٢ ق^٧$$

$$\therefore ١٢٠ = \frac{٢ ق^٧}{٣} = ٢ ق^٧ \therefore ١٢٠ \times \frac{٣}{٢} = ٢ ق^٧$$

$$\therefore ٧٢٠ = ٢ ق^٧ \therefore ١٢٠ \times ١ \times ٢ \times ٣ = ٢ ق^٧$$

$$\therefore ٨ \times ٩ \times ١٠ = ٢ ق^٧ \therefore ٨ \times ٩ \times ١٠ = ٢ ق^٧$$

$$\therefore ١٠ = ١٠$$

$$\therefore ٢٣٠ = \frac{٨ \times ٩ \times ١٠ \times ١١}{١ \times ٢ \times ٣ \times ٤} = ٤ ق^١١ = ٤ ق^١ + ١٠ = ٢٣٠$$

مثال : أوجد مجموعة حل المعادلة الآتية

$${}^{1+n}q = 7 + {}^{n-1}q$$

الحل

$$\text{تستخدم قانون التبسيط} \quad \therefore {}^{1+n}q = {}^{n-1}q + (n-1) - 1 = {}^{n-1}q - 2$$

$$\therefore 7 - n = \frac{(1+n) \times n \times (n-1)}{1 \times 2 \times 3}$$

$$\therefore (1-n)7 = \frac{(1+n) \times n \times (n-1)}{1 \times 2 \times 3}$$

$$\therefore n = 6 \quad \therefore 0 = (7+n)(1-n) \quad \therefore n = 2 - 42 = 0$$

مثال :

إذا كان : ${}^nq : {}^r = {}^nq : {}^r = 1 : 8 = 3 : 8$ ، ${}^vq = {}^vq$ ، فأوجد قيمة n ، r

الحل

$$\therefore {}^vq = {}^vq \quad \therefore 5 - r + r = 7$$

$$\therefore r = 12 \quad \therefore r = 3$$

$$\therefore {}^nq : {}^r = {}^nq : {}^r = 1 : 8 = 3 : 8 \quad (\text{نستخدم قانون النسبة})$$

$$\therefore \frac{8}{3} = \frac{1 + 3 - n}{3} = \frac{{}^nq}{1 - r} = \frac{{}^nq}{1 - r}$$

$$\therefore \frac{8}{3} = \frac{2 - n}{3} \quad \therefore n = 2 - 8 = 10$$

مثال : إذا كان ${}^nq : {}^r = {}^nq : {}^r = 1 : 8 = 3 : 8$ ، فأوجد قيمتي n ، r

الحل

$$\therefore \frac{14}{5} = \frac{1 + (1+r) - n}{1+r}$$

$$\therefore \frac{12}{5} = \frac{{}^{1+r}q}{{}^nq}$$

$$\therefore 14 + r = 5 - n$$

$$\therefore \frac{14}{5} = \frac{r - n}{1+r}$$

$$\therefore n - 19 = r = 14 \quad (1)$$

$$\frac{13}{6} = \frac{ن - (1 + 2 + ر)}{2 + ر} \therefore$$

$$\therefore 26 + ر 13 = 6 - ر 6 - ن 6$$

$$\frac{91}{42} = \frac{ن ق ر + 2}{1 + ر ق} \therefore$$

$$\therefore \frac{13}{6} = \frac{1 - ر - ن}{2 + ر}$$

بضرب طرفي (1) في 1 وإضافتها إلى (2)

$$\therefore 6 - ن - 19 = ر 22 \quad (2) \text{ ---}$$

$$\therefore ن = 18, ر = 4$$

مثال : حل المعادلة :

$$س^{1+} ل^{1+} = 10 \times ق^{1+} \text{ حيث } س و ط$$

الحل

$$\therefore \frac{10 (س + 1) س (س - 1) (س - 2) (س - 3)}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} = (س - 1) س (س + 1)$$

$$\therefore \frac{1}{12} \times (س - 1) (س - 2) = 1 \quad \text{باختصار الطرفين}$$

$$\therefore (س - 1) (س - 2) = 12 \quad \therefore س^2 - 3س - 6 = 0$$

$$\therefore س = 6, س = 1 \text{ (مرفوض)}$$

مثال : إذا كان $ل^{2+} ن^{2+} = 720$ ، $ق = 1$ ، $3 =$ أوجد قيمة $ق$ من

الحل

$$\therefore ق = 1 \quad \therefore ن = 3$$

$$\therefore ل^{2+} ن^{2+} = 720 = 8 \times 9 \times 10 = ل^{1+}$$

$$\therefore 10 = 3 + م \quad \therefore م = 7$$

$$\therefore ق^{1+} = 35 = \frac{5 \times 6 \times 7}{1 \times 2 \times 3} = ق^{1+} = 35$$

تمرين (٢)

(١) احسب نتيجة كل مما يأتي :

[أ] $١٣ق٠$ ، [ب] $٢٠ق٠$ ، [ج] $٢٠ق١٧$ ، [د] $١٠٠ق١٨$

(٢) إذا كان $٢ق٠ = ٤٣٥$ أوجد قيمة $٢ق٠$

(٣) إذا كان $٢ق٠ = ٣٠$ أوجد قيمة $٢ق٠$

(٤) إذا كان $٢ق٠ + ٢ق٠ = ٥٦$ ، $٢ق٠ = ٣$ أوجد قيمة $٢ق٠ + ٢ق٠$

(٥) إذا كان $٢ق٠ = ١٢٠$ أوجد قيمة $٢ق٠ + ٢ق٠$

(٦) إذا كان $٢ق٠ + ٢ق٠ = ١٢٠$ وكان $٢ق٠ = ١٢٠$ أوجد $٢ق٠ + ٢ق٠$

(٧) أثبت أن : $٢ق٠ + ٢ق٠ = ٢ق٠ + ٢ق٠$ ومن ثم

$$[١] \frac{٢ق٠ + ٢ق٠}{٢ق٠}$$

[ب] أثبت أن : $٢ق٠ + ٢ق٠ = ٢ق٠ + ٢ق٠$

(٨) إذا كان $٢ق٠$ ، $٢ق٠$ ، $٢ق٠$ في تتابع حسابي أوجد قيمة $٢ق٠$

(٩) أثبت أن $٢ق٠ : ٢ق٠ = ٢ق٠ : ٢ق٠$ ومن ثم أوجد $\frac{٢ق٠ + ٢ق٠}{٢ق٠ + ٢ق٠}$

(١٠) إذا علم أن $٢ق٠ : ٢ق٠ : ٢ق٠ = ١٤ : ١٤ : ٣$ فأوجد قيمة كل من $٢ق٠$ ، $٢ق٠$ ، $٢ق٠$

نظرية ذات الحدين

إذا كان a, b عددين حقيقيين ، n عدد صحيح موجب فإن

$$(1) - (a+b)^n = a^n + n a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-j+1)}{j!} a^{n-j} b^j + \dots + b^n$$

ملحوظة هامة :

إذا وضعنا في القاتون السابق $(-b)$ بدلاً من b في كلا الطرفين فإن

$$(2) - (a-b)^n = a^n - n a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} b^2 - \dots + (-1)^{n-1} \frac{n(n-1)\dots(n-j+1)}{j!} a^{n-j} b^j + \dots + (-1)^n b^n$$

ملاحظات على مفكوك ذات الحدين :

- (1) عدد حدود المفكوك يساوي $(n+1)$ أي يزيد على الأس بمقدار 1
- (2) الليل الذي تحت q يقل عن رتبة الحد بقدر 1 وهو نفسه أس b
- (3) تتناقص قوة a تدريجياً وتزيد قوة b تدريجياً بحيث يكون مجموع القوتين n في كل حد .
- (4) في مفكوك $(a-b)^n$ تكون الحدود الفردية الرتبة موجبة والحدود الزوجية الرتبة سالبة.

نتيجة : بجمع (1) ، (2) ينتج أن :

$$\text{أولاً : } (a+b)^n + (a-b)^n = a^n + n a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-j+1)}{j!} a^{n-j} b^j + \dots + b^n + a^n - n a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} b^2 - \dots + (-1)^{n-1} \frac{n(n-1)\dots(n-j+1)}{j!} a^{n-j} b^j + \dots + (-1)^n b^n$$

$$= [a^n + n a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-j+1)}{j!} a^{n-j} b^j + \dots + b^n]$$

$$= \text{ضعف مجموع الحدود الفردية الرتبة}$$

$$\text{ثانياً : } (a+b)^n - (a-b)^n = a^n + n a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-j+1)}{j!} a^{n-j} b^j + \dots + b^n - a^n + n a^{n-1} b - \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} b^2 + \dots - (-1)^{n-1} \frac{n(n-1)\dots(n-j+1)}{j!} a^{n-j} b^j + \dots - (-1)^n b^n$$

$$= [a^n + n a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-j+1)}{j!} a^{n-j} b^j + \dots + b^n]$$

$$= \text{ضعف مجموع الحدود الزوجية الرتبة}$$

أبسط صورة لنظرية ذات الحدين

إذا كانت s, c, n عدد صحيح موجب فإن

$$(s+1)^n = s^n + n s^{n-1} c + \frac{n(n-1)}{2} s^{n-2} c^2 + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-j+1)}{j!} s^{n-j} c^j + \dots + c^n$$

$$, (s-1)^n = s^n - n s^{n-1} c + \frac{n(n-1)}{2} s^{n-2} c^2 - \dots + (-1)^{n-1} \frac{n(n-1)\dots(n-j+1)}{j!} s^{n-j} c^j + \dots + (-1)^n c^n$$

مثال: باستخدام نظرية ذات الحدين أوجد مفكوك كل مما يأتي:-

$$[١] \quad (١٢ + ٣ب)^٥ \quad [٣] \quad (س - \sqrt{٢٧})^٦$$

$$[٢] \quad (س + \frac{١}{٢ص})^٤ \quad [٤] \quad (١ + \sqrt{٧}ص)^٥$$

$$[٥] \quad (\frac{٢}{ص\sqrt{٧}} + \frac{\sqrt{٧}}{٢ص})^٥ + (\frac{٢}{ص\sqrt{٧}} - \frac{\sqrt{٧}}{٢ص})^٥$$

الحل

$$[١] \quad (١٢ + ٣ب)^٥ = (١٢)^٥ + ٥(١٢)^٤(٣ب) + ١٠(١٢)^٣(٣ب)^٢ + ١٠(١٢)^٢(٣ب)^٣ + ٥(١٢)(٣ب)^٤ + (٣ب)^٥$$

$$= ١٣٢ + ٢٤٠أب + ٧٢٠أ٢ب + ١٠٨٠أ٣ب + ٨١٠أ٤ب + ٢٤٣ب٥$$

$$[٢] \quad (س + \frac{١}{٢ص})^٤ = (س)^٤ + ٤(س)^٣(\frac{١}{٢ص}) + ٦(س)^٢(\frac{١}{٢ص})^٢ + ٤س(\frac{١}{٢ص})^٣ + (\frac{١}{٢ص})^٤$$

$$= ٨س + \frac{٢س}{ص} + \frac{٣س^٢}{٢ص} + \frac{٢س^٣}{٢ص} + \frac{١}{١٦ص^٤}$$

$$[٣] \quad (س - \sqrt{٢٧})^٦ = (س)^٦ - ٦(س)^٥(\sqrt{٢٧}) + ١٥(س)^٤(\sqrt{٢٧})^٢ - ٢٠(س)^٣(\sqrt{٢٧})^٣ + ١٥(س)^٢(\sqrt{٢٧})^٤ - ٦س(\sqrt{٢٧})^٥ + (\sqrt{٢٧})^٦$$

$$= ٨ + ٦\sqrt{٢٧}س - ٢٠(٢٧)س^٢ + ١٥(٢٧)\sqrt{٢٧}س^٣ - ٦٠(٢٧)^٢س^٤ + ١٢(٢٧)^٣س^٥ - ٦(٢٧)^٤س^٦ + (٢٧)^٣$$

$$[٤] \quad (١ + \sqrt{٧}ص)^٥ = ١ + ٥(\sqrt{٧}ص) + ١٠(٧ص^٢) + ١٠(٧\sqrt{٧}ص^٣) + ٥(٧^٢ص^٤) + (٧^٢ص^٥)$$

$$+ (٧ص)^٥$$

$$= ١ + ٥\sqrt{٧}ص + ١٠(٧ص^٢) + ١٠(٧\sqrt{٧}ص^٣) + ٥(٧^٢ص^٤) + (٧^٢ص^٥)$$

$$[٥] \quad (\frac{٢}{ص\sqrt{٧}} + \frac{\sqrt{٧}}{٢ص})^٥ + (\frac{٢}{ص\sqrt{٧}} - \frac{\sqrt{٧}}{٢ص})^٥ = (٢(١ + \sqrt{٧}ص) + ٢(١ - \sqrt{٧}ص))^٥$$

$$= ٢^٥ [(١ + \sqrt{٧}ص)^٥ + (١ - \sqrt{٧}ص)^٥]$$

$$= ٢^٥ [١ + ٥\sqrt{٧}ص + ١٠(٧ص^٢) + ١٠(٧\sqrt{٧}ص^٣) + ٥(٧^٢ص^٤) + (٧^٢ص^٥) + ١ - ٥\sqrt{٧}ص + ١٠(٧ص^٢) - ١٠(٧\sqrt{٧}ص^٣) + ٥(٧^٢ص^٤) - (٧^٢ص^٥)]$$

مثال : باستخدام نظرية ذات الحدين أوجد قيمة كل مما يلي مقرباً الجواب إلى ٣ أرقام عشرية :

[أ] ${}^0(0,96) - {}^1(1,003) - {}^2(0,997)$ [ب] ${}^1(0,997) - {}^2(1,003)$

الحل

[أ] ${}^0(0,96) = {}^0(1 - 0,04) = {}^0(1) - {}^1(0,04) + {}^2(0,04)^2 - {}^3(0,04)^3 + \dots$

$= 1 - 0,16 + 0,0256 - 0,0016 + \dots$

$= 0,81536 \approx 0,815$ تقريباً

[ب] ${}^1(0,997) - {}^2(1,003) = {}^1(1 - 0,003) - {}^2(1 + 0,003)$

$= {}^1(1) - {}^2(1) - {}^3(0,003) + \dots$

$= -0,003 + \dots$

مثال : فك (س+٤ص) بنظرية ذات الحدين ثم استخدم المفكوك في إيجاد قيمة ${}^7(1,0004)$ إلى أرقام عشرية .

الحل

${}^7(س+٤ص) = {}^7(س) + {}^6(٤ص)س + {}^5(٦ص^2)س^2 + {}^4(٤ص^3)س^3 + {}^3(٢٨ص^4)س^4 + {}^2(٢٢٤ص^5)س^5 + {}^1(٨٩٦ص^6)س^6 + {}^0(٤٠٩٦ص^7)$

$= {}^7(س) + {}^6(٤ص)س + {}^5(٦ص^2)س^2 + {}^4(٤ص^3)س^3 + {}^3(٢٨ص^4)س^4 + {}^2(٢٢٤ص^5)س^5 + {}^1(٨٩٦ص^6)س^6 + {}^0(٤٠٩٦ص^7)$

وبوضع س = ١ ، ص = ٠,٠٠٠١

$\therefore {}^7(١,٠٠٠٤) = {}^7(١) + {}^6(٤ \times ٠,٠٠٠١)س + {}^5(٦ \times ٠,٠٠٠١^2)س^2 + {}^4(٤ \times ٠,٠٠٠١^3)س^3 + {}^3(٢٨ \times ٠,٠٠٠١^4)س^4 + {}^2(٢٢٤ \times ٠,٠٠٠١^5)س^5 + {}^1(٨٩٦ \times ٠,٠٠٠١^6)س^6 + {}^0(٤٠٩٦ \times ٠,٠٠٠١^7)$

$= ١,٠٢٨٣٣٨$ تقريباً

مثال : أوجد مفكوك (س+٢) باستخدام ذي الحدين ثم استم المفكوك لإيجاد قيمة ${}^7(\frac{٢٠١}{١٠٠})$ مقرباً لثلاثة أرقام عشرية .

الحل

${}^7(س+٢) = {}^7(س) + {}^6(٢)س + {}^5(٦ص^2)س^2 + {}^4(٤ص^3)س^3 + {}^3(٢٨ص^4)س^4 + {}^2(٢٢٤ص^5)س^5 + {}^1(٨٩٦ص^6)س^6 + {}^0(٤٠٩٦ص^7)$

$= {}^7(س) + {}^6(٢)س + {}^5(٦ص^2)س^2 + {}^4(٤ص^3)س^3 + {}^3(٢٨ص^4)س^4 + {}^2(٢٢٤ص^5)س^5 + {}^1(٨٩٦ص^6)س^6 + {}^0(٤٠٩٦ص^7)$

$= {}^7(س) + {}^6(٢)س + {}^5(٦ص^2)س^2 + {}^4(٤ص^3)س^3 + {}^3(٢٨ص^4)س^4 + {}^2(٢٢٤ص^5)س^5 + {}^1(٨٩٦ص^6)س^6 + {}^0(٤٠٩٦ص^7)$

${}^7(٢,٠١) = {}^7(٢) + {}^6(٢ \times ٠,٠١)س + {}^5(٦ \times ٠,٠١^2)س^2 + {}^4(٤ \times ٠,٠١^3)س^3 + {}^3(٢٨ \times ٠,٠١^4)س^4 + {}^2(٢٢٤ \times ٠,٠١^5)س^5 + {}^1(٨٩٦ \times ٠,٠١^6)س^6 + {}^0(٤٠٩٦ \times ٠,٠١^7)$

$\therefore {}^7(\frac{٢٠١}{١٠٠}) = {}^7(٢) + {}^6(٢ \times ٠,٠١)س + {}^5(٦ \times ٠,٠١^2)س^2 + {}^4(٤ \times ٠,٠١^3)س^3 + {}^3(٢٨ \times ٠,٠١^4)س^4 + {}^2(٢٢٤ \times ٠,٠١^5)س^5 + {}^1(٨٩٦ \times ٠,٠١^6)س^6 + {}^0(٤٠٩٦ \times ٠,٠١^7)$

$= ٦٥,٩٤٤٠ = ٠,٠٢٤٠ + ١,٩٢ + ٦٤ =$

الحد العام في مفكوك (أ + ب)ⁿ

نعلم أن :

$$(أ + ب)^n = ١ + n ق١ ب١ + n ق٢ ب٢ أ١ + ... + n ق٢ ب٢ أ٢ + n ق١ ب١ + ١$$

نلاحظ أن :-

$$١ = n ق١ ب١ أ١ ، ٢ = n ق٢ ب٢ أ٢ ، ٣ = n ق٣ ب٣ أ٣ ، ... ، n = n ق٢ ب٢ أ٢ ، n ق١ ب١ + ١ = n ق٢ ب٢ أ٢ + n ق١ ب١ + ١$$

$$١ = n ق٢ ب٢ أ٢ + n ق١ ب١ + ١$$

$$أي ١ = n ق٢ ب٢ أ٢ + n ق١ ب١ + ١$$

الحد الأوسط أو الحدين الأوسطيين في مفكوك ذات الحدين

نعلم أن عدد الحدود في مفكوك (أ + ب)ⁿ = n + ١ لذا يكون لدينا حالتان :

أولاً : إذا كانت n عددا زوجيا :

فإن عدد حدود المفكوك يكون فرديا .∴ يوجد حد أوسط واحد هو ح_{n+1}

ثانياً : إذا كانت n عددا فرديا :

فإن عدد حدود المفكوك يكون زوجيا .∴ يوجد حدان أوسطان هما $\frac{n+1}{2}$ ، $\frac{n+2}{2}$ + ١

مثال: أوجد النسبة بين الحد الأوسط والحد الرابع في مفكوك $(\frac{3}{س} + \frac{س^2}{3})^{١٠}$

الحل

$$\text{الحد الأوسط هو ح} = ١٠ \text{ ق}^{١٠} (\frac{3}{س})^٥ (\frac{س^2}{3})^٥ = ١٠ \text{ ق}^{١٠}$$

$$\text{ح} = ١٠ \text{ ق}^{١٠} (\frac{3}{س})^٥ (\frac{س^2}{3})^٥ = \frac{١٠!}{٥! ٥!} \times \frac{٨ \times ٩ \times ١٠}{١ \times ٢ \times ٣} = \frac{١٠!}{٥! ٥!} \times \frac{٨ \times ٩ \times ١٠}{١ \times ٢ \times ٣}$$

$$\frac{٢١}{١٦٠} = \frac{٢٧}{٣ \times ٦٤٠} \times \frac{٦ \times ٧ \times ٨ \times ٩ \times ١٠}{١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \times ٥} = \frac{١٠!}{٥! ٥!}$$

مثال : في مفكوك (٤س + ٢) $\left(\frac{1}{س} + ٢ \right)$ أوجد قيمة س التي تجعل الحدين الأوسطين في المفكوك متساويين ؟

الحل

الحدان الأوسطان هما ح^٤ ح^٢
 $\therefore ١٥ ق \times ٧ س^١ ٢ = ١٥ ق \times ٨ س^١ ٢$
 $\therefore ٨ س^١ = ١$
 $\therefore س = \frac{1}{٧}$

مثال : إذا كان معامل الحد الذي ترتيبه ر+٤ في مفكوك (١+س)^{١٧} يساوي معامل الحد الذي ترتيبه ٣+ر في نفس المفكوك فأوجد قيمة ر

الحل

معامل ح^{٤+ر} = $١٧ ق^{١٧} = ٢+٣ ق^{١٧}$
 $\therefore ١٧ ق^{١٧} = ٢+٣ ق^{١٧}$
 $\therefore ٢+٣ = ١٧$
 $\therefore ر = ١٧ - ٣ = ١٤$
 $\therefore ر = ١٤$

مثال : إذا كان ضعف معامل الحادي عشر في مفكوك (١+س)^{١٥} يساوي ثلاثة أمثال معامل الحد العاشر في مفكوك (١+ص)^{١٥} أوجد قيمة ن

الحل

$٢ \times ١٥ ق^{١٥} = ٣ \times ١٤ ق^{١٤}$
 $\therefore \frac{١٥ ق^{١٥}}{١٤ ق^{١٤}} = \frac{٣}{١}$
 $\therefore \frac{١٥ ق}{١٤} = ٣$
 $\therefore ١٥ ق = ٤٢$
 $\therefore ق = \frac{٤٢}{١٥} = \frac{١٤}{٥}$
 $\therefore ١٥ = ن$

مثال : أثبت أن معامل الحد الأوسط في مفكوك (١+س)^{٢٠} يساوي مجموع معاملي الحدين الأوسطين في مفكوك (١+س)^{٢٠}

الحل

الحد الأوسط هو $ح = ١ + ١ = ٢$

$$\text{معامل } ح = ١ + ١ = ٢ \text{ ق } ٢ = \frac{٢}{٢} = ١$$

الحدان الأوسطان هما $ح = ١ + ١ = ٢$

$$\text{مجموع معاملا الحدين الأوسطين} = \frac{١-٢}{١} + \frac{١-٢}{١} = ٢$$

مثال: الحد الثالث في مفكوك $(١ + س)^٢$ حسب قوي من التصاعدية حيث ن عند صحيح موجب هو ٢٨ س^٢ ، الحد الخامس من نفس المفكوك ١١٢٠ - أوجد قيمة كل من ن ، س .

الحل

$$٢٨ = \frac{٢(١-٢)}{١ \times ٢} \therefore \text{ح} = ٢ \text{ ق } ٢ = ٢ \text{ س}^٢ = ٢٨ \text{ س}^٢$$

$$٠ = (٧ + ن) (٨ - ن) \therefore ٠ = ٥٦ - ن - ن^٢$$

$$١١٢٠ = ١٦ \text{ س}^٤ \therefore \text{ح} = ٠ = ١٦ \text{ س}^٤ \therefore ١١٢٠ = ١٦ \text{ س}^٤$$

$$١٦ = \frac{١ \times ٢ \times ٣ \times ٤}{٥ \times ٦ \times ٧ \times ٨} \times ١١٢٠ = ١٦ \therefore \text{س} = ٢$$

مثال: إذا كان الحدان الأوسطان في مفكوك $(٥ + س^٣)^٢$ متساويين - أوجد قيمة س علماً بأن ن عند صحيح موجب .

الحل

الحدان الأوسطان هما $ح = ١ + ١ = ٢$

$$\therefore ١ + ١ = ٢ \text{ ق } ٢ = ٢ \text{ س}^٣ = ٢ \text{ س}^٣ \therefore ١ + ١ = ٢ \text{ ق } ٢ = ٢ \text{ س}^٣$$

$$\therefore ٥ = ٥ \therefore \text{س} = ٥$$

مثال: في مفكوك $(١ + س)^٢$ حسب قوي من التصاعدية كان الحد الثاني $\frac{١}{٣}$ والحد الثالث $\frac{١}{٩}$ أوجد قيمتي ن ، س ثم أوجد الحد الرابع .

الحل

$$\text{ح} = ٢ \text{ ق } ٢ = ٢ \text{ س} = \frac{١}{٣} \therefore \text{س} = \frac{١}{٣}$$

$$\text{ح} = ٢ \text{ ق } ٢ = ٢ \text{ س}^٢ = \frac{١}{٩} \therefore \text{س}^٢ = \frac{١}{٩} \therefore \text{س} = \frac{١}{٣}$$

$$\text{بتربيع (١) والقسمة علي (٢)} \therefore \text{س} = \frac{١}{٣}$$

$$\therefore \text{ح} = ٢ \text{ ق } ٢ = ٢ \left(\frac{١}{٣} \right)^٢ = \frac{٢}{٩}$$

إيجاد الحد المشتمل علي س^٤ في مفكوك ذات الحدين

١. نفرض أن الحد المشتمل علي س^٤ هو ح^١+
٢. نوجد ح^١ في أبسط صورة .
٣. نساوي قوة س الناتجة في ح^١ بالقوة المطلوبة (هـ) فنحصل علي قيمة (ر) ويكون الحد المشتمل علي س^٤ هو ح^١+
٤. نعوض بقيمة (ر) التي حصلنا عليها في ح^١ فنحصل علي الحد المشتمل علي س^٤

ملاحظة:

الحد الخالي من س هو معامل س (لأن س^٠ = ١)

مثال :

أوجد معامل $\frac{1}{s}$ في مفكوك $(s - \frac{1}{s^2})^{12}$

الحل

$$ح + ١ = ١٢ \text{ قدر } (s - \frac{1}{s^2})^{12} = (س)^{12} \text{ قدر } (-\frac{1}{s^2})^{12} = ١ \text{ قدر } (-\frac{1}{s^2})^{12} = ١$$

بوضع ١٢ - ٤ = ٨ -

\therefore معامل س^٨ = $\frac{99}{4}$

مثال : أوجد الحد الخالي من س في مفكوك $(s - \frac{2}{s})^{10}$

الحل

$$ح + ١ = ١٠ \text{ قدر } (s - \frac{2}{s})^{10} = (س)^{10} \text{ قدر } (-\frac{2}{s})^{10} = ١ \text{ قدر } (-\frac{2}{s})^{10} = ١$$

بوضع ١٠ - ٢ = ٨ -

\therefore معامل س^٨ = ٨٠٦٤

الحد الخالي من س هو ح^١ = ١٠ قدر (س) = ٨٠٦٤

مثال: أوجد معامل س^{١٠} في مفكوك $(\frac{2}{s} + \frac{s}{3})^{10}$

الحل

معامل س^{١٤} في المفكوك هو معامل س^{١٠} في مفكوك $(\frac{2}{3} + \frac{2}{3}S)$ س^{١٥}

$$\therefore \text{ح} = 1 + \text{ق} = \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3} \right)^{15-10} = \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3} \right)^5$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{2^5}{3^5} = \frac{2^6}{3^6} = \frac{64}{729}$$

$$\text{بوضع } 10 = 15 - 5 \therefore 4 = 5$$

$$\text{معامل ح} = \frac{2^6}{3^6} = \frac{64}{729}$$

مثال: أثبت أن معامل س^٣ في مفكوك $(\frac{1}{3} + S)$ س^٣ $\frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} \right)^{3-3} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} \right)^0 = \frac{1}{3}$

$$\text{الحل}$$

$$\text{بوضع } 3 = 3 - 0 \therefore 2 = 3$$

$$\text{معامل ح} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} \right)^{3-3} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} \right)^0 = \frac{1}{3}$$

مثال: أوجد الحد المشتمل على س^٤ في المقدار $(\frac{1}{3} + S)$ س^{١١} - $(\frac{1}{3} + S)$ س^{١١}

$$\text{الحل}$$

$$\text{ح} = 1 + \text{ق} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} \right)^{11-4} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} \right)^7 = \frac{1}{3^8}$$

$$\therefore 4 = 11 - 7 \therefore 5 = 8$$

$$\text{ح} = \frac{1}{3^8} = \frac{1}{6561}$$

$$\text{الحد المشتمل على س^٤ في مفكوك } (\frac{1}{3} + S) \text{ س^{١١} - } (\frac{1}{3} + S) \text{ س^{١١}}$$

$$\text{ح} = 1 + \text{ق} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} \right)^{11-4} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} \right)^7 = \frac{1}{3^8}$$

$$\therefore 4 = 11 - 7 \therefore 5 = 8$$

ح^٢ = ق^٢ س^٢ ----- (٢) من (١) ، (٢)
 ∴ الحد المشتمل على س^٢ في المقدار = ق^٢ س^٢ - ق^٢ س^٢ = ٢٩٧ س^٢

مثال:

إذا كانت ن عددا صحيحا موجبا فاثبت أن لا يوجد حد خالي من س في مفكوك (س^{١٠} + $\frac{1}{س}$)^٢
 إلا إذا كانت ن = ٧ أو مكررا لها . أوجد الحد الخالي من س عندما ن = ٧

الحل

$$ح + ١ = ق^٢ ر^٢ (\frac{1}{س})^٢ (س^{١٠})^٢ = ر^٢ - ن^٢$$

$$= ق^٢ ر^٢ س^{١٠-٢} بوضع ١٠ - ن = ٧ = ٠$$

$$\therefore ر = \frac{١٠}{٧}$$

∴ لا يوجد حد خالي من س إلا إذا كانت ن = ٧ أو مكررا لها .

$$عندما ن = ٧ \quad \therefore ر = ١٠$$

$$\therefore ح = ١١ = ق^٢ = ١٠ = ق^٢ = ١١ \quad \therefore \frac{١١ \times ١٢ \times ١٣ \times ١٤}{١ \times ٢ \times ٣ \times ٤} = ١٠٠١$$

مثال: في مفكوك (س^٣ + $\frac{1}{س}$)^٢ من أثبت أن الحد الخالي من س يساوي معامل الحد الذي يحتوي على س^٥ .

الحل

$$ح + ١ = ق^٢ ر^٢ (\frac{1}{س})^٢ (س^٣)^٢ = ر^٢ - ن^٢ = ق^٢ ر^٢ س^{٥-٢}$$

$$\text{بوضع } ٥ - ن = ٥ = ٠ \quad \therefore ر = ٣$$

∴ الحد الخالي من س = ق^٢ ر^٢ = ٣

$$\text{بوضع } ٥ - ن = ٥ = ٦$$

$$\therefore ر = ٢ \quad \therefore \text{معامل س} = ٢ = ق^٢ ر^٢$$

مثال : اوجد قيمة a التي تجعل معامل $x^0 =$ معامل x^1 في مفكوك $(\frac{1}{x} + 2x^2)^{10}$ حيث a موجبة .

الحل

$$C_{r+1} = {}^{10}C_r \left(\frac{1}{x}\right)^r (2x^2)^{10-r}$$

$$= {}^{10}C_r \times \frac{1}{x^r} \times 2^{10-r} x^{2(10-r)} = {}^{10}C_r (2)^{10-r} x^{20-3r}$$

بوضع $20 - 3r = 0$ $\therefore r = 2$

\therefore معامل $x^0 = {}^{10}C_2 \times 1 = 45$

بوضع $20 - 3r = 1$ $\therefore r = 1$

معامل $x^1 = {}^{10}C_1 \times 2 = 20$

$\therefore \frac{20}{45} = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{9}{4}$

$\therefore \frac{1}{x} = \frac{4}{9} \Rightarrow x = \frac{9}{4}$

تمرين (٣)

بإستخدام نظرية ذات الحدين أوجد مفكوك كل مما يأتي :-

- (١) $(١ + ب)^٥$
- (٢) $(٢ - س)^٦$
- (٣) $(٢س + ٣ص)^٤$
- (٤) $(٣ - ١٢ب)^٥$
- (٥) $(س - \sqrt{٢})^٦$
- (٦) $(١ - ٣س)^٤$
- (٧) $(\frac{٣}{س} - \frac{س}{٢})^٥$
- (٨) $(١ - س^٢)^٧$
- (٩) أوجد ح ه في مفكوك $(س + \frac{١}{س})^٦$
- (١٠) أوجد ح ه في مفكوك $(\frac{٣}{س^٢} - \frac{س^٢}{٣})^{١٠}$
- (١١) أوجد ح ه في مفكوك $(\frac{٢}{س\sqrt{٧}} - \frac{\sqrt{٧}}{٢س})^{١١}$
- (١٢) أوجد معامل ح ه في مفكوك $(٢ - س^٣)^٨$
- (١٣) أوجد معامل ح ه في مفكوك $(\frac{٣}{س^٢} - ٢س)^٦$
- (١٤) أوجد معامل ح ه في مفكوك $(\frac{٣}{س} - \frac{س}{٢})^٧$
- (١٥) أوجد معامل الحد الراني في مفكوك $(س + \frac{١}{س})^{٢٠}$
- (١٦) أوجد معامل الحد النوني في مفكوك $(س^٢ + س^{-٢})^{١٠-٢٠}$
- (١٧) أوجد مفكوك $(٢+س)^٥ - (٢-س)^٥$
- (١٨) أوجد مفكوك $(١+\sqrt{س})^٦ - (١-\sqrt{س})^٦$
- (١٩) أوجد قيمة $(٠,٩٩٨)^{١٠}$ مقربة لخمس أرقام عشرية .
- (٢٠) أوجد قيمة $(١,٠٢)^٥ - (٠,٩٨)^٥$ مقربة لخمس أرقام عشرية .

تمرين (٤)

- (١) أوجد قيمة الحد الأوسط في مفكوك (س + س^١)^{١٠}
- (٢) أوجد قيمة الحد الأوسط في مفكوك (س^٢ + $\frac{٣}{س٢}$)^{١٢}
- (٣) أوجد الحدين الأوسطين في مفكوك ($\frac{٣}{ص} - \frac{س}{٢}$)^١
- (٤) أوجد معامل س^٤ في مفكوك ($\frac{٣}{س} - \frac{س٢}{٣}$)^{١٢}
- (٥) أوجد معامل س^{١١} في مفكوك ($\frac{١}{س} - \frac{س}{٢}$)^{١٠}
- (٦) أوجد معامل س^٩ في مفكوك ($\frac{١}{س} - س٢$)^{١١}
- (٧) أوجد معامل س^٤ في مفكوك (س - $\frac{١}{س}$)^٨
- (٨) أوجد الحد الخالي من س في مفكوك ($\frac{س}{٣} + \frac{٢}{س}$)^{١٠}
- (٩) أوجد الحد الخالي من س في مفكوك (س - $\frac{١}{س٢}$)^١
- (١٠) أثبت أنه لا يوجد حد خال من س في مفكوك (س^٢ - $\frac{٣}{س}$)^١
- (١١) أوجد معامل س في مفكوك (س + $\frac{١}{س}$)^{١٣}
- (١٢) أثبت أنه لا يوجد حد يحتوي على س^١ في مفكوك ($\frac{س}{٢} - \frac{٣}{س}$)^{١١}
- (١٣) في مفكوك (س + $\frac{٣}{س٢}$)^{١٢} أوجد :
 أولاً : معامل س^١ ثانياً : رتبة الحد الخالي من س
- (١٤) إذا كان أ ، ب هما الحدان الأوسطان في مفكوك (س - $\frac{١}{س}$)^٤ حسب قوي س التنازلية
 فاثبت أن أ + ب س^٢ = صفر
- (١٥) إذا كانت ن عددا صحيحا موجباً فاثبت أنه لا يوجد حد خال من س في مفكوك (س^٥ + $\frac{١}{س}$)^٢
 إلا إذا كانت ن = ٧ و مكرراً للعدد ٧ وأوجد الحد الخالي من س عندما ن = ١٤
- (١٦) اثبت أن مفكوك (س^٢ + $\frac{١}{س}$)^٢ يحتوي على حد خالي من س إذا كانت ن مضاعفاً
 للعدد ٣ - ثم أوجد الحد الخالي من س عندما ن = ١٢

النسبة بين كل حد والسابق له في مفكوك ذات الحدين

$$\therefore \text{ح ر} + ١ = \frac{\text{ن ق ر}}{\text{أ ر س ن-ن-ر}} \text{ ---- (١)}$$

$$\text{ح} = \frac{\text{ن ق ر}}{\text{أ ر س ن-ن-ر} + ١} \text{ ---- (٢) بقسمة (١) على (٢)}$$

$$\therefore \frac{\text{ح ر} + ١}{\text{ح ر}} = \frac{\text{ن ق ر}}{\text{أ ر س ن-ن-ر} + ١} \times \frac{\text{أ ر س ن-ن-ر}}{\text{أ ر س ن-ن-ر}}$$

$$= \frac{\text{أ ر س ن-ن-ر}}{\text{س ن-ن-ر} + ١ - (ن-ن)} \times \frac{١ + ر - ن}{ر}$$

$$\therefore \frac{\text{ح ر} + ١}{\text{ح ر}} = \frac{١}{\text{س}} \times \frac{١ + ر - ٢٠}{ر}$$

$$\underline{\text{أي:}} \quad \frac{\text{الأول}}{\text{الثاني}} \times \frac{١ + ر - ن}{ر} = \frac{\text{ح ر} + ١}{\text{ح ر}}$$

$$\underline{\text{مثلاً:}} \quad \frac{١}{\text{س}} \times \frac{٣ - ن}{٤} = \frac{١}{\text{س}} \times \frac{١ + ٤ - ن}{٤} = \frac{\text{ح} + ٥}{\text{ح}}$$

نتيجته:

$$\frac{\text{معامل الحد الثاني}}{\text{معامل الحد الأول}} \times \frac{١ + ر - ن}{ر} = \frac{\text{معامل ح ر} + ١}{\text{معامل ح ر}}$$

مثال: في مفكوك (٢ + س) ^{١٣} حسب قوي من التصاعدية وجد أن النسبة بين الحد الحادي عشر

والحد العاشر هي ٣ : ١٠ أوجد قيمة س .

الحل

$$\frac{٣}{١٠} = \frac{\text{س}}{٢} \times \frac{١ + ١٠ - ١٣}{١٠} = \frac{\text{ح} + ١١}{\text{ح} + ١٠}$$

$$\therefore \frac{٣}{١٠} = \frac{\text{س}}{٢} \times \frac{٤}{١٠} = \frac{\text{ح} + ١١}{\text{ح} + ١٠}$$

$$\therefore \text{س} = \frac{٣}{٢}$$

مثال: في مفكوك (٥ + ٤ س) بنظرية ذات الحدين حسب قوي س التصاعدي كانت نسبة أحد الحدود إلى الحد السابق له مباشرة كنسبة ١ : ٣ - أوجد رتبة هذين الحدين في المفكوك علماً بأن س = ١

الحل

$$\frac{1}{3} = \frac{4}{5} \times \frac{1+r-16}{r} = \frac{1+r}{r}$$

$$\therefore 12 - 84 = r \quad \therefore r = 5$$

$$\therefore r = 12$$

$$\therefore 12 = (r-7) \quad \therefore r = 19$$

$$17 = 204$$

\therefore الحدان هما ح ١٢ ، ح ١٣

مثال: إذا كانت النسب بين ح ٢ ، ح ٣ في مفكوك (س + ص) تساوي ١ : ٤ وكان الحد الأوسط = ١١٢٠ فلأوجد كلا من س ، ص

الحل

$$\frac{4}{1} = \frac{ص}{س} \times \frac{1+3-8}{3} = \frac{1}{3} \quad \therefore ص = 2س \quad \text{--- (١)}$$

$$ح = 1120 = 1س^2 \quad \text{ومن (١)}$$

$$\therefore 1120 = 1س^2 \times \frac{5 \times 6 \times 7 \times 8}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$$

$$\therefore 1س^4 = 1 \quad \therefore س = 1 \quad \therefore ص = 2$$

مثال : في مفكوك (١ + ٢ س) بنظرية ذات الحدين حسب قوي س التصاعدي وجد في ثلاثة حدود متتالية أن نسبة معاملات أولها إلى ثانيها إلى ثالثها ١ : ٥ : ٢٠ أوجد قيمة ن وكذلك أوجد رتب هذه الحدود الثلاثة .

الحل

نفرض أن الحدود هي ح ر ، ح ١ + ر ، ح ٢ + ر

$$\therefore 2ن - ٧ر = ٢ \quad \text{--- (١)}$$

$$\therefore ن - ٣ر = ٢ \quad \text{--- (٢)}$$

$$\therefore \frac{5}{1} = \frac{2}{1} \times \frac{1+r-ن}{r} = \frac{1+r}{r}$$

$$\therefore \frac{20}{5} = \frac{2}{1} \times \frac{1+(1+r)-ن}{1+r} = \frac{1+r}{r}$$

\therefore الحدود هي ح ١ ، ح ٧ ، ح ٨

من (١) ، (٢) $ر = 6$ ، $ن = 20$

مثال: في مفكوك (١ + م س)^ن إذا كانت نسبة معامل ح^٧ إلى معامل ح^٥ هي ٨ : ٥ ، قيمة معامل

ح^٢ = ١١٢ معامل ح^١ ، فاثبت أن ن = ٨ ثم أوجد قيمة م

الحـسـل

$$\frac{\text{معامل ح}^٧}{\text{معامل ح}^٥} = \frac{\text{معامل ح}^٧}{\text{معامل ح}^١} \times \frac{\text{معامل ح}^١}{\text{معامل ح}^٥} = \frac{\text{معامل ح}^٧}{\text{معامل ح}^٥} = \frac{٨}{٥}$$

$$\therefore (٥ - ن) (٤ - ن) م^٢ = ٤٨ \quad \text{--- (١)}$$

$$\frac{\text{معامل ح}^٢}{\text{معامل ح}^١} = \frac{\text{معامل ح}^٢}{\text{معامل ح}^١} \times \frac{\text{معامل ح}^١}{\text{معامل ح}^١} = \frac{\text{معامل ح}^٢}{\text{معامل ح}^١}$$

$$\therefore ن (١ - ن) م^٢ = ٢٢٤ \quad \text{--- (٢) بقسمة (١) على (٢)}$$

$$\therefore \frac{٣}{١} = \frac{٤٨}{٢٢٤} = \frac{٢٠ + ن^٩ - ن}{ن - ن}$$

$$\therefore ١١ ن^٢ - ١٢٣ ن + ٢٨٠ = ٠ \quad \therefore (٨ - ن) (١١ ن - ٣٥) = ٠$$

$$\therefore ن = ٨ ، ن = \frac{٣٥}{١١} \text{ مرفوض بالتعويض في (١)}$$

$$\therefore ٤٨ = م^٢ \times ٤ \times ٣ \quad \therefore م = ٢ \pm$$

مثال: في مفكوك (٢ س + ص)^ن حسب قوي س التتالية وجد أن ح^٩ ، ح^{١٠} ، ح^{١١} تكون

متتابعة هندسية فما قيمة ن .

الحـسـل

$$\frac{\text{ح}^٩}{\text{ح}^٨} = \frac{\text{ح}^٩}{\text{ح}^٨} \quad \therefore \frac{\text{ح}^٩}{\text{ح}^٨} = \frac{\text{ح}^٩}{\text{ح}^٨}$$

$$\therefore \frac{\text{ص}}{\text{س}^٢} \times \frac{١ + ٤ - ن}{٤} \times \frac{\text{ص}}{\text{س}^٢} \times \frac{١ + ٣ - ن}{٣} = \frac{\text{ص}}{\text{س}^٢} \times \frac{١ + ٤ - ن}{٤} \times \frac{\text{ص}}{\text{س}^٢} \times \frac{١ + ٥ - ن}{٥} \times \frac{٤٤}{٩}$$

$$\therefore \frac{(٣ - ن) (٤ - ن) ٢٢}{١٥} = (١ - ن) (٢ - ن)$$

$$\therefore ١٥ (٢ - ن) = (٢ - ن) (٢٢ - ٧ ن + ١٢)$$

$$\therefore ن = ١٣ \text{ وبعد الاختصار}$$

مثال: إذا كان الحدان الأوسطان في مفكوك (أ س + ب) متساويين أوجد قيمة س علماً بأن ن عدد صحيح موجب .

الحل

الحدان الأوسطان هما ج ن ١٠ ج ن ١٠

$$1 = \frac{b}{a} \times \frac{1 + (1+n) - (1+n^2)}{1+n} \therefore 1 = \frac{2+n}{1+n} \therefore$$

$\therefore \frac{b}{a} = \frac{c}{b}$

مثال: إذا كانت معاملات الحدود الخامس والسلس والسابع في مفكوك $(x+1)^n$ متتابعة حسابية فابعد ن ثم أذكر رتب الحدود الأخرى في المفكوك التي تكون معاملاتنا نفس المتتابعة الحسابية السابقة .

الحاصل

٢ × ق^ن = ق^ن + ق^ن بقسمة الطرفين على ق^ن.

$$\frac{Q_1}{Q_2} + \frac{Q_1}{Q_2} = 2 \therefore$$

$$(4 - n)(5 - n) + 20 = (4 - n)12 \therefore$$

$$\therefore = (14 - n)(7 - n) \therefore \quad \therefore = 98 + n^2 - 21n \therefore$$

$$\therefore n = 7, \quad n = 14$$

$${}_1q^v = {}_1q^v, \quad {}_2q^v = {}_0q^v, \quad {}_3q^v = {}_1q^v$$

∴ الحدود الأخرى هي ح^١ ، ح^٢ ، ح^٣ ،

تمرين (٥)

- (١) إذا كان الحدان الأوسطان في مفكوك (٢س + ٣) متساويين . فما قيمة س .
- (٢) إذا كانت الحدود الثالث والرابع والخامس في مفكوك (س + ص)^٣ هي على الترتيب ١١٥٢٠ ، ١٥٣٦٠ ، ١٣٤٤٠ . أوجد قيمة كل من س ، ص ، ن .
- (٣) إذا كانت الحدود الثاني والثالث والرابع في مفكوك (س + ص)^٣ هي ٧٢٠ ، ٢٤٠ ، ١٠٨٠ . فما قيم س ، ص ، ن .
- (٤) إذا كانت ثلاثة معاملات لحدود متتالية في مفكوك (١ + س)^٣ هي ٢٠ ، ١٩٠ ، ١١٤٠ . فما قيمة ن وما ترتيب تلك الحدود .
- (٥) إذا كانت النسبة بين معاملات ثلاثة حدود متتالية في مفكوك (١ + س)^٣ كنسبة ١٥ : ٢٤ : ٢٨ . فما قيمة ن وما ترتيب هذه الحدود .
- (٦) إذا كانت النسبة بين الحدين الثاني والثالث في مفكوك (١ + ب)^٣ تساوي النسبة بين الحدين الثالث والرابع في مفكوك (١ + ب)^٣ . فما قيمة ن .
- (٧) في مفكوك (١ + م س)^٣ إذا علم أن نسبة معامل الحد الرابع إلى معامل الحد السادس تساوي $\frac{1}{4}$ ونسبة معامل الحد السادس إلى معامل الحد الثامن تساوي $\frac{7}{4}$ فأوجد قيمة كل من م ، ن .
- (٨) في مفكوك (٢س + $\frac{3}{س}$)^٣ كان الحدان التاسع والعاشر متساويين والنسبة بين الحد السادس والحد السابع كنسبة ٨ : ١٥ . فأوجد قيمة ن وأثبت أنه لا يوجد حد خال من س في المفكوك .
- (٩) في مفكوك (٣ + س)^٣ حسب قوي س التنازلية . وجد أن الحد العاشر = $\frac{2}{3}$ الحد التاسع ، ح ١٠ = $\frac{1}{4}$ ح ١١ . أوجد قيمة كل من ن ، س .
- (١٠) في مفكوك (١ + س)^٣ حسب قوي س التصاعدية . وجد أن الحد الرابع = $\frac{25}{3}$ الحد الثاني ، والحد الخامس يساوي الحد السادس . أوجد قيمة كل من ن ، س .

الباب الثاني

الأعداد المركبة

الحاجة إلى توسيع نظم الأعداد الحقيقية :

من دراستنا السابقة تعرفنا على مجموعات الأعداد وهي :

- (١) مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N} = \{ 1, 2, 3, 4, \dots \}$
حيث جمع أو ضرب عددين طبيعيين هو عدد طبيعي
- (٢) مجموعة الأعداد الكلية $\mathbb{K} = \{ 0, 1, 2, 3, \dots \}$
- (٣) مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z} = \{ \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$
وظهرت لتسمح بحلول معادلات في صورة $s + a = b$ حيث a, b أعداد طبيعية . فمثلاً حل المعادلات $s + 7 = 3$ هو $s = 3 - 7$
 $\therefore s = -4$ وهذا الناتج لا يوجد في الأعداد الطبيعية .
- (٤) مجموعة الأعداد النسبية (القياسية) :
 $\mathbb{Q} = \{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \}$
وظهرت لتسمح بحلول معادلات في صورة $as = b$
فمثلاً : حل المعادلة $4s = 9$ هو $s = \frac{9}{4}$ وهذا الناتج لا يوجد في مجموعة الأعداد الصحيحة .
- (٥) مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R} = \{ \text{الأعداد النسبية والغير نسبية} \}$
وظهرت لتسمح بحلول معادلات مثل $s^2 = 2$ $\therefore s = \pm \sqrt{2}$
ورأينا أن أي نظام ينشأ كتوسيع للنظام الذي يسبقه لحل معادلات جديدة لم تكن قابلة للحل في النظام السابق .
مثلاً المعادلة $s^2 + 1 = 0$ أي $s^2 = -1$
فهذه المعادلة غير قابلة للحل في \mathbb{R} (مجموعة الأعداد الحقيقية) حيث لا يمكن إيجاد عدد حقيقي s يحقق المعادلة . لذلك كان التفكير في إيجاد مجموعة جديدة من الأعداد نجد فيها حلاً لمثل هذه المعادلات هذه المجموعة الجديدة تسمى و "مجموعة الأعداد المركبة" .

العدد التخيلي i :

نعلم أن $\sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$ لأنه لا يوجد عدد حقيقي مربعه -1 ونرمز للعدد $\sqrt{-1}$ بالرمز i وهو أول حرف من كلمة تخيلي (غير حقيقي) حيث $i^2 = -1$

قوي العدد :

$$1 = 1' \times 1' = 1' \quad , \quad 1' = 1' \times 1' = 1' \therefore \quad 1 = 1' \therefore$$

وعلي العموم : $b^n = a^n$ حيث n و a و b ، $a^n = b^n$ ، $a = b$

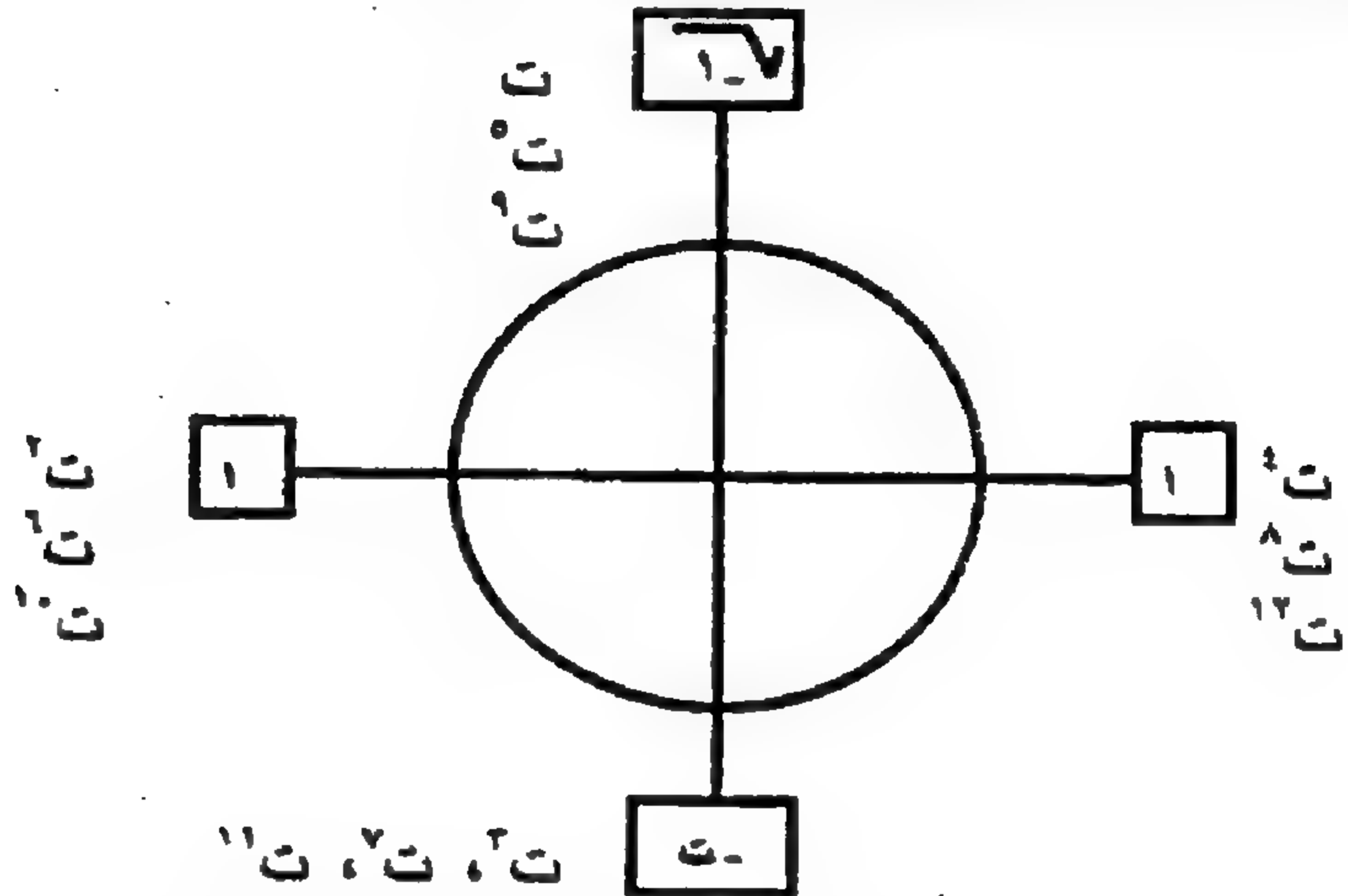
حيث $m = 1, 2, 3$ وهي بواقي قسمة أس (ت) علي ٤

فمثلاً : $t^0 = t^1 + 1$, $t^1 = t^2 + 1$, $t^2 = t^3 + 1$, $t^3 = t^4 + 1$, $t^4 = t^5 + 1$, $t^5 = t^6 + 1$, $t^6 = t^7 + 1$, $t^7 = t^8 + 1$, $t^8 = t^9 + 1$, $t^9 = t^{10} + 1$, $t^{10} = t^{11} + 1$, $t^{11} = t^{12} + 1$, $t^{12} = t^{13} + 1$, $t^{13} = t^{14} + 1$, $t^{14} = t^{15} + 1$, $t^{15} = t^{16} + 1$, $t^{16} = t^{17} + 1$, $t^{17} = t^{18} + 1$, $t^{18} = t^{19} + 1$, $t^{19} = t^{20} + 1$, $t^{20} = t^{21} + 1$, $t^{21} = t^{22} + 1$, $t^{22} = t^{23} + 1$, $t^{23} = t^{24} + 1$, $t^{24} = t^{25} + 1$, $t^{25} = t^{26} + 1$, $t^{26} = t^{27} + 1$, $t^{27} = t^{28} + 1$, $t^{28} = t^{29} + 1$, $t^{29} = t^{30} + 1$, $t^{30} = t^{31} + 1$, $t^{31} = t^{32} + 1$, $t^{32} = t^{33} + 1$, $t^{33} = t^{34} + 1$, $t^{34} = t^{35} + 1$, $t^{35} = t^{36} + 1$, $t^{36} = t^{37} + 1$, $t^{37} = t^{38} + 1$, $t^{38} = t^{39} + 1$, $t^{39} = t^{40} + 1$, $t^{40} = t^{41} + 1$, $t^{41} = t^{42} + 1$, $t^{42} = t^{43} + 1$, $t^{43} = t^{44} + 1$, $t^{44} = t^{45} + 1$, $t^{45} = t^{46} + 1$, $t^{46} = t^{47} + 1$, $t^{47} = t^{48} + 1$, $t^{48} = t^{49} + 1$, $t^{49} = t^{50} + 1$, $t^{50} = t^{51} + 1$, $t^{51} = t^{52} + 1$, $t^{52} = t^{53} + 1$, $t^{53} = t^{54} + 1$, $t^{54} = t^{55} + 1$, $t^{55} = t^{56} + 1$, $t^{56} = t^{57} + 1$, $t^{57} = t^{58} + 1$, $t^{58} = t^{59} + 1$, $t^{59} = t^{60} + 1$, $t^{60} = t^{61} + 1$, $t^{61} = t^{62} + 1$, $t^{62} = t^{63} + 1$, $t^{63} = t^{64} + 1$, $t^{64} = t^{65} + 1$, $t^{65} = t^{66} + 1$, $t^{66} = t^{67} + 1$, $t^{67} = t^{68} + 1$, $t^{68} = t^{69} + 1$, $t^{69} = t^{70} + 1$, $t^{70} = t^{71} + 1$, $t^{71} = t^{72} + 1$, $t^{72} = t^{73} + 1$, $t^{73} = t^{74} + 1$, $t^{74} = t^{75} + 1$, $t^{75} = t^{76} + 1$, $t^{76} = t^{77} + 1$, $t^{77} = t^{78} + 1$, $t^{78} = t^{79} + 1$, $t^{79} = t^{80} + 1$, $t^{80} = t^{81} + 1$, $t^{81} = t^{82} + 1$, $t^{82} = t^{83} + 1$, $t^{83} = t^{84} + 1$, $t^{84} = t^{85} + 1$, $t^{85} = t^{86} + 1$, $t^{86} = t^{87} + 1$, $t^{87} = t^{88} + 1$, $t^{88} = t^{89} + 1$, $t^{89} = t^{90} + 1$, $t^{90} = t^{91} + 1$, $t^{91} = t^{92} + 1$, $t^{92} = t^{93} + 1$, $t^{93} = t^{94} + 1$, $t^{94} = t^{95} + 1$, $t^{95} = t^{96} + 1$, $t^{96} = t^{97} + 1$, $t^{97} = t^{98} + 1$, $t^{98} = t^{99} + 1$, $t^{99} = t^{100} + 1$, $t^{100} = t^{101} + 1$, $t^{101} = t^{102} + 1$, $t^{102} = t^{103} + 1$, $t^{103} = t^{104} + 1$, $t^{104} = t^{105} + 1$, $t^{105} = t^{106} + 1$, $t^{106} = t^{107} + 1$, $t^{107} = t^{108} + 1$, $t^{108} = t^{109} + 1$, $t^{109} = t^{110} + 1$, $t^{110} = t^{111} + 1$, $t^{111} = t^{112} + 1$, $t^{112} = t^{113} + 1$, $t^{113} = t^{114} + 1$, $t^{114} = t^{115} + 1$, $t^{115} = t^{116} + 1$, $t^{116} = t^{117} + 1$, $t^{117} = t^{118} + 1$, $t^{118} = t^{119} + 1$, $t^{119} = t^{120} + 1$, $t^{120} = t^{121} + 1$, $t^{121} = t^{122} + 1$, $t^{122} = t^{123} + 1$, $t^{123} = t^{124} + 1$, $t^{124} = t^{125} + 1$, $t^{125} = t^{126} + 1$, $t^{126} = t^{127} + 1$, $t^{127} = t^{128} + 1$, $t^{128} = t^{129} + 1$, $t^{129} = t^{130} + 1$, $t^{130} = t^{131} + 1$, $t^{131} = t^{132} + 1$, $t^{132} = t^{133} + 1$, $t^{133} = t^{134} + 1$, $t^{134} = t^{135} + 1$, $t^{135} = t^{136} + 1$, $t^{136} = t^{137} + 1$, $t^{137} = t^{138} + 1$, $t^{138} = t^{139} + 1$, $t^{139} = t^{140} + 1$, $t^{140} = t^{141} + 1$, $t^{141} = t^{142} + 1$, $t^{142} = t^{143} + 1$, $t^{143} = t^{144} + 1$, $t^{144} = t^{145} + 1$, $t^{145} = t^{146} + 1$, $t^{146} = t^{147} + 1$, $t^{147} = t^{148} + 1$, $t^{148} = t^{149} + 1$, $t^{149} = t^{150} + 1$, $t^{150} = t^{151} + 1$, $t^{151} = t^{152} + 1$, $t^{152} = t^{153} + 1$, $t^{153} = t^{154} + 1$, $t^{154} = t^{155} + 1$, $t^{155} = t^{156} + 1$, $t^{156} = t^{157} + 1$, $t^{157} = t^{158} + 1$, $t^{158} = t^{159} + 1$, $t^{159} = t^{160} + 1$, $t^{160} = t^{161} + 1$, $t^{161} = t^{162} + 1$, $t^{162} = t^{163} + 1$, $t^{163} = t^{164} + 1$, $t^{164} = t^{165} + 1$, $t^{165} = t^{166} + 1$, $t^{166} = t^{167} + 1$, $t^{167} = t^{168} + 1$, $t^{168} = t^{169} + 1$, $t^{169} = t^{170} + 1$, $t^{170} = t^{171} + 1$, $t^{171} = t^{172} + 1$, $t^{172} = t^{173} + 1$, $t^{173} = t^{174} + 1$, $t^{174} = t^{175} + 1$, $t^{175} = t^{176} + 1$, $t^{176} = t^{177} + 1$, $t^{177} = t^{178} + 1$, $t^{178} = t^{179} + 1$, $t^{179} = t^{180} + 1$, $t^{180} = t^{181} + 1$, $t^{181} = t^{182} + 1$, $t^{182} = t^{183} + 1$, $t^{183} = t^{184} + 1$, $t^{184} = t^{185} + 1$, $t^{185} = t^{186} + 1$, $t^{186} = t^{187} + 1$, $t^{187} = t^{188} + 1$, $t^{188} = t^{189} + 1$, $t^{189} = t^{190} + 1$, $t^{190} = t^{191} + 1$, $t^{191} = t^{192} + 1$, $t^{192} = t^{193} + 1$, $t^{193} = t^{194} + 1$, $t^{194} = t^{195} + 1$, $t^{195} = t^{196} + 1$, $t^{196} = t^{$

وبلاحظ أن : قويات الزوجية كميات حقيقية مثل ت^١ ، ت^٢ ، ت^٣

وقوي ت القردية كميات تخيلية مثل ت ، ت^٢ ، ت^٣

ومن المفيد تذكر هذا الرسم الذي يبين أن دورة رباعية



مثال: أكتب في أبسط صورة ت^١، ت^٢، ت^٣، ت^٤، ت^٥.

الحل

$$t = {}^1 + {}^2 \cdot t = {}^2 t, \quad 1 = {}^0 ({}^1 t) = {}^2 t$$

$$t_1 = t_1' + t_2' t_1 = t_1', \quad 1_1 = 1_1' + 1_2' 1_1 = 1_1'$$

$$1_{-} = {}^1\tau = {}^2 + {}^4\tau = {}^0\tau, \quad 1_{+} = {}^1\tau = {}^1({}^1\tau) = {}^2\tau$$

مجموعة الأعداد التخيلية () :

مجموعة الأعداد التخيلية = {ع:ع = ص ت، ص و ح، ت = ١-}

أي كل عدد بالصورة ص ت مثل ٣٢ ت ، ٥٥ ت ، ٧- ، ٧ ، ٣٢ ت ،

يسمى عدد تخيلي وينتمي إلى هذه المجموعة وأي عدد بالصورة $\sqrt{-1}$ حيث a عدد حقيقي موجب

هو عدد تخيلي ويكتب بالصورة ص ت مثل :

$$\sqrt[n]{\sqrt[n]{v}} = \sqrt[n]{v}, \quad \sqrt[n]{\sqrt[n]{v}} = \sqrt[n]{v}$$

∴ العدد التخيلي هو الجذر التربيعي لعدد حقيقي سالب .

مجموعة الأعداد المركبة

يعرف العدد المركب بأنه العدد الذي يمكن وضعه على الصورة $E = S + T \cdot V$ حيث S, V عدنان حقيقيان . وتسمى S الجزء الحقيقي للعدد المركب E وتسمى V الجزء التخيلي للعدد المركب E . وتسمى الصورة الجبرية للعدد المركب E .

فإذا كان $V = 0$ فإن العدد $E = S$ يكون حقيقياً صرفاً

فإذا كان $S = 0$ فإن العدد $E = T \cdot V$ يكون تخيلياً صرفاً

كما يمكن كتابة العدد المركب E على هيئة زوج مرتب يكون العنصر الأول فيه هو الجزء الحقيقي والعنصر التالي هو الجزء التخيلي للعدد المركب .

$$E = (S, V) \text{ حيث } S, V \in \mathbb{C}$$

وتسمى الصورة $E = (S, V)$ الصورة الكارتيزية .

∴ العدد المركب هو الكمية التي تتكون من جزأين أحدهما حقيقي والآخر تخيلي .

ومجموعة الأعداد المركبة يمكن كتابتها بالصورة :-

$$K = \{ E : E = S + T \cdot V, S, V \in \mathbb{C} \}$$

مثال : حل المعادلة $S^2 - 2S + 2 = 0$

الحل

∴ حل المعادلة $AS^2 + BS + C = 0$ هو

$$S = \frac{-B \pm \sqrt{\text{المميز}}}{2A} \text{ حيث المميز} = B^2 - 4AC$$

$$\therefore A = 1, B = -2, C = 2, \text{ المميز} = (-2)^2 - 4(1)(2) = 4 - 8 = -4$$

∴ المميز < 0 ، ∴ يوجد حلان \in إلى مجموعة الأعداد المركبة وهما

$$S = \frac{-(-2) \pm \sqrt{-4}}{2(1)} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$$

∴ الحلون هي $\{ 1+i, 1-i \}$

نظام الأعداد المركبة

■ تعريف تساوي عددين مركبين :-

- (١) يقال للعددين المركبين $s + t$ و $s + t$ أنهما متساويان إذا كان $s = s$ ، $t = t$ أي جزأيهما الحقيقيان يتساويان وجزأيهما التخيليان يتساويان أيضا.
- أي أنه إذا كان $s + t = s + t$ ($s = s$ ، $t = t$)
- ، $s + t = s + t$ ($s = s$ ، $t = t$)
- وكانت $s + t = s + t$ فإن $s = s$ ، $t = t$
- (٢) إذا كان $s + t = s + t$ فإن $s = s$ ، $t = t$
- بمعنى إذا أنعدم مقدار تخيلي مركب فإن الجزء الحقيقي ينعدم على حده والجزء التخيلي ينعدم أيضا على حده .

مثال: أوجد قيمة s ، t الحقيقية التي تحقق المعادلة :

$$(1 + 2t) - s = (2 + 3t) - (1 - 4t)$$

الحل

نضع الطرف الأيمن على صورة عدد مركب

$$\therefore s + 2t - 2 - 3t = 1 - 4t$$

$$(s - 2) + (2t - 3t) = 1 - 4t$$

$$\therefore s - 2 = 1 - 4t \quad (1) \quad , \quad 2t - 3t = 1 - 4t \quad (2)$$

بضرب طرفي المعادلة (١) في (٢)

$$\therefore s - 2 = 1 - 4t \quad \text{وبالجمع مع (٢)}$$

$$s - 2 = 1 - 4t$$

$$\therefore s = 1$$

$$s = 1 \quad \text{بالتعويض في (١)}$$

مثال: إذا كان $s + t = s + t$ أثبت أن : $s = s$ ، $t = t$ ، ب أعداد حقيقية.

الحل

$$\therefore s + t = s + t$$

∴ (س-أ) = ت (ب-ص) بتربيع الطرفين

∴ (س-أ)² = (ب-ص)²

∴ (س-أ)² + (ب-ص)² = ٠

∴ لا يوجد عدنان حقيقيان مجموع مربعيهما = صفر

∴ س-أ = ٠ ∴ س = أ

∴ ب-ص = ٠ ∴ ب = ص

تعريف مجموع عددين مركبين :-

(أ) إذا كان العددين علي الصورة العامة للأعداد المركبة :

$$(س١ + ت١ص١) + (س٢ + ت٢ص٢) = (س١ + س٢) + (ت١ + ت٢)ص$$

اي نجمع الجزأين الحقيقيين معاً والجزأين التخيليين معاً .

مثلاً :

$$\text{إذا كان } ١ع + ٢ت = ١ع + ٢ت ، ٤-ت = ٤-ت$$

$$\text{فإن : } ١ع + ٢ع = (١-٢) + (٤+٢) = ٢ع + ٦ت$$

$$١ع - ٢ع = ٢ع - ١ع = (٢ع-) + ١ع = ٢ع - ١ع$$

$$= ٢ + ٣ت + (٤-٢) = (١+٢) + ٤-٢ = ٤+٢ت$$

(ب) إذا كان العددين علي صورة الزوج المرتب :

$$\text{إذا كان } ١ع = (س١ ، ص١) ، ٢ع = (س٢ ، ص٢) \text{ فإن :}$$

$$١ع + ٢ع = (س١ + س٢ ، ص١ + ص٢)$$

مثلاً :

$$١ع = (١ ، ٢) ، ٢ع = (٠ ، ٠)$$

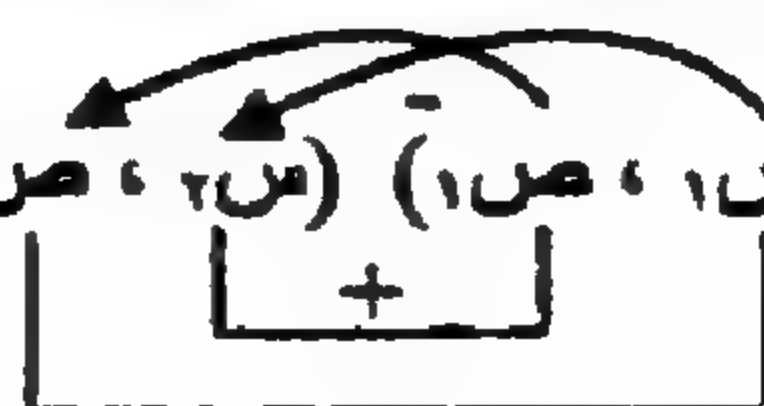
$$\text{فإن : } ١ع + ٢ع = (١ + ٠ ، ٢ + ٠) = (١ ، ٢)$$

$$١ع - ٢ع = (١ - ٠ ، ٢ - ٠) = (١ ، ٢)$$

تعريف حاصل ضرب عددين مركبين :-

(أ) إذا كان العددين علي صورة الزوج المرتب :

$$(س١ ، ص١) (س٢ ، ص٢) = (س١س٢ - ص١ص٢ ، س١ص٢ + ص١س٢)$$



$$\text{مثلاً : } (٢ ، ٢) (١- ، ٤) = (١- \times ٢ - ٤ \times ٢ ، ١- \times ٢ + ٤ \times ٢)$$

$$= ٨ + ٢- ، ٢ + ١٢ = (١٠ ، ١٤)$$

(ب) إذا كان العددين علي الصورة العامة للأعداد المركبة:

$$١٤ . ٢٤ = (١س + ١ت ص) (١س + ٢ت ص)$$

تتبع نفس قواعد حاصل ضرب المقادير الجبرية مع اختصار قوي ت

مثلاً : إذا كانت $١٤ = ٢ + ٣ت$ ، $٢٤ = ٥ + ٤ت$

فإن $٢ + ٣ت$

$$٥ + ٤ت$$

$$١٠ + ١٥ت$$

$$٨ت + ١٢ت^٢$$

$$١٠ + ٢٣ت = (١٠ - ١)١٢ + ٢٣ت$$

تمارين (٦)

■ اختصر إلى أبسط صورة :-

(١) $(١٦\sqrt{٧} - ٥) + (٤\sqrt{٧} + ٥)$

(٢) $(٣٦\sqrt{٧} + ٣)(٢٥\sqrt{٧} - ٢)$

(٣) $(٢ - ٣ت)(٢ - ٢ت)$

(٤) أجمع $ت + ٢ت + ٣ت$ إلى ٢١ حداً

■ أوجد قيمة كل من س ، ص الحقيقية

(٥) $(١ + ٢ت)س + ٣(١ - ت)ص = ٩$

(٦) $س + صت = (١ + ت)^٢$

■ أوجد الناتج علي صورة عدد مركب

(٧) $(١ + ت)^٢ - (١ - ت)^٢$ أوجد العدد المركب الذي يساوي

(٨) إذا كان $ص + ٩ - ٢س = (١ + ت) - (٣س - ٢ت) = ٠$ حيث $س ، ص$ ح فأوجد

قيمة كل من $س ، ص$

(٩) إذا كان $١٤ = \frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}ت$ ، $٢٤ = \frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}ت$ فاثبت ان : $١٤ = ٢٤$

(١٠) حل المعادلة :

$$٠ = ٥ + س^٢$$

خصائص عملية جمع الأعداد المركبة

(١) عملية الجمع على الأعداد المركبة عملية تبديلية فإن كان :

$$١ع = ١س + ١ت ص ، ٢ع = ٢س + ٢ت ص \text{ فإن:}$$

$$١ع + ٢ع = (١س + ١ت ص) + (٢س + ٢ت ص) = (١س + ٢س) + (١ت + ٢ت ص) = ٣س + ٣ت ص$$

$$= (١س + ٢س) + (١ت + ٢ت ص) = ٣س + ٣ت ص = ٣ع$$

(٢) عملية جمع الأعداد المركبة تنسقية (تجميعية):

$$\text{إذا كان } ١ع = ١س + ١ت ص ، ٢ع = ٢س + ٢ت ص \text{ فإن:}$$

$$١ع + (٢ع + ٣ع) = (١ع + ٢ع) + ٣ع$$

(٣) العدد صفر هو المحايد الجمعي للأعداد المركبة :

$$\text{صفر} + ع = ع = ع + \text{صفر}$$

(٤) لكل عدد مركب ع معكوس جمعي (-ع) بحيث ع + (-ع) = صفر

$$\text{فإذا كان } ع = س + ت ص \text{ فإن } -ع = -س - ت ص$$

خصائص عملية ضرب الأعداد المركبة

(١) عملية ضرب الأعداد المركبة إبدالية:

$$١ع \cdot ٢ع = ٢ع \cdot ١ع \text{ لكل } ١ع ، ٢ع \in \mathbb{C}$$

(٢) عملية الضرب تجميعية (تنسقية):

$$(١ع \cdot ٢ع) \cdot ٣ع = ١ع \cdot (٢ع \cdot ٣ع) \text{ لكل } ١ع ، ٢ع ، ٣ع \in \mathbb{C}$$

(٣) وجود العنصر المحايد:

$$١ \times ع = ع \times ١ = ع \text{ لكل } ع \in \mathbb{C}$$

(٤) إذا فرض أن ع = س + ت ص فبانه يوجد معكوس ضربي يساوي

$$\frac{س}{س^2 + ت^2} - \frac{ت ص}{س^2 + ت^2}$$

$$\text{ونرمز له بالرمز } ع^{-١} \text{ ، } ع^{-١} \cdot ع = ١ \text{ لكل } ع \in \mathbb{C}$$

(٥) عملية الضرب تتوزع على عملية الجمع في ك

$$١ع \cdot (٢ع + ٣ع) = (١ع \cdot ٢ع) + (١ع \cdot ٣ع) \text{ لكل } ١ع ، ٢ع ، ٣ع \in \mathbb{C}$$

ملاحظة:

$$\text{المحايد الضربي معكوسة نفسه } ع = (٠، ١) \text{ فإن } ع^{-١} = \frac{١}{٠ + ١} = ١$$

قسمة عدد مركب علي آخر:

$$(أ، ب) = ١٤، (ج، د) = ١٤$$

$$\therefore (أ، ب) = \frac{١٤}{١٤} = ١$$

$$(أ، ب) = \left(\frac{أ-ج}{ج+د}، \frac{ب-د}{ج+د} \right) = \left(\frac{أ-ج}{ج+د}، \frac{ب-د}{ج+د} \right) =$$

$$\frac{١-١}{١٤}، \frac{١٨-١٨}{١٤} = \left(\frac{٢ \times ٢ - ٤ \times ٢}{٩ + ١٦}، \frac{٢ \times ٢ + ٤ \times ٢}{٩ + ١٦} \right) = \frac{(٢، ٢)}{(٢، ٤)}$$

مثال: أوجد قيمة $\sqrt{١٢-٥}$ ت

الحل

نفرض $\sqrt{١٢-٥} = ص + ت$ بتربيع الطرفين

$$\therefore (ص - ت) = ١٢ - ٥ = ٧$$

$$\therefore ص - ت = ٧ \quad (١)$$

$$\therefore ص = ٧ + ت$$

$$\text{لكن } (ص + ت) = ١٢ = (٧ + ت) + ت = ١٢$$

$$\therefore ١٨ = ١٢ + ٥ = ١٧ \quad \therefore ص = ٢، ت = ١$$

$$\therefore \sqrt{١٢-٥} = ٢ \pm ١$$

مثال: إذا كان ع عدداً مركباً في المعادلة $(٢، ١) + ع(٢، ١) = \frac{(٦، ٤)}{(١، ١)}$

الحل

$$\therefore \frac{١ \times ٤ - ١ \times ٦}{(١) + (١)}، \frac{١ \times ٦ + ١ \times ٤}{(١) + (١)} = (٢، ١) + ع(٢، ١)$$

$$(١، ٥) = \left(\frac{٢}{٢}، \frac{١٠}{٢} \right) =$$

$$\therefore (٢، ٤) = (٢، ١) - (١، ٥) = ع(٢، ١)$$

$$\therefore ع = \frac{(٢، ٤)}{(٢، ١)} = \frac{٨-٢}{٥}، \frac{٦+٤}{٥} = \frac{(٢، ٤)}{(٢، ١)}$$

مثال:

إذا كانت $s = (2, 1)$ ، $v = (4, 3)$ ، $e = (1, 7)$ حيث s, v, e أعداد مركبة أثبت أن :

$$(0, 2, 4) = \frac{0}{s} - \frac{20}{e} + \frac{1}{s}$$

الحل

الطرف الأيمن: $1(s^{-1}) + 20(e^{-1}) - 0(s^{-1})$

$$\therefore \left(\frac{4}{20}, \frac{3}{20}\right) 0 - \left(\frac{1}{0}, \frac{7}{0}\right) 20 + \left(\frac{2}{0}, \frac{1}{0}\right)$$

$$\left(\frac{4 \times 0}{20}, \frac{3 \times 0}{20}\right) - \left(\frac{20}{0}, \frac{140}{0}\right) + \left(\frac{2}{0}, \frac{1}{0}\right)$$

$$\left(\frac{4}{0}, \frac{3}{0}\right) 0 - \left(\frac{20}{0}, \frac{14}{0}\right) + \left(\frac{2}{0}, \frac{1}{0}\right)$$

$$(0, 20, 4) = (0, 12) = \left(\frac{4}{0}, \frac{3}{0}\right) - \left(\frac{4}{0}, \frac{10}{0}\right)$$

مثال: إذا كان $e = s + t$ حيث $s \neq 0, t \neq 0$ فاثبت أن :

$$e^{-1} = \frac{s}{s+t} - \frac{t}{s+t}$$

الحل

الفكرة هي إثبات أن $e \times e^{-1} = 1$ (المحايد الضربي)

$$\therefore e \times e^{-1} = (s + t) \left(\frac{s}{s+t} - \frac{t}{s+t} \right)$$

$$= \left(\frac{s \times s}{s+t} + \frac{s \times (-t)}{s+t} \right) + \left(\frac{t \times s}{s+t} + \frac{t \times (-t)}{s+t} \right)$$

$$= \frac{s^2 - st + st - t^2}{s+t} = \frac{s^2 - t^2}{s+t} = 1 \text{ --- (1)}$$

$$\therefore \text{الضرب عملية إيدالية} \quad \therefore e \times e^{-1} = 1 \text{ --- (2)}$$

من (1)، (2) يثبت المطلوب

مثال: إذا كان الزوج المرتب (a, b) يعبر عن $a + b$ وكان $e = (2, \sqrt{3})$

$$e = (2, \sqrt{3}) \text{ فلو وجد كلا من } e + e, e \times e,$$

الحل

$$(0, 5) = (\sqrt{3}, 2) + (\sqrt{3}, 3) = 2\sqrt{3} + 3$$

$$(\sqrt{3}, 2)(\sqrt{3}, 3) = 2\sqrt{3} \cdot 3 = 6\sqrt{3}$$

$$= 1\text{س} - 2\text{ص} + 1\text{ص} - 2\text{س} + 1\text{ص} + 2\text{س} = 1\text{ص} - 1\text{س}$$

$$(\sqrt{3}, 9) = \sqrt{3} \cdot 2 - \sqrt{3} \cdot 3 + 2 + 6 = 2 - 3 + 8 = 7$$

العدد المرافق لعدد مركب

إذا كان العدد المركب $E = س + ت ص$ فإن العدد المركب $E = س - ت ص$ يسمى

مرافق العدد E

• لاحظ أن العدد المركب E ، مرافقه \bar{E} لا يختلفان إلا في إشارة الجزء التخيلي منهما.

مثلاً: العدد $3 + 4ت$ مرافقه $3 - 4ت$ ، مرافق العدد 3 هو نفسه

∴ العددين المركبان المترافقان :

(أ) جزأهما الحقيقيان متساويان .

(ب) جزأهما التخيليان مختلفان في الإشارة فقط .

خواص العددين المترافقان :

(١) مجموع عددين مترافقين هو عدد حقيقي قيمته ضعف الجزء الحقيقي لأيهما .

فإذا كان $E = س + ت ص$ فإن $\bar{E} = س - ت ص$

∴ $E + \bar{E} = س + ت ص + س - ت ص = 2س =$ عدد حقيقي .

(٢) حاصل ضرب أي عددين مركبين مترافقين = عدد حقيقي

لأن $E \times \bar{E} = (س + ت ص)(س - ت ص) = س^2 - ت^2 ص^2 = س^2 + ت^2 ص^2 =$ عدد حقيقي

قيمته مربع الجزء الحقيقي + مربع الجزء التخيلي .

(٣) الفرق بين العددين المركبين المترافقين عدد تخيلي.

(٤) المرافق لمجموع عددين مركبين = مجموع مرافقيهما

$$\text{أي } \overline{E_1 + E_2} = \overline{E_1} + \overline{E_2}$$

(٥) المرافق لحاصل ضرب عددين مركبين يساوي حاصل ضرب مرافقيهما

$$\text{أي أن : } \overline{E_1 \times E_2} = \overline{E_1} \times \overline{E_2}$$

(٦) المرافق لخارج قسمة عددين مركبين يساوي خارج قسمة مرافقيهما

$$\text{أي : } \overline{E_1 \div E_2} = \overline{E_1} \div \overline{E_2}$$

ملاحظة:

$$\frac{1}{ع} = \left(\frac{1}{ع} \right) \quad ، \quad ع = (ع) \quad ،$$

مثال: إذا كانت $ع^{-1} = (1, 3)$ فإن $ع = \dots$

الحل

$$\begin{aligned} \because ع^{-1} = (1, 3) \quad \therefore ع^{-1}(1, 3) = ع \\ \left(\frac{1}{1}, \frac{3}{1} \right) = \end{aligned}$$

مثال: إذا كان $(ص، س)$ عدداً مركباً وكان $(ص، س) = \frac{(2, 3)}{(2, 3)}$ فإن $ص = \dots$ ، $س = \dots$

الحل

$$\therefore (ص، س) = \frac{(2, 3)}{(2, 3)} = \left(\frac{2-4}{13}, \frac{3+6}{13} \right)$$

$$\therefore (ص، س) = \left(\frac{5-}{13}, \frac{12}{13} \right)$$

$$\therefore س = \frac{12}{13} \quad ، \quad ص = \frac{5-}{13}$$

مثال: أوجد $\sqrt{\frac{ت+7-}{ت+1}}$

الحل

نفرض المقدار $ص + ت = س$ ثم بالتربيع للطرفين

$$\therefore \frac{ت+7-}{ت+1} \times \frac{ت-1}{ت-1} = 3- + 4 = ت$$

$$\therefore س^{-1} - ص^{-1} = 3- \quad \text{--- (1)}$$

$$، \quad 4 = ص = س \quad \text{--- (2)} \quad ، \quad \because س^{-1} + ص^{-1} = 9\sqrt{16} = 5$$

$$\therefore س = 1 \pm \quad ، \quad ص = 2 \pm$$

مثال: أوجد قيمة $ص^{-1} + س^{-1}$ إذا كان $ص + ت = \frac{ت-3}{ت+3}$

الحل

$$\frac{12.5}{13} = \frac{ت-3}{ت+3} \times \frac{ت-3}{ت+3} = \text{الطرف الأيسر}$$

$$\therefore ص + ت = \frac{12.5}{13} = \frac{5}{13} - \frac{12}{13} = ت$$

$$\therefore \text{س} = \frac{5}{13} , \text{ص} = \frac{12}{13}$$

$$\therefore \text{س} + \text{ص} = \frac{144}{169} + \frac{25}{169} = 1$$

مثال: حل المعادلة $(2, 1) + ع = (2, 3) = (2, 4)$ حيث ع عدد مركب

الحل

$$(2, 1) + ع = (2, 3) - (2, 4) = ع$$

$$\therefore ع = \frac{(2, 1)}{(2, 4)} = \left(\frac{2-4}{2-4}, \frac{1-4}{2-4} \right) = \left(\frac{2}{2}, \frac{3}{2} \right)$$

مثال: أوجد قيمتي (س، ص) الحقيقيتين:

$$\frac{ت^2 + 1}{ت - 2} = \frac{(ت + 1)(ت^2 + 2س + ص)}{ت - 3}$$

الحل

بضرب الطرفين في $(ت - 3)(ت - 2)$

$$\therefore (ت + 1)(ت - 2)(ت^2 + 2س + ص) = (ت^2 + 1)(ت - 3)$$

$$\therefore \frac{(ت + 1)(ت^2 + 2س + ص)}{(ت - 2)(ت + 1)} = \frac{(ت^2 + 1)(ت - 3)}{(ت - 2)(ت + 1)}$$

$$= \frac{ت^2 + 2س + ص}{ت - 2} = \frac{ت^3 - 3ت^2 + ت - 3}{ت^2 + ت - 2}$$

$$\therefore \frac{ت^3 - 3ت^2 + ت - 3}{ت^2 + ت - 2} = \frac{ت^3 - 3ت^2 + ت - 3}{ت^2 + ت - 2} = 2س + ت + 1$$

$$= \frac{(ت + 2)10}{10} = \frac{ت10 + 20}{10}$$

$$\therefore \text{س} = 2 , \text{ص} = 1 , \text{س} = 1$$

مثال: إذا كان $(أ + ب ت) (ت + 1) = 5 - ت$ حيث $ت = \sqrt{1}$ فأوجد القيمتين لكل من أ، ب

الحل

$$\therefore (أ + ب ت) (ت + 1) = 5 - ت$$

$$\therefore (أ + ب ت) (ت + 1) = 5 - ت$$

$$\therefore (أ + ب ت) (ت + 1) = 5 - ت$$

$$\therefore أ - ب = 5 \quad (1)$$

$$\therefore أ + ب = 1 \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore أ = 3 , ب = 2$$

مثال: إذا كان (٢-) أحد جذري المعادلة $x^2 + 4x + 17 = 26$ ، فأوجد الجذرين الآخرين وأثبت أنهما مترافقان .

$$\begin{array}{r} \text{الحل} \\ \begin{array}{r} x^2 + 4x + 17 \\ \hline x^2 + 4x + 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} x^2 + 4x + 17 = 26 \\ \hline x^2 + 4x + 3 = 0 \\ \hline 14 = 0 \\ \hline 14 = 0 \\ \hline 0 \end{array} \end{array}$$

$$\therefore (x+2)(x^2+2x+13) = 0 \quad \text{إما } x = -2$$

$$\text{أو } x^2 + 2x + 13 = 0$$

$$\therefore x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 1 \times 13}}{2} \quad \text{حيث } 1 = a, 2 = b, 13 = c$$

$$\frac{-2 \pm \sqrt{4 - 52}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-48}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 \times 12}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}$$

\therefore الجذران $-1 + \sqrt{3}$ ، $-1 - \sqrt{3}$ مترافقان

مثال: إذا كان $L = \frac{6+8}{t+3}$ ، $M = \frac{12-14}{t^2-5}$ أثبت أن L ، M مترافقان
ثم احسب قيمة $\frac{L^2 - M^2}{L - M}$

$$\begin{array}{r} \text{الحل} \\ L + 3 = \frac{6 + 8t + 24}{1 + 9} = \frac{(t-3)(t+8)}{(t-3)(t+3)} = L \\ t - 3 = \frac{42 + 34t - 60}{9 + 25} = \frac{(t^2+5)(12-14)}{(t^2+5)(t^2-5)} = M \end{array}$$

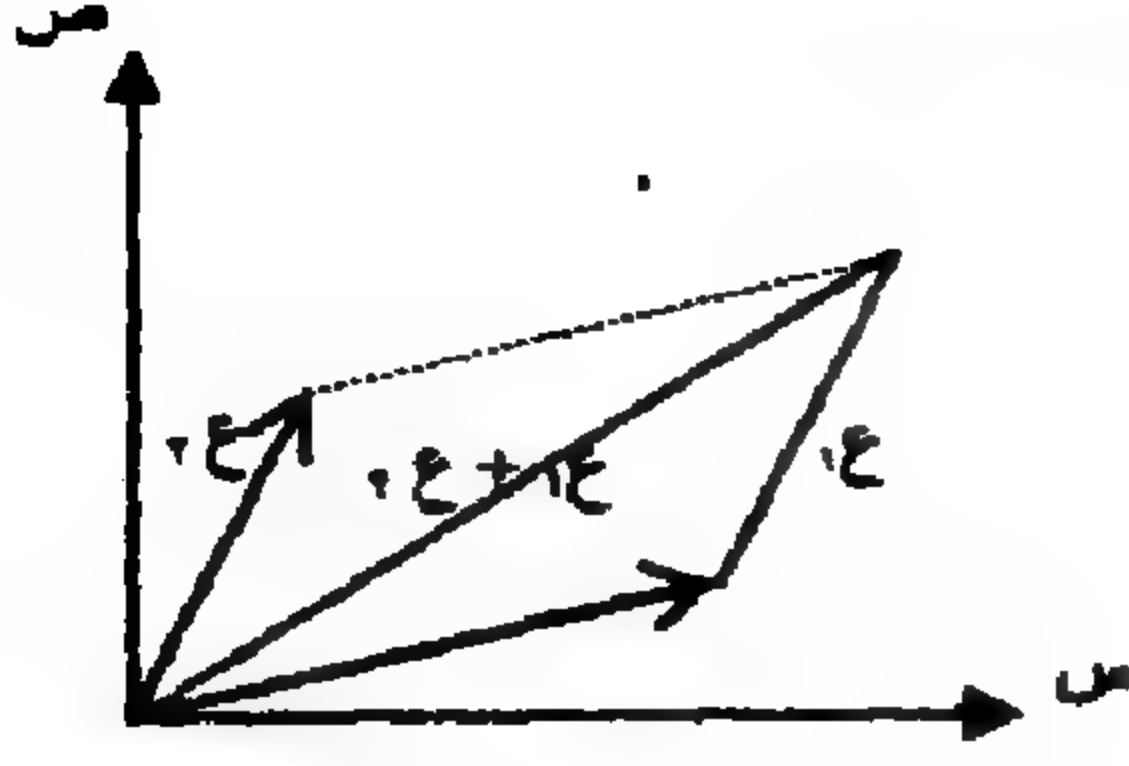
$$L + M = 6, \quad L - M = 10$$

$$\therefore \frac{L^2 - M^2}{L - M} = \frac{(L+M)(L-M)}{(L-M)} = L+M = 6$$

$$26 = 10 - 36 =$$

المعنى الهندسي لجمع وطرح الأعداد المركبة

(١) الجمع:-



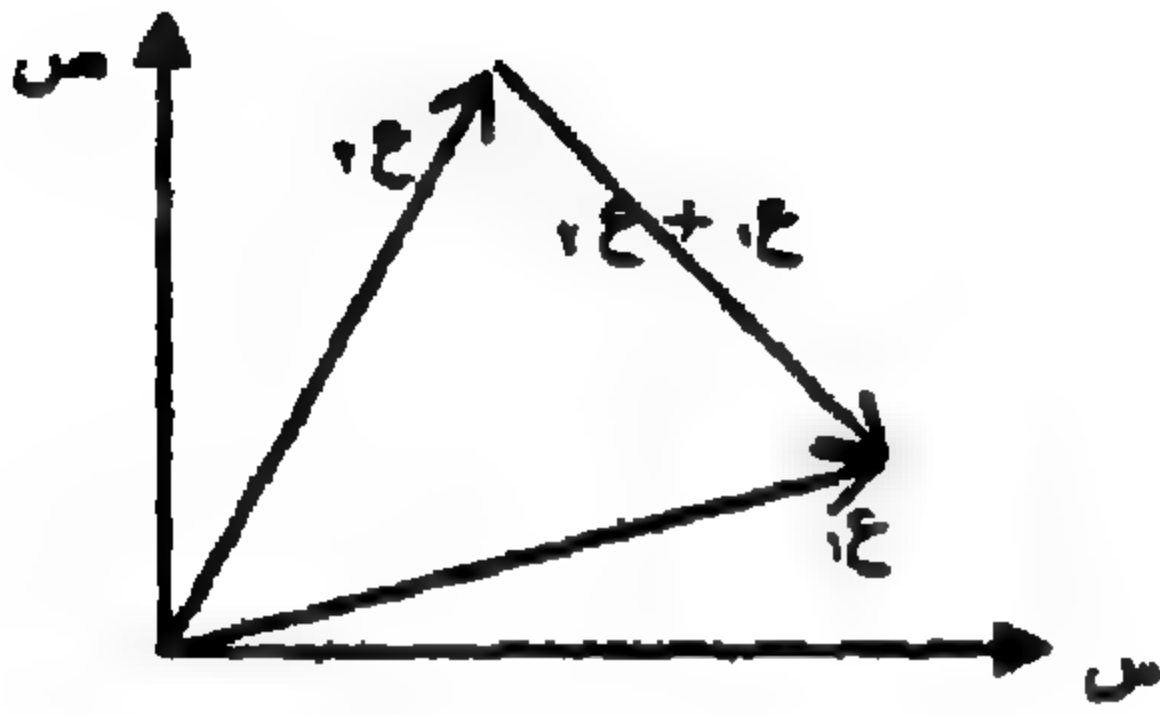
مثلاً : $١ع = (٢, ٦)$

$٢ع = (٤, ٢)$

$\therefore ١ع + ٢ع = (٦, ٤) = (٤, ٢) + (٢, ٦)$

$(٦, ٤) =$

(٢) الطرح:



مثلاً : $١ع = (٢, ٤)$

$٢ع = (٣, ٢)$

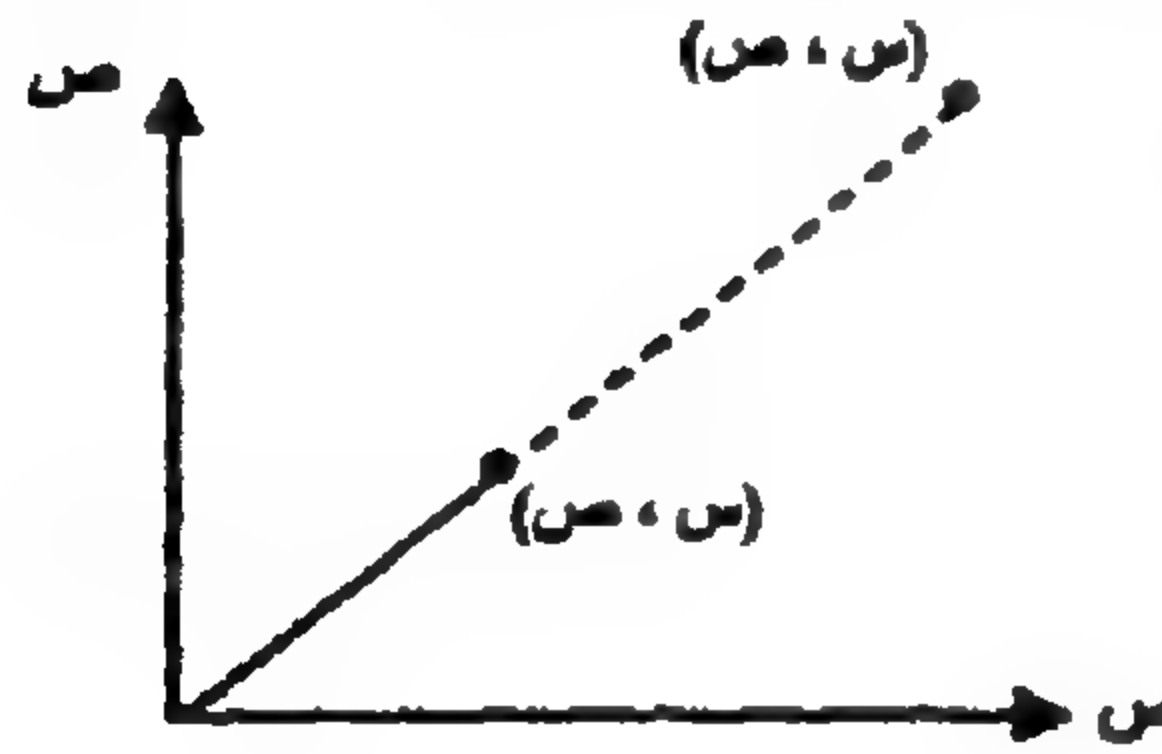
$\therefore ١ع - ٢ع = (٥, ٦) = (٥, ٢) - (٢, ٤)$

$(٥, ٦) = (٥, ٢) + (٢, ٤)$

$(٥, ٦) =$

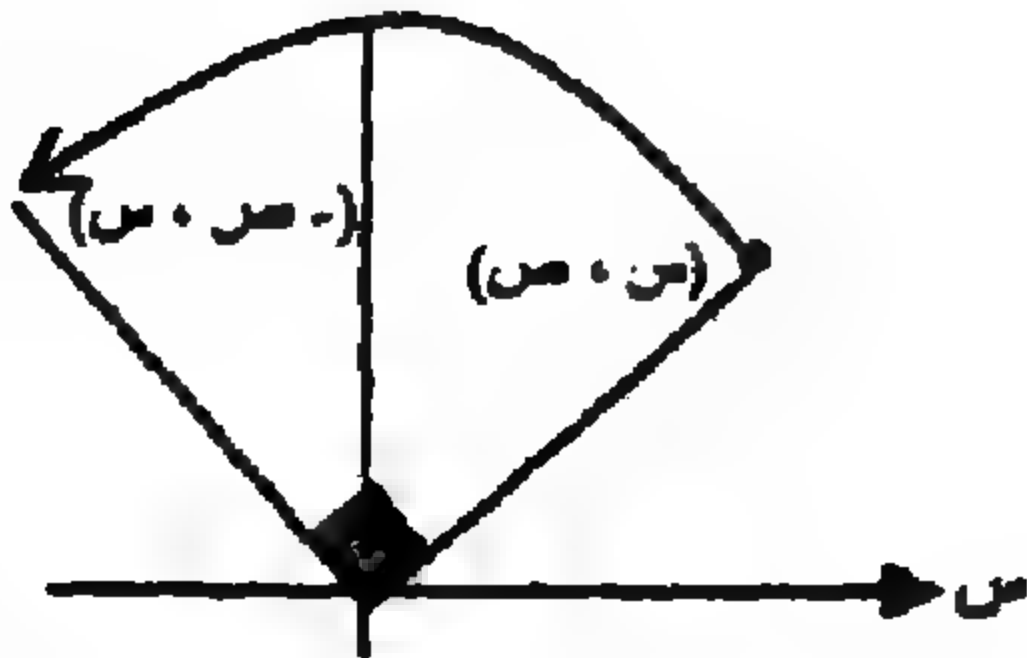
المعنى الهندسي لضرب عددين مركبين

(١) ضرب عدد حقيقي ك في عدد مركب $ع = س + ت ص$



(أ) إذا كان $ك < ٥$ (موجب)

(٢) عند ضرب ت في عدد مركب $ع = س + ت ص$



$ت (س + ص) = ت س + ت ص = ص - ص = ص - ص + ت س$

أي تتحول النقطة $(س, ص)$ إلى النقطة $(س-ص, ص-ص)$

وهو دوران موجب بزاوية ٩٠° في الإتجاه الموجب

حول نقطة الأصل.

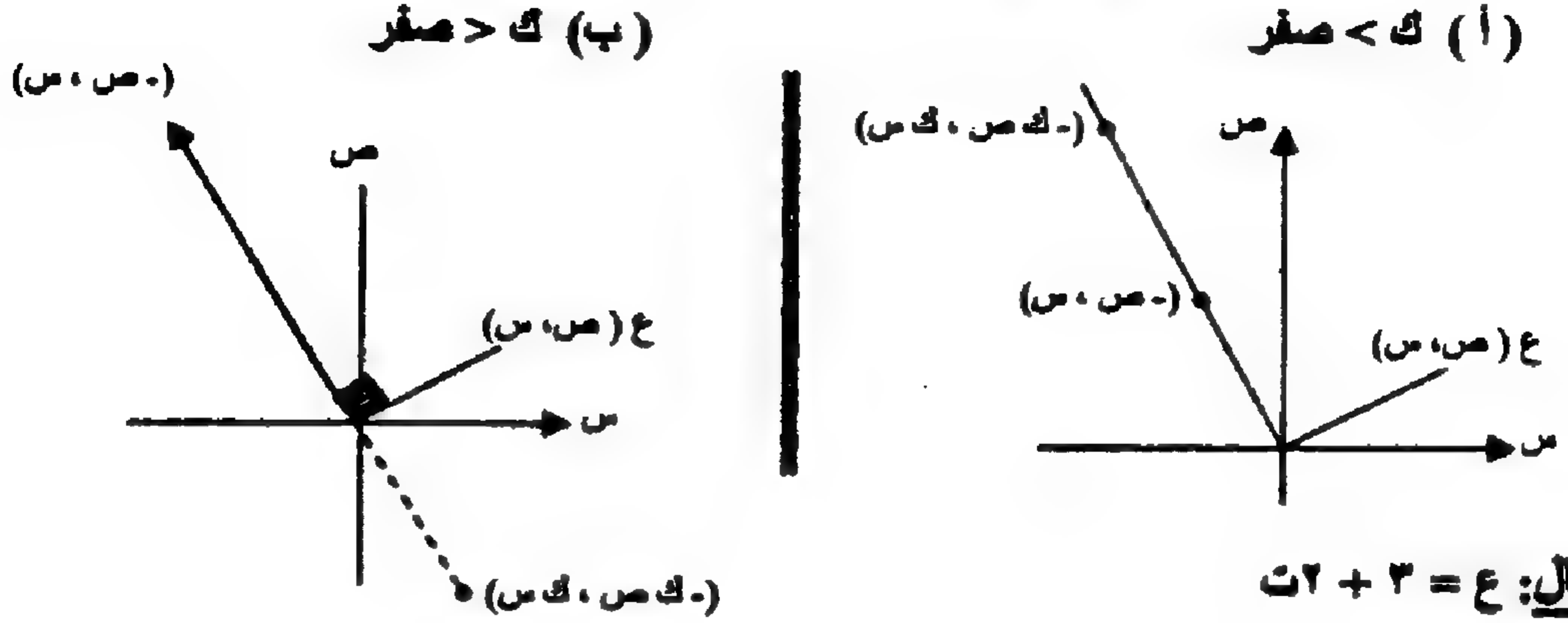
مثلاً : $١ + ٢ ت = ع \therefore ت ع = ٢ + ت$

(٣) ضرب ك ت في العدد المركب $E = S + jT$

$$K T = (S + jT) = -K S + jK T$$

∴ النقطة (S, T) يحدث لها دوران موجب حول نقطة الأصل بزاوية مقدارها 90°

فتصبح $(-S, T)$ فنتج النقطة $(-K S, K T)$.



∴ $3 + j2$ ع

$$\therefore (2, 3) \xrightarrow{\text{دوران بزاوية } 90^\circ} (-2, 3) \xrightarrow{\text{تكبير بمعدل } 3} (-6, 9)$$

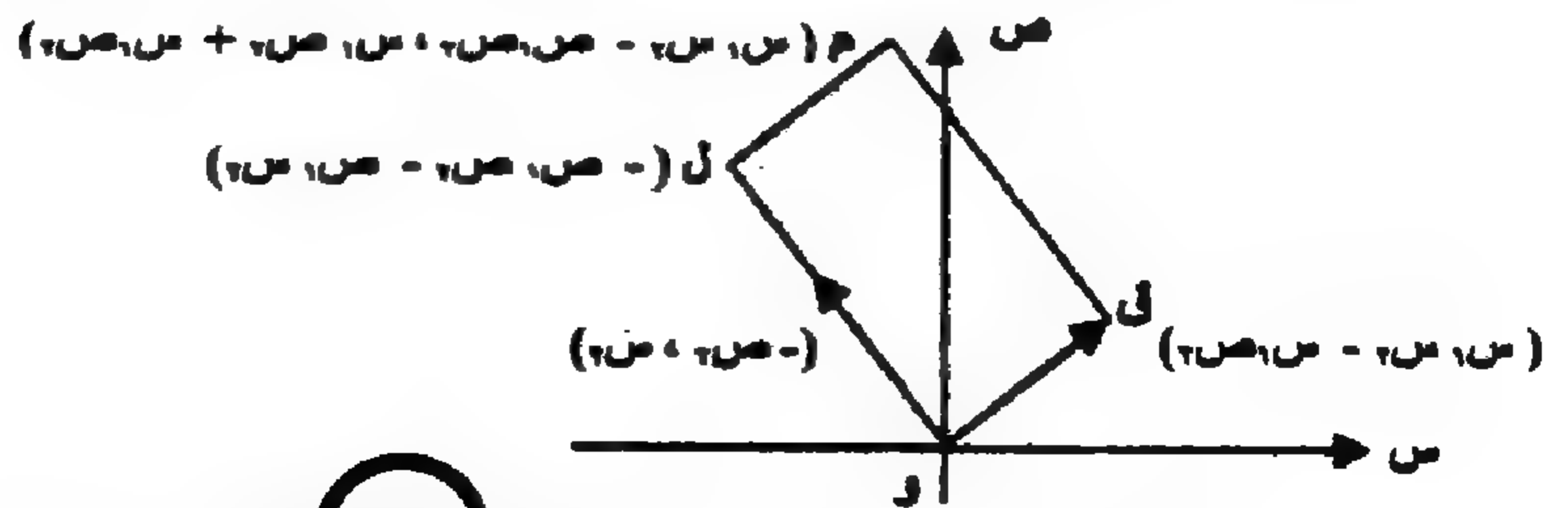
(٤) ضرب عددين مركبين:-

$$E_1 = S_1 + jT_1, E_2 = S_2 + jT_2$$

∴ التفسير الهندسي لحاصل ضرب $E_1 \times E_2$ تتبع ما يلي:-

- نعين النقطة التي تمثل حاصل ضرب E_1 في $(S_1 + jT_1)$ وهي النقطة (S_1, T_1)
- دوران (S_1, T_1) بزاوية قدرها 90° ضد حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل فنتج النقطة $(-S_1, T_1)$ التي هي عبارة عن حاصل ضرب T في $(S_1 + jT_1)$ والتي عبارة هي عن حاصل ضرب T في $(S_1 + jT_1)$.

- تحديد النقطة $(-S_1, T_1)$ الناتجة من حاصل ضرب (S_1, T_1) في j
- توجد النقطة التي تمثل مجموعة الصورتين (S_1, T_1) ، $(-S_1, T_1)$



تعارین (۷)

■ أوجد قيم س، ص الحقيقية في كل مما يلي :

$$(1) \quad (t^2 + 3)(t^2 - 5) = t^2 + s = t^2 + 3$$

$$(2) \quad (3-2)س + (5+3)ص = 9-4ت$$

$$(3) \quad (s^2 - t^2)(s^2 + t^2) = (s - t)(s + t)(s^2 + t^2)$$

$$\frac{v}{2} = \frac{u^2 + at^2}{2t} + \frac{u + at}{2} \quad (4)$$

$$\frac{3-t}{(t^2+1)} + \frac{1-t^2}{(t+2)} = \frac{{}'\text{س} + {}'\text{ص}}{\text{س} - \text{ت} - \text{ص}} \quad (5)$$

$$\frac{m + \sqrt{m^2 - 1}}{m - \sqrt{m^2 - 1}} = \frac{t + 2}{t^2 + 1} + \frac{t + 1}{t + 2} \quad (6)$$

(۷) إذا كان $\frac{1 + \beta}{1 - \beta} = s + \beta$

أثبت أن $s^2 = v^2 + 1$ مهما كانت قيمة كل من a, b

(۸) إذا كان $a + b = \frac{a+2}{b-1}$ حيث a, b حقيقيان

فانبت ان $\gamma = (\gamma^1 + \gamma^2)$

$$0 = 21 + \frac{(22-1)10}{22+1} + 1 \text{ (۹) إذا كان (س + ت ص) } + 1$$

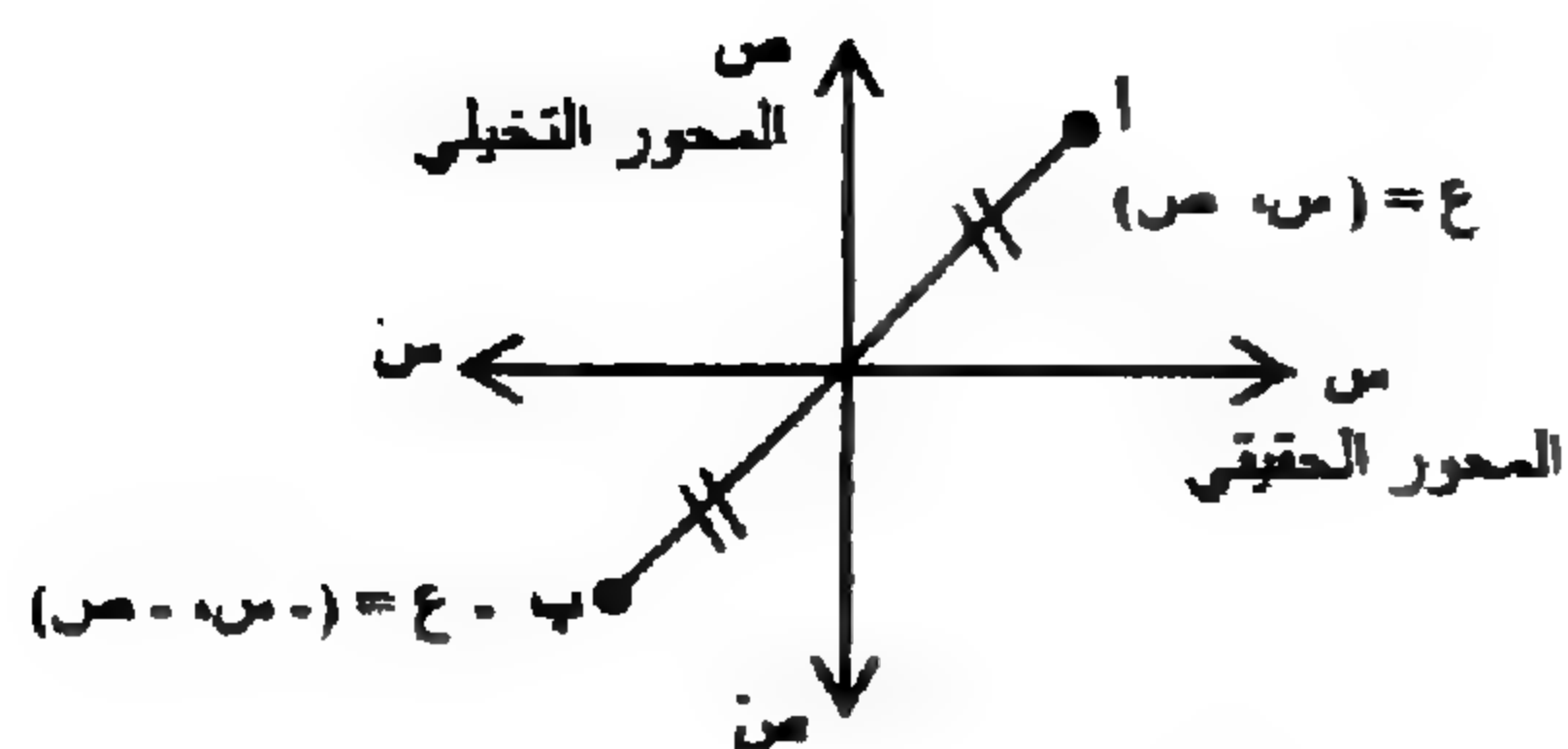
فلأوجد قيمة كل من s ، v

(١٠) إذا كان ل + ن ت أحد جذري المعادلة $أس^٢ + بس + ج = ٠$

حيث $ل، ن، ا، ب، ج$ اعداد حقيقية فانبت ان $ا' = ل' + ب' + ج'$

التمثيل البياني للأعداد المركبة

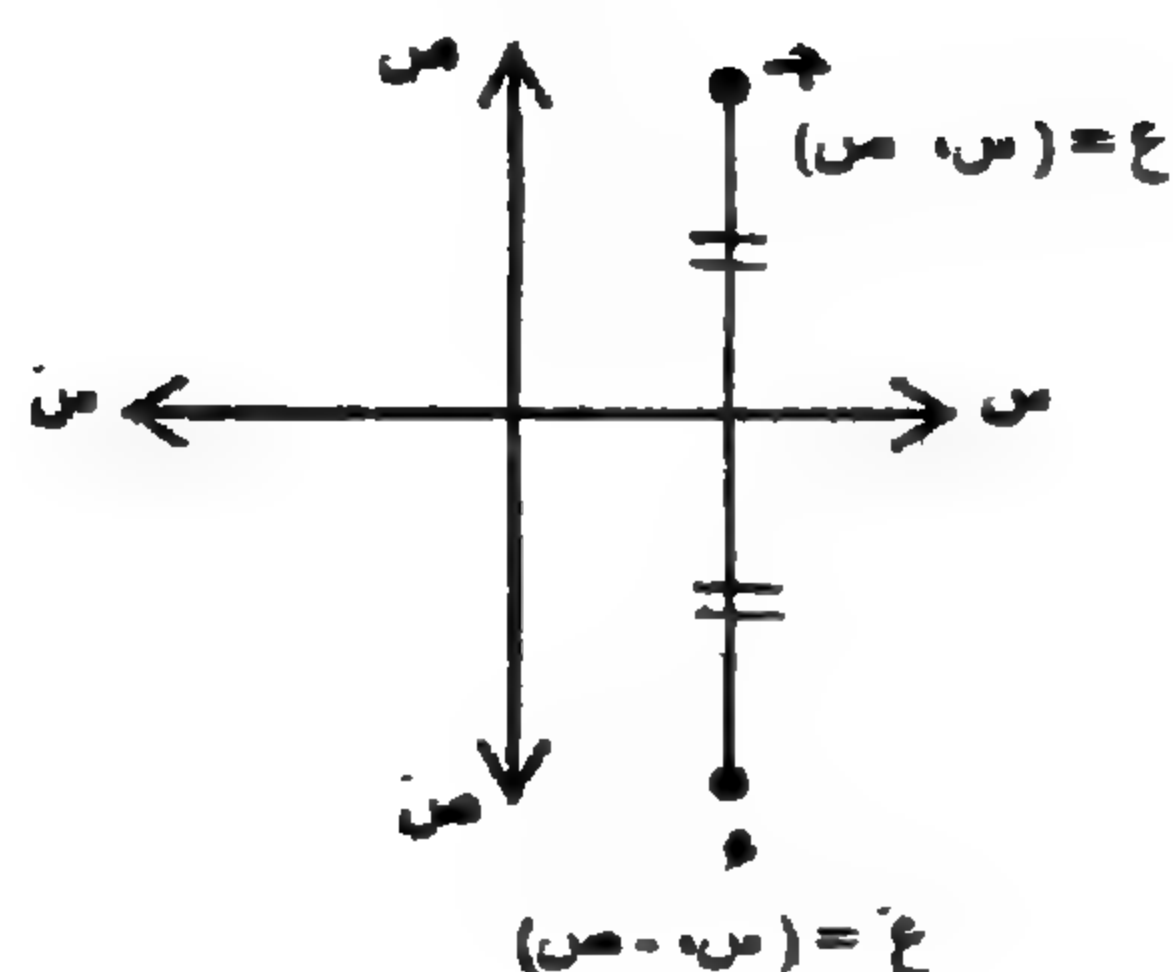
العدد المركب $ع = س + ص ت$ نمثله بيانياً في نظام إحداثي متعامد (شكل أرجاند) بالنقطة (س، ص) حيث س تمثل الأعداد الحقيقية ، ص تمثل الأعداد التخيلية البحتة .



(١) تمثيل العدد ومعكوسه الجمعي :

أ ، ب تمثلان ع ، - ع

وهما متماثلان بالنسبة لنقطة الأصل.



(٢) تمثيل العدد المرافق له:

ج ، د تمثلان ع ، ع̄ وهما متماثلان

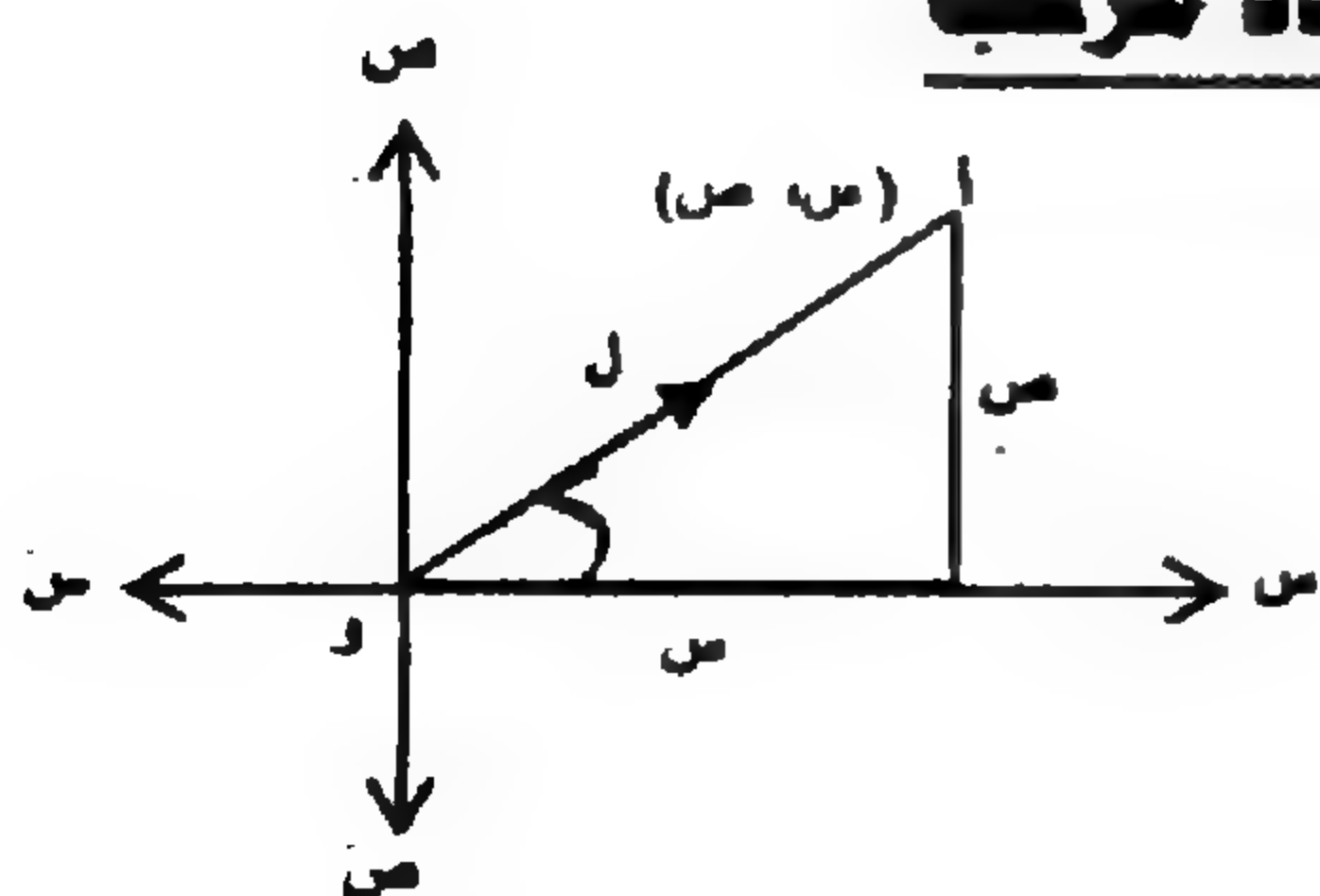
بالنسبة للمحور س س

ومما سبق نستنتج أن:

(١) العددان المركبان المترافقان يمثلان بيانياً بنقطتين متماثلتان بالنسبة للمحور س و س̄ .

(٢) العدد المركب ومعكوسه لجمعي يمثلان بطرفي قطعة مستقيمة تكون نقطة الأصل في منتصفها.

المقياس والسعة لعدد مركب



أي مركب $ع = س + ص ت$

تمثله في الشكل المقابل نقطة أ حيث $|ا| = ل$

(١) مقياس العدد (ع) هو: $ع = ل = \sqrt{س^2 + ص^2}$

وهو عدد حقيق موجب.



(٢) سعة العدد (ع) قياس الزاوية التي يصنعها و أ

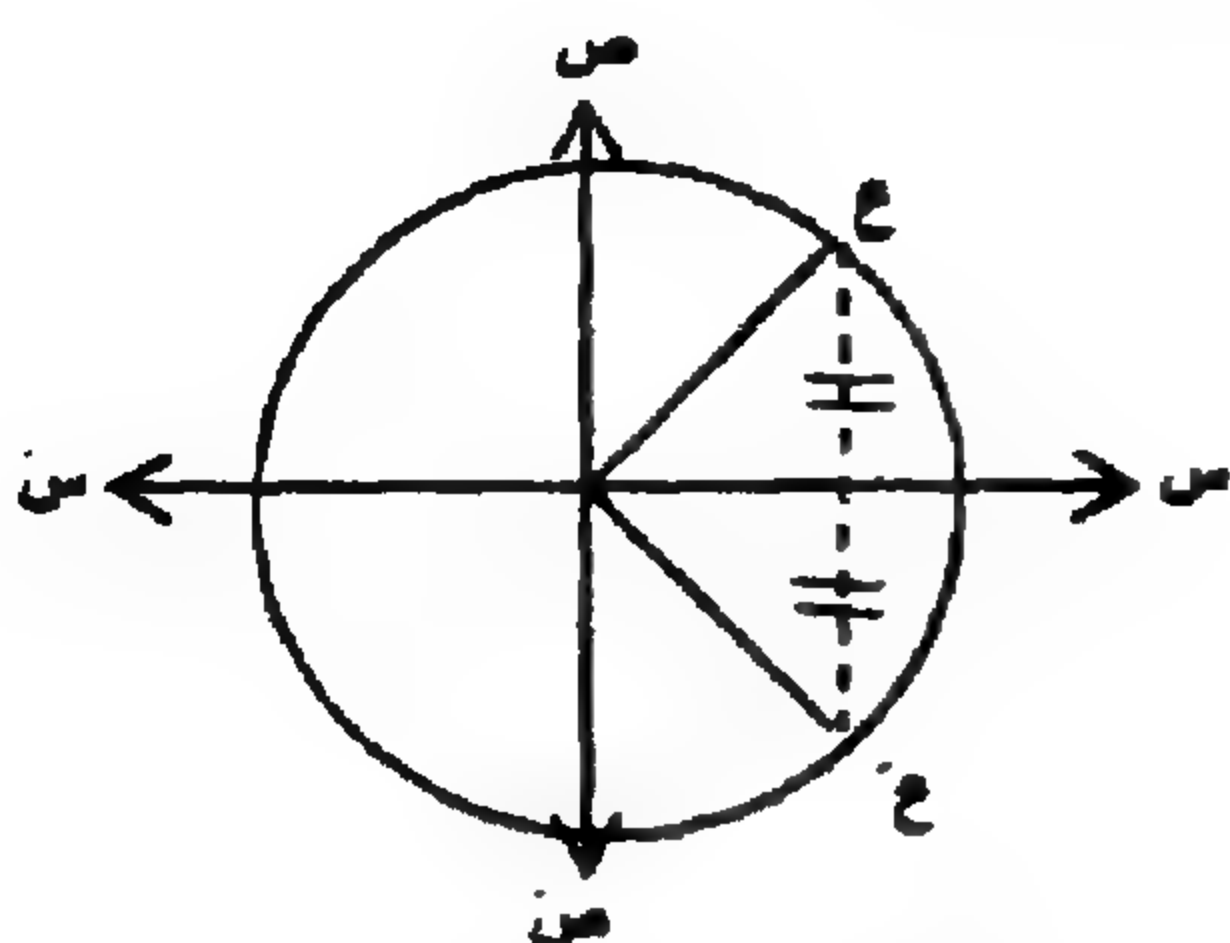
مع الاتجاه الموجب لمحور السينات (وهو عدد حقيقي)

والسعة الأساسية للعدد (ع) $= هـ$ حيث $هـ \in [٠, ٢\pi]$

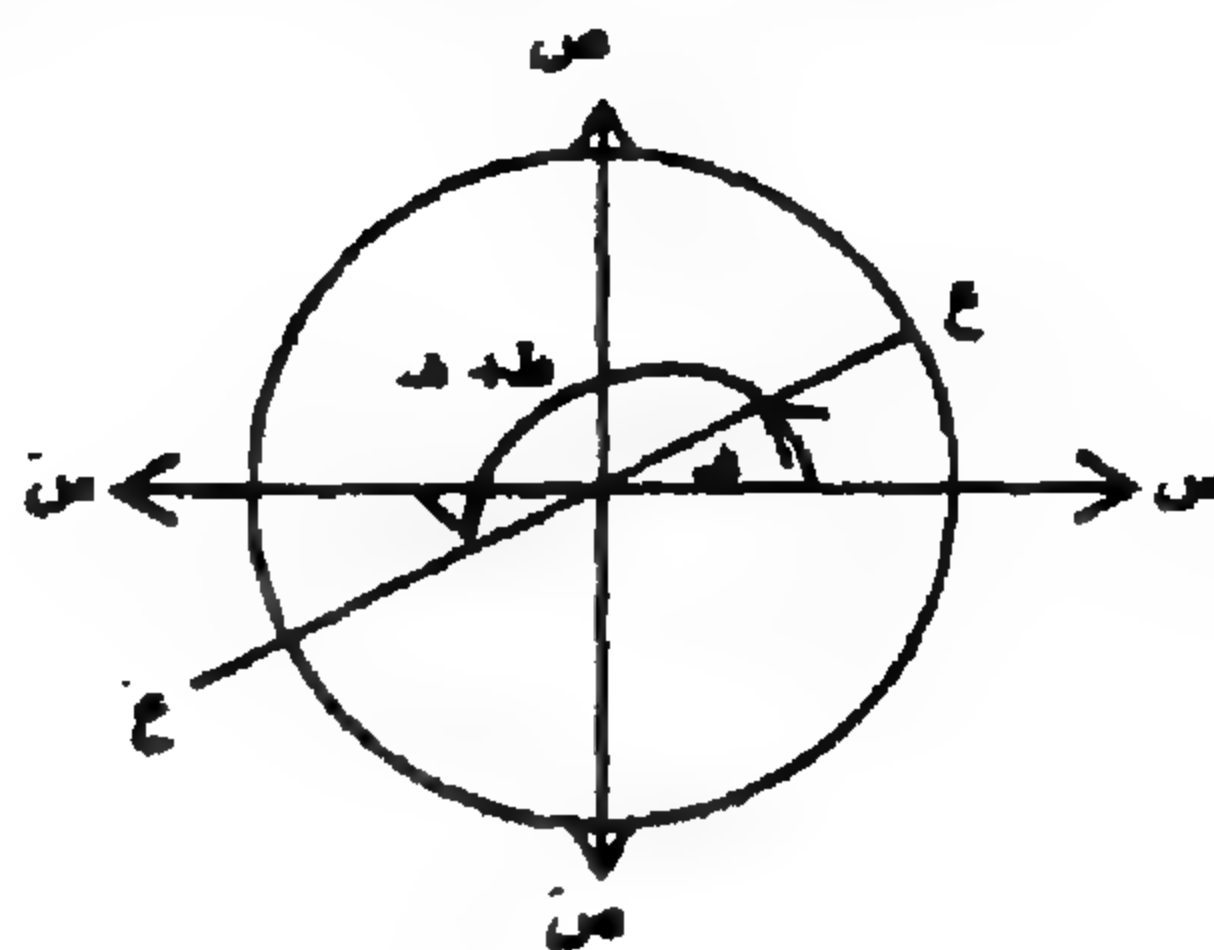
$$(٣) \text{ جتا ه} = \frac{\text{س}}{\text{ل}} \leftarrow \text{س} = \text{ل جتا ه} , \text{ جا ه} = \frac{\text{ص}}{\text{ل}} \leftarrow \text{ص} = \text{ل جا ه}$$

∴ الصورة المثلثية (القطبية) للعدد ع هي

$$\text{ع} = \text{ل} (\text{جتا ه} + \text{ت جا ه}) \text{ حيث ل المقياس ، ه السعة}$$



العلاقة بين سعة ع ، سعة (ع)



العلاقة بين سعة ع ، سعة (- ع)

لاحظ أن:

إذا كان سعة العدد ع = ه فإن:

$$(أ) \text{ سعة المعكوس الجمعي } (-ع) = ط + ه$$

$$\therefore \text{ع} = \text{ل} [\text{جتا} (ط + ه) + \text{ت جا} (ط + ه)]$$

$$(ب) \text{ سعة المرافق له } ع = (ط - ه)$$

$$\therefore \text{ع} = \text{ل} [\text{جتا} (ط - ه) + \text{ت جا} (ط - ه)]$$

كيف تحسب القيمة الأساسية لسعة ع = س + ت ص ؟

$$(١) \text{ نحسب } |ع| = \text{ل} = \sqrt{\text{س}^2 + \text{ص}^2}$$

(٢) نحسب قياس الزاوية الحادة وليكن (ي) من:

$$\text{جتا ي} = \frac{\text{س}}{\text{ل}} \quad \text{أو} \quad \text{جا ي} = \frac{\text{ص}}{\text{ل}} \quad \text{ونصرف النظر مؤقتاً عن اشارات س ، ص عند حساب ي}$$

(٣) نعين القيمة الأساسية لسعة ي بناء علي إشارتي س ، ص طبقاً للجدول التالي:-

إشارة س	إشارة ص	المربع الذي تقع فيه ع	السعة الأساسية
+	+	الأول	ه = ي
-	+	الثاني	ه = ١٨٠ - ي
-	-	الثالث	ه = ١٨٠ + ي
+	-	الرابع	ه = ٣٦٠ - ي

مثال: أوجد المقياس والسعة لكل من الأعداد المركبة الآتية ثم أكتب كلا منها علي الصورة

[٢] $١ + ت$

[٤] $٣ - ٤ ت$

المثلثية: [١] $١ - ٣\sqrt{٧} + ت$

[٣] $١ - ت$

الحل

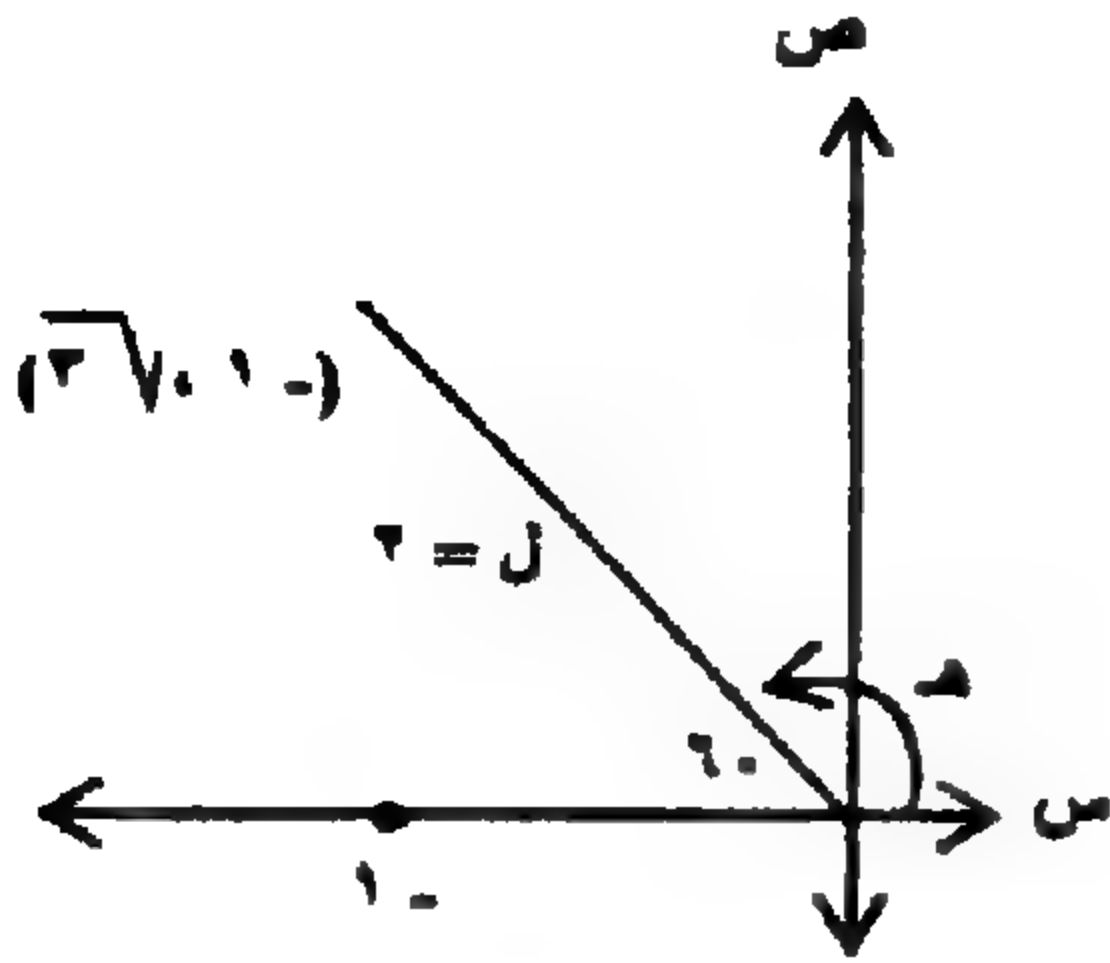
[١] العدد تمثله النقطة $(١ - ٣\sqrt{٧}, ١)$ وهي تقع في الربع الثاني

$$٢ = \sqrt{٣ + ١\sqrt{٧}} = |١٤| = ١٤ \therefore$$

$$جنا ه = \frac{س}{ل} = \frac{١}{١٤}$$

$$\therefore ه = ١٨٠ - ٦٠ = ١٢٠ = ط - \frac{٢}{٣}$$

$$\therefore ١٤ = (جنا ط - \frac{٢}{٣} + ت جا ط - \frac{٢}{٣})$$

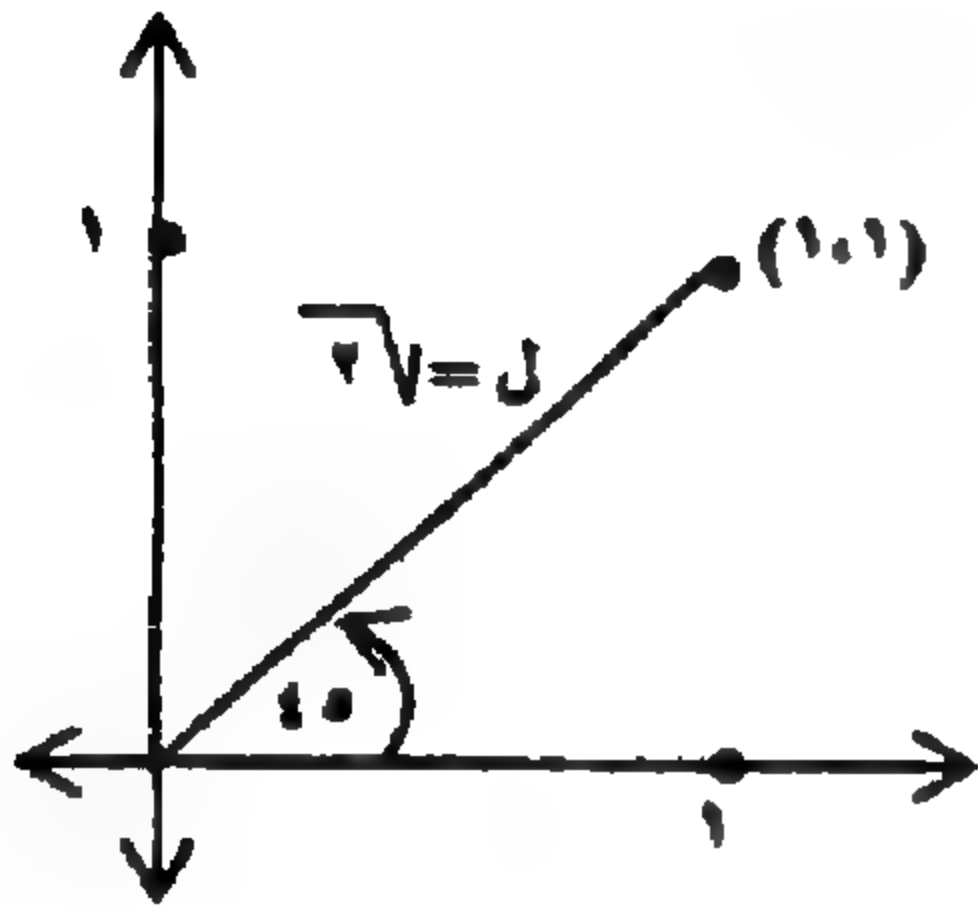


[٢] العدد تمثله النقطة $(١, ١)$ وهي تقع في الربع الأول

$$\therefore ٢\sqrt{٧} = \sqrt{١ + ١\sqrt{٧}} = |٢٤| = ٢٤$$

$$جنا ه = \frac{١}{٢\sqrt{٧}} = ٤٥ \therefore ه = ٤٥ = ط - \frac{٣}{٤}$$

$$\therefore ٢\sqrt{٧} = (جنا ط - \frac{٣}{٤} + ت جا ط - \frac{٣}{٤})$$



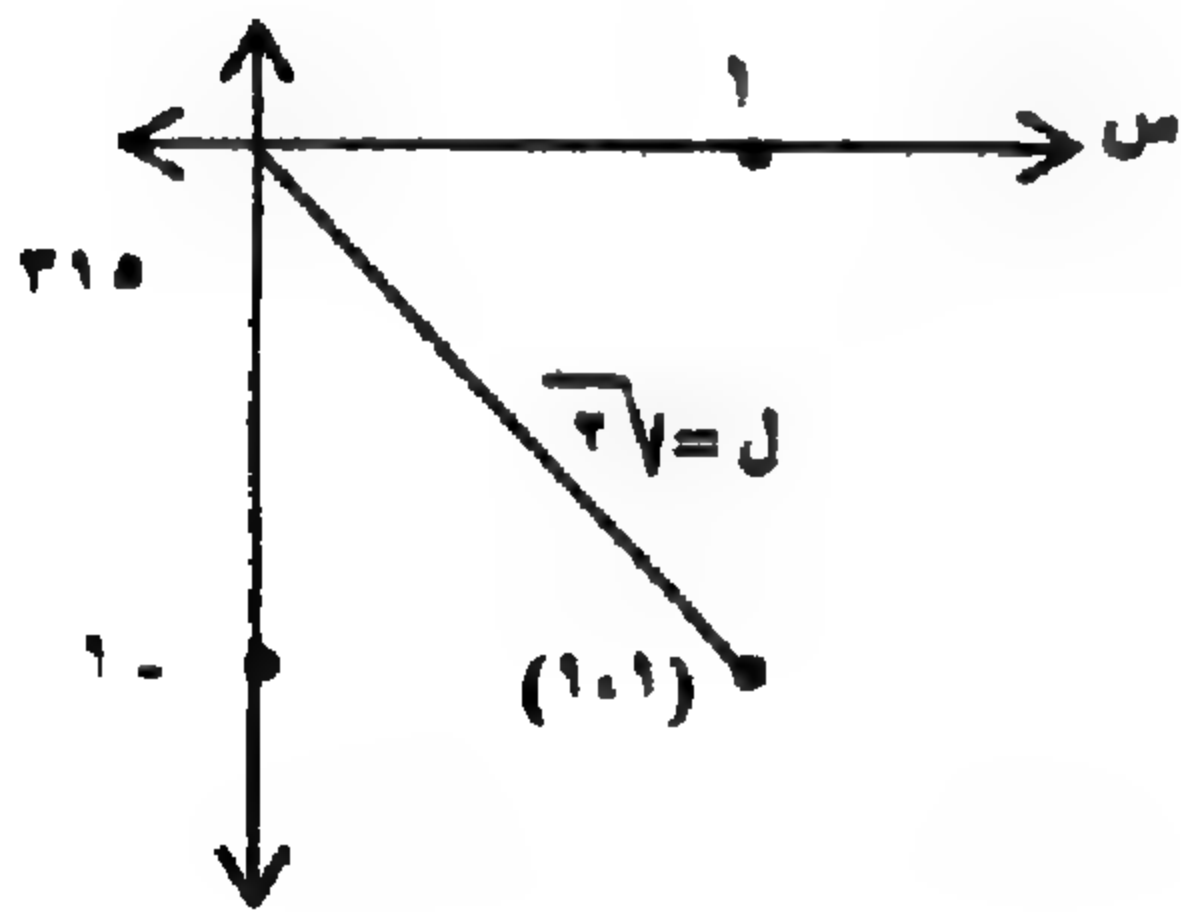
[٣] العدد تمثله النقطة $(١, -١)$ وهي تقع في الربع الرابع

$$\therefore ٢\sqrt{٧} = \sqrt{١ + ١\sqrt{٧}} = |٢٤| = ٢٤$$

$$جنا ه = \frac{١}{٢\sqrt{٧}}$$

$$\therefore ه = ٣٦٠ - ٤٥ = ٣١٥ = ط - \frac{٧}{٤}$$

$$\therefore ٢\sqrt{٧} = (جنا ط - \frac{٧}{٤} + ت جا ط - \frac{٧}{٤})$$



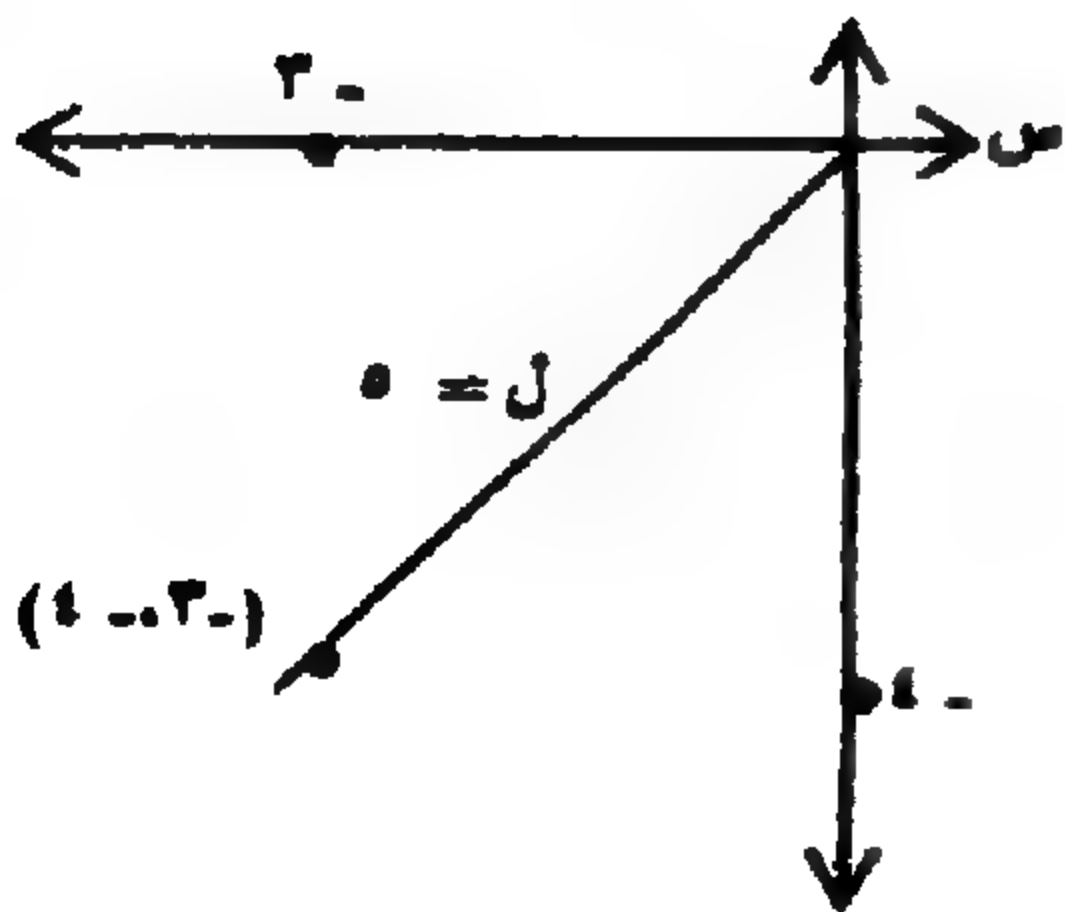
[٤] العدد تمثله النقطة $(٤, -٣)$ وهي تقع في الربع الثالث

$$\therefore ٥ = \sqrt{١٦ + ٩\sqrt{٧}} = |٥٢٣| = ٥٢٣$$

$$جنا ه = \frac{٣}{٥}$$

$$\therefore ه = ١٨٠ + ٥٢ = ٢٣٢$$

$$\therefore ٥ = (جنا ٢٣٢ + ت جا ٢٣٢)$$



مثال: اكتب الصورة الجبرية لكل من الأعداد المركبة التالية:-

(١) ع ١ : مقياسه ٢ ، سعته $\frac{\pi}{4}$ (٢) ع ١ : مقياسه $2\sqrt{3}$ وسعته $\frac{\pi}{3}$ ط

(٣) ع ٢ : مقياسه ٥ وسعته $\frac{\pi}{6}$ ط (٤) ع ١ : مقياسه ٧ وسعته $\frac{\pi}{4}$

الحل

(١) ع ١ = $2 = 2(\cos \frac{\pi}{4} + j \sin \frac{\pi}{4}) = (\frac{1}{\sqrt{2}} + j \frac{1}{\sqrt{2}}) 2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 2 + j \frac{1}{\sqrt{2}} \times 2$

(٢) ع ٢ = $2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}(\cos \frac{\pi}{3} + j \sin \frac{\pi}{3}) = (\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2}) 2\sqrt{3} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2\sqrt{3}$

= $2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}(\cos \frac{\pi}{3} + j \sin \frac{\pi}{3}) = (\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2}) 2\sqrt{3} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2\sqrt{3}$

(٣) ع ٢ = $5 = 5(\cos \frac{\pi}{6} + j \sin \frac{\pi}{6}) = (\frac{\sqrt{3}}{2} + j \frac{1}{2}) 5 = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 5 + j \frac{1}{2} \times 5$

= $5 = 5(\cos \frac{\pi}{6} + j \sin \frac{\pi}{6}) = (\frac{\sqrt{3}}{2} + j \frac{1}{2}) 5 = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 5 + j \frac{1}{2} \times 5$

(٤) ع ١ = $7 = 7(\cos \frac{\pi}{4} + j \sin \frac{\pi}{4}) = (\frac{1}{\sqrt{2}} + j \frac{1}{\sqrt{2}}) 7 = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 7 + j \frac{1}{\sqrt{2}} \times 7$

مثال: أوجد الصورة المثلثية لكل من:

(٢) العدد ٢ ت

(١) العدد ٢

الحل

(١) العدد ٢ تمثله النقطة (٢، ٥)

∴ ل = ٢ ، هـ = ٥

∴ ع ١ = $2 = 2(\cos \frac{\pi}{6} + j \sin \frac{\pi}{6})$

(٢) العدد ٢ تمثله النقطة (٢، ٥)

∴ ل = ٢ ، هـ = ٩٠

∴ ع ٢ = $2 = 2(\cos \frac{\pi}{6} + j \sin \frac{\pi}{6})$

مثال:

ضع العدد $E = \frac{1-t^5}{t^2+2}$ على الصورة الجبرية $S + tV$ ثم على الصورة المثلثية

الحل

$$E = \frac{1-t^5}{t^2+2} = \frac{1-t^5}{13} = \frac{1-t^5}{13} \times \frac{1-t^5}{1-t^5} = \frac{1-t^{10}}{13(1-t^5)} = \frac{1-t^{10}}{13(1-t^5)}$$

$$\therefore L = \sqrt[5]{S} + \sqrt[5]{V} = \sqrt[5]{1} + \sqrt[5]{1} = 2 \quad (1) \dots$$

والعدد E تمثله النقطة $(-1, -1)$ وهي في الربع الثالث

$$\therefore \text{طا ه} = \frac{ص}{س} = 1 \quad \therefore 225 = 180 + 45 = \text{ه} \quad (2) \dots$$

من (1)، (2)

\therefore الصورة القطبية هي $E = 2 \sqrt[5]{2} \angle 225^\circ$ (جتا 225 + ت جا 225)

مثال: إذا كان $E = L$ (جتا ه + ت جا ه)

فاكتب على الصورة القطبية كلا من: E ، E^- ، $\frac{1}{E}$ ، $\frac{1}{E^-}$

الحل

$$E = L = \text{جتا ه} + \text{ت جا ه}$$

$$E^- = L = \text{جتا ه} - \text{ت جا ه}$$

$$\frac{1}{E} = \frac{1}{\text{جتا ه} + \text{ت جا ه}} \times \frac{1}{L} = \frac{1}{L(\text{جتا ه} + \text{ت جا ه})} = \frac{1}{E}$$

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{\text{جتا ه} - \text{ت جا ه}}$$

$$\frac{1}{E} = \frac{1}{L(\text{جتا ه} - \text{ت جا ه})} = \frac{1}{E^-}$$

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{\text{جتا ه} + \text{ت جا ه}}$$

ملاحظة:

سعة العدد $E = \text{ه}$

$(E^-) = \text{ط} + \text{ه}$

$E = \text{ط}^2 - \text{ه} = \text{ه}$

$\frac{1}{E} = \frac{1}{\text{ط}^2 - \text{ه} = \text{ه}}$

$\frac{1}{E} = \frac{1}{\text{ه}}$

$\frac{1}{E} = \frac{1}{\text{ه}}$

مثال: ضع على الصورة القطبية كلا من :-

(2) جا ه + ت جتا ه

(1) جتا ه - ت جا ه

(4) - جا ه - ت جتا ه

(3) - جا ه + ت جتا ه

الحل

- (١) $\text{جتا هـ} - \text{ت جا هـ} = \text{جتا (- هـ)} + \text{ت جا (- هـ)}$
- (٢) $\text{جا هـ} + \text{ت جتا هـ} = \text{جتا (-}\frac{\text{ط}}{\text{ق}}\text{ هـ)} + \text{ت جا (-}\frac{\text{ط}}{\text{ق}}\text{ هـ)}$
- (٣) $-\text{جا هـ} + \text{ت جتا هـ} = \text{جتا (+}\frac{\text{ط}}{\text{ق}}\text{ هـ)} + \text{ت جا (+}\frac{\text{ط}}{\text{ق}}\text{ هـ)}$
- (٤) $-\text{جا هـ} - \text{ت جتا هـ} = \text{جتا (-}\frac{\text{ط}^2}{\text{ق}}\text{ هـ)} + \text{ت جا (-}\frac{\text{ط}^2}{\text{ق}}\text{ هـ)}$

ملاحظة:

إذا كان $\text{ع} = \text{ل} (\text{جتا هـ} + \text{ت جا هـ})$

- $\text{ع} (\text{المعكوس الجمعي}) \xrightarrow{\text{الصورة القطبية}} \text{ل} [\text{جتا (+ ط + هـ)} + \text{ت جا (+ ط + هـ)}]$
ع (المرافق) $\leftarrow \text{ل} [\text{جتا (- هـ)} + \text{ت جا (- هـ)}]$
 $\frac{1}{\text{ع}} (\text{المعكوس الضربي}) \leftarrow \frac{1}{\text{ل}} [\text{جتا (- هـ)} + \text{ت جا (- هـ)}]$
 $\frac{1}{\text{ع}} \leftarrow (\text{جتا هـ} + \text{ت جا هـ})$

تمارين (٨)

■ أوجد المقياس والسعة لكل من الأعداد الآتية ثم عبر عن كل منها بالصورة المثلثية:-

$$\begin{array}{ll} (١) \quad ١- + ت & (٢) \quad ٣\sqrt{-} ت \\ (٣) \quad ٢- + ٢ت & (٤) \quad \frac{٣\sqrt{-}}{٢} + \frac{١}{٢} ت \\ (٥) \quad ٢\sqrt{٣} + ٢\sqrt{٣} ت & (٦) \quad ٢ت \end{array}$$

■ اكتب الصورة الجبرية لكل من الأعداد المركبة الآتية:-

$$\begin{array}{l} (٧) \quad \text{العدد الذي مقياسه } ٣\sqrt{٢} \text{ وسعته } ١٢٠ \\ (٨) \quad \text{العدد الذي مقياسه } ٢\sqrt{-} \text{ وسعته } \frac{٥}{٤} \\ (٩) \quad \text{العدد الذي مقياسه } ٣\sqrt{-} \text{ وسعته } \frac{١١}{٤} \\ (١٠) \quad \text{العدد الذي مقياسه } ٦\sqrt{-} \text{ وسعته } (-\frac{٥}{٦}) \end{array}$$

■ ضع كلا من الأعداد الآتية على صورة + ب ت حيث أ، ب و ح ثم اكتب الصورة المثلثية لكل منها

$$\begin{array}{ll} (١١) \quad \frac{٥-٣\sqrt{-}ت}{٢-٣\sqrt{-}ت} & (١٢) \quad \frac{٨(٣\sqrt{-}+٢)ت}{٣\sqrt{-}-٥ت} \\ (١٣) \quad \frac{٦+٢\sqrt{٣}ت}{٣-٣\sqrt{-}ت} & (١٤) \quad \frac{٣\sqrt{-}-ت}{٢(٢+ت+٢ج)}$$

(١٥) إذا كانت $٢-٢ = ع$ ت فاكتب الصورة المثلثية لكل من الأعداد $ع$ ، $ع-$ ، $ع$ ، $\frac{١}{ع}$

(١٦) مثل علي شكل أرجاند الأعداد $١ع = ٣- + ٤ت$ ، $١ع = ٢- + ٣ت$ ، $٢ع = ١ع - ٢ع$ ثم أوجد مقياس وسعة $٢ع$

■ أوجد المقياس والسعة لكل من الأعداد الآتية:-

$$\begin{array}{l} (١٧) \quad ٣- (ج٦٠ + ت٦٠) \\ (١٨) \quad ٤ (ج١٥٠ - ت١٥٠) \\ (١٩) \quad ٢- (ج٢١٠ - ت٢١٠) \\ (٢٠) \quad ل (-ج٥ + ت٥) \end{array}$$

ملاحظات هامة

مثال: عبر عن كل من الأعداد الآتية بالصورة المثلثية:-

(١) ١ (٢) ت (٣) ١- (٤) -ت

الحل

(١) $١ = ٥ \times ت + ١$ \therefore س = ١ ، ص = ٥ ، ل = $\sqrt{٥ + ١} = ١$

جتا ه = $\frac{س}{ل} = \frac{١}{١} = ١$ ، جا ه = $\frac{ص}{ل} = \frac{٥}{١} = ٥$ ، \therefore ه = ٥
 $\therefore ١ = ١ \times (جتا ٥ + ت جا ٥)$

اي ان : $١ = جتا ٥ + ت جا ٥$

(٢) $ت = ٥ + ١ \times ت$

\therefore س = ٥ ، ص = ١ ، ل = $\sqrt{٥ + ١} = ١$

جتا ه = $\frac{س}{ل} = \frac{٥}{١} = ٥$ ، جا ه = $\frac{ص}{ل} = \frac{١}{١} = ١$ ،

\therefore ه = ٩٠ = $\frac{\pi}{٢}$ \therefore ت = $١ \times (جتا \frac{\pi}{٢} + ت جا \frac{\pi}{٢})$

اي ان : $ت = جتا \frac{\pi}{٢} + ت جا \frac{\pi}{٢}$

(٣) $١- = ٥ \times ت + ١-$ \therefore س = ١- ، ص = ٥ ، ل = $\sqrt{٥ + ١} = ١$

جتا ه = $\frac{س}{ل} = \frac{١-}{١} = ١-$ ، جا ه = $\frac{ص}{ل} = \frac{٥}{١} = ٥$ ،

\therefore ه = ١٨٠ = π \therefore $١- = جتا \pi + ت جا \pi$

اي ان : $١- = جتا \pi + ت جا \pi$

(٤) $-ت = ٥ \times ت + ١-$ \therefore س = ٥ ، ص = ١- ، ل = $\sqrt{١ + ٥} = ١$

جتا ه = $\frac{س}{ل} = \frac{٥}{١} = ٥$ ، جا ه = $\frac{ص}{ل} = \frac{١-}{١} = ١-$ ،

ه = ٢٧٠ = $\frac{٣\pi}{٢}$ \therefore -ت = $١ \times (جتا \frac{٣\pi}{٢} + ت جا \frac{٣\pi}{٢})$

اي ان : $-ت = جتا \frac{٣\pi}{٢} + ت جا \frac{٣\pi}{٢}$

الخلاصة:

$١ = جتا ٥ + ت جا ٥$

$١- = جتا \pi + ت جا \pi$

$ت = جتا \frac{\pi}{٢} + ت جا \frac{\pi}{٢}$

$-ت = جتا \frac{٣\pi}{٢} + ت جا \frac{٣\pi}{٢}$

تحويل الصورة المثلثية الغير قياسية للعدد ع إلى الصورة المثلثية القياسية

ل (جتا هـ + ت جا هـ)

١) إذا كانت ع، ل = (جا هـ + ت جتا هـ)

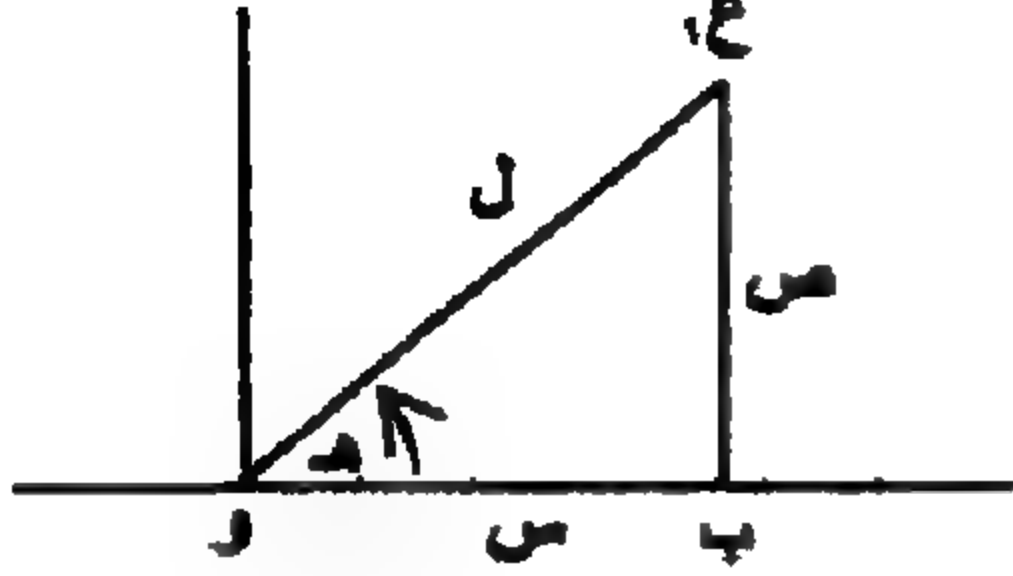
$$\therefore \frac{س}{ل} = جا هـ \quad \therefore \frac{جا هـ}{ل} = جا هـ$$

$$\therefore \frac{جتا هـ}{ل} = ت$$

∴ السعة (هـ) في الربع الأول

∴ جا هـ = جتا هـ وذلك انتسابها للعدد $\frac{ط}{٩٠} = \frac{ط}{٩٠}$

$$\therefore ل = ع [جتا (هـ - \frac{ط}{٩٠}) + ت جا (هـ - \frac{ط}{٩٠})]$$

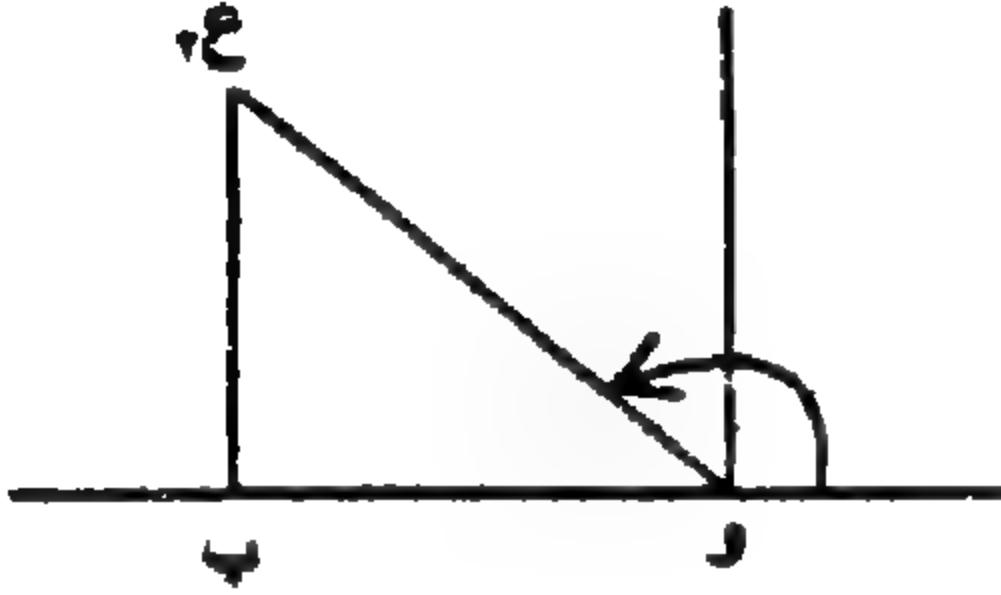


٢) إذا كانت ع، ل = (- جا هـ + ت جتا هـ)

$$\therefore س = - ، ص = +$$

∴ العدد المركب يقع في الربع الثاني

$$\therefore ل = ع [جتا (هـ + \frac{ط}{٩٠}) + ت جا (هـ + \frac{ط}{٩٠})]$$



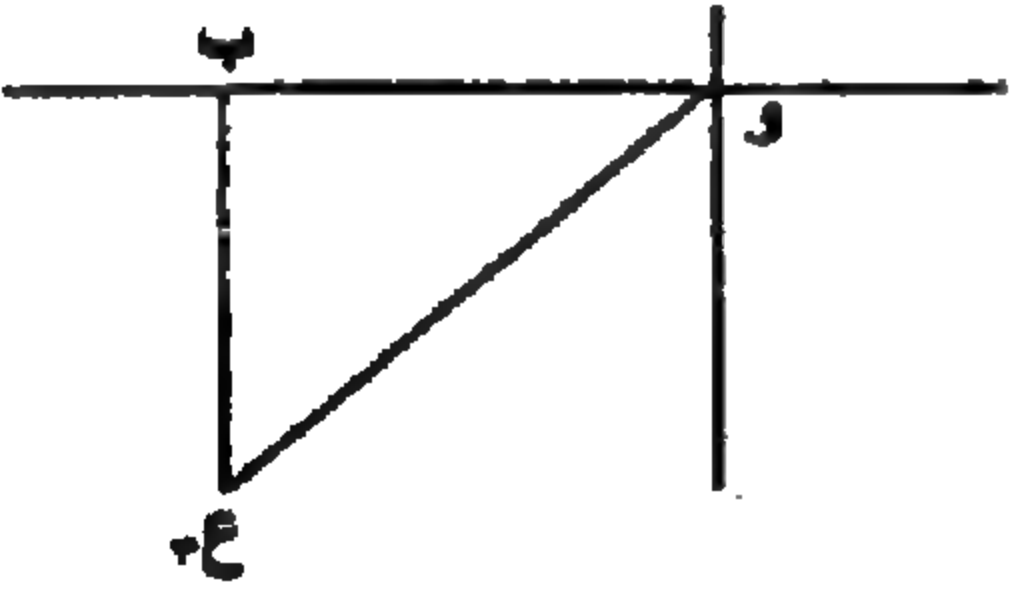
٣) إذا كانت ع، ل = (- جا هـ - ت جتا هـ)

$$\therefore س = - ، ص = -$$

∴ العدد المركب يقع في الربع الثالث

∴ السعة تنسب للعدد $\frac{ط}{٢٧٠} = \frac{ط}{٢٧٠}$

$$\therefore ل = ع [جتا (هـ + \frac{ط}{٢٧٠}) + ت جا (هـ + \frac{ط}{٢٧٠})]$$



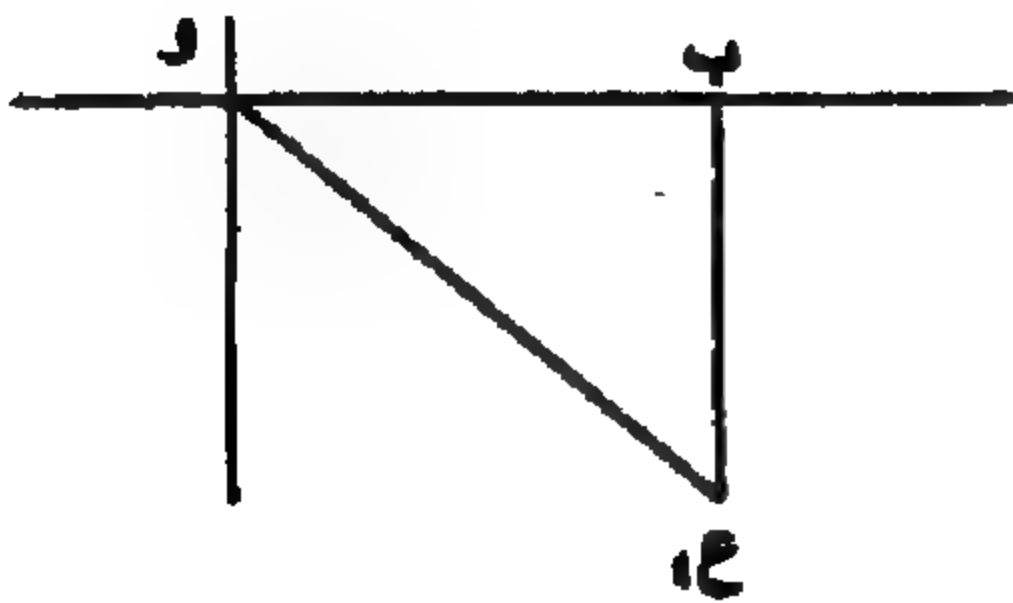
٤) إذا كانت ع، ل = (جا هـ - ت جتا هـ)

$$\therefore س = + ، ص = -$$

∴ العدد المركب يقع في الربع الرابع

∴ السعة تنسب للعدد $(هـ + \frac{ط}{٢٧٠})$

$$\therefore ل = ع [جتا (هـ + \frac{ط}{٢٧٠}) + ت جا (هـ + \frac{ط}{٢٧٠})]$$



الخلاصة : النسب المثلثية للعدد المركب وإشارتها غير مضبوطة وفي هذه الحالة تنسب الزوايا

$$\frac{\text{ط}}{\text{ط}} ، \frac{\text{ط}^2}{\text{ط}}$$

- ل (- جتا هـ + ت جا هـ) = ل [جتا (ط - هـ) + ت جا (ط - هـ)]
- ل (- جتا هـ - ت جا هـ) = ل [جتا (ط + هـ) + ت جا (ط + هـ)]
- ل (جتا هـ - ت جا هـ) = ل [جتا (ط - هـ) - ت جا (ط - هـ)]

الخلاصة : النسب المثلثية للعدد المركب مضبوطة ولكن إشارتها غير مضبوطة

∴ تنسب الزوايا إلى ط ، ط

مثال : اكتب كل من الأعداد المركبة الآتية في الصورة القطبية الصحيحة :-

$$(1) \quad ١ - \text{ع} = ٤ - (\text{جا } ٣٠ - \text{ت جا } ٣٠)$$

$$(2) \quad ١ - \text{ع} = ٢ - (\text{جا } \frac{1}{4} \text{ط} - \text{ت جتا } \frac{1}{4} \text{ط})$$

$$(3) \quad ١ - \text{ع} = ٩ - (\text{جا } \frac{5}{3} \text{ط} + \text{ت جتا } \frac{5}{3} \text{ط})$$

الحل

$$(1) \quad ١ - \text{ع} = ٤ - [\text{جتا } (٣٠ - ٩٠) + \text{ت جا } (٣٠ - ٩٠)]$$

$$= ٤ - [\text{جتا } ٦٠ + \text{ت جا } ٦٠] = ٤ - (\text{جتا } ٦٠ - \text{ت جا } ٦٠)$$

$$(2) \quad ١ - \text{ع} = ٢ - (\text{جا } \frac{1}{4} \text{ط} - \text{ت جتا } \frac{1}{4} \text{ط})$$

$$= ٢ - (\text{جا } ٤٥ - \text{ت جتا } ٤٥)$$

$$= ٢ - [\text{جتا } (٤٥ - ٩٠) - \text{ت جا } (٤٥ - ٩٠)]$$

$$= ٢ - (\text{جتا } ٤٥ - \text{ت جا } ٤٥)$$

$$= ٢ - (\text{جتا } ٤٥ + \text{ت جا } ٤٥)$$

$$(3) \quad ١ - \text{ع} = ٩ - (\text{جا } \frac{5}{3} \text{ط} - \text{ت جتا } \frac{5}{3} \text{ط})$$

$$= ٩ - (\text{جا } ٣٠٠ - \text{ت جتا } ٣٠٠)$$

$$= ٩ - [\text{جا } (٦٠ - ٣٦٠) + \text{ت جتا } (٦٠ - ٣٦٠)]$$

$$= ٩ - (\text{جا } ٦٠ + \text{ت جتا } ٦٠)$$

$$= ٩ - (\text{جا } ٦٠ + \text{ت جتا } ٦٠) = ٩ - (\text{جتا } ٣٠ - \text{ت جا } ٣٠)$$

لأن ٦٠ تتم ٣٠

المقياس والسعة لحاصل ضرب عددين مركبين ولخارج قسمتهما

- حقائق هندسية:

$$\text{جا } (أ + ب) = \text{جا } أ \text{جتا } ب + \text{جتا } أ \text{جا } ب$$

$$\text{جتا } (أ + ب) = \text{جتا } أ \text{جتا } ب - \text{جا } أ \text{جا } ب$$

$$\text{جا } (أ - ب) = \text{جا } أ \text{جتا } ب - \text{جتا } أ \text{جا } ب$$

$$\text{جتا } (أ - ب) = \text{جتا } أ \text{جتا } ب + \text{جا } أ \text{جا } ب$$

$$\text{جا } ٢ = ١ \text{ جا } أ \text{جتا } أ = \text{جا } أ = ٢ \text{ جا } \frac{١}{٢} \text{جتا } \frac{١}{٢}$$

$$\text{جتا } ٢ = ١ \text{ جتا } أ - ١ \text{ جا } أ = \text{جتا } أ = \frac{١}{٢} \text{جتا } \frac{١}{٢} - \frac{١}{٢} \text{جا } \frac{١}{٢}$$

$$٢ = \text{جتا } ٢ - ١ \quad ٢ = \text{جتا } ٢ - \frac{١}{٢}$$

$$١ = ٢ - ١ \quad ١ = ٢ - \frac{١}{٢}$$

أولاً : المقياس والسعة لحاصل ضرب عددين مركبين

مقياس (حاصل ضرب عددين مركبين) = حاصل ضرب مقياسهما

سعة (حاصل ضرب عددين مركبين) = مجموع سعتيهما

$$\text{إذا كان } ع = ١, ل = ١ \text{ (جتا } ١, \text{ + ت جا } ١, \text{)}$$

$$ع = ٢, ل = ٢ \text{ (جتا } ٢, \text{ + ت جا } ٢, \text{)}$$

$$\therefore ع = ١, ل = ١ \text{ (جتا } ١, \text{ + ت جا } ١, \text{)}$$

نتيجة (١):

$$\text{إذا كان } ع = ١, ل = ١ \text{ (جتا } ١, \text{ + ت جا } ١, \text{)}$$

$$\therefore ع = ٢, ل = ٢ \text{ (جتا } ٢, \text{ + ت جا } ٢, \text{)}$$

نتيجة (٢):

$$\text{إذا كان } ع = ١, ل = ١ \text{ (جتا } ١, \text{ + ت جا } ١, \text{)}$$

$$ع = ٢, ل = ٢ \text{ (جتا } ٢, \text{ + ت جا } ٢, \text{)}$$

ناتج قسمة عدد مركب على آخر

$$\frac{ل}{ل} = \frac{ع}{ع} = \frac{ل}{ل} [\text{جتا } (هـ - هـ) + \text{ت جا } (هـ - هـ)]$$

∴ خارج قسمة عددين مركبين هو عدد مركب

فمثلاً: إذا كان $ع = ٣$ (جتا ٧٥ + ت جا ٧٥)

$$ع = ٢ \text{ (جتا } ٤٥ + \text{ت جا } ٤٥)$$

$$\text{فإن: } \frac{ع}{ع} = \frac{ل}{ل} = \frac{٢}{٢} [\text{جتا } (٤٥ - ٧٥) + \text{ت جا } (٤٥ - ٧٥)]$$

$$= \frac{٢}{٢} (\text{جتا } ٣٠ + \text{ت جا } ٣٠)$$

$$= \frac{ع}{ع} = \frac{ل}{ل} = \frac{٢}{٢} [\text{جتا } (٧٥ - ٤٥) + \text{ت جا } (٧٥ - ٤٥)]$$

$$= \frac{٢}{٢} (\text{جتا } ٣٠ + \text{ت جا } ٣٠)$$

$$= \frac{٢}{٢} (\text{جتا } ٣٣٠ + \text{ت جا } ٣٣٠)$$

نتيجة: إذا كان $ع = ل$ (جتا هـ + ت جا هـ) فإن

$$\frac{ل}{ل} = \frac{ع}{ع} = \frac{ل}{ل} [\text{جتا } (هـ - هـ) + \text{ت جا } (هـ - هـ)]$$

$$\text{أما } ع = ل \text{ (جتا } (هـ - هـ) + \text{ت جا } (هـ - هـ))$$

$$\text{فمثلاً: } ع = ٢ \text{ (جتا } ٤٥ + \text{ت جا } ٤٥)$$

$$\therefore \frac{ع}{ع} = \frac{ل}{ل} = \frac{١}{١} [\text{جتا } (٤٥ - ٤٥) + \text{ت جا } (٤٥ - ٤٥)]$$

$$= \frac{١}{١} (\text{جتا } ٤١٥ + \text{ت جا } ٤١٥)$$

ملاحظة هامة

$$\text{إذا كان } ع = ل \text{ (جتا } هـ + \text{ت جا } هـ)$$

$$ع = ل \text{ (جتا } هـ + \text{ت جا } هـ)$$

$$ع = ل \text{ (جتا } هـ + \text{ت جا } هـ)$$

$$\text{فإن: } \frac{ع}{ع} = \frac{ل}{ل} = \frac{ل}{ل} [\text{جتا } (هـ - هـ + هـ) + \text{ت جا } (هـ - هـ + هـ)]$$

مثال:

إذا كان $\text{ع} = 6$ (جتا $70 + \text{ت جتا } 70$) ، $\text{ع} = 3$ (جتا $40 + \text{ت جتا } 40$) فأوجد $\frac{1}{\text{ع}}$ ثم ضع الناتج على صورة زوج مرتب .

الحل

$$\frac{\frac{1}{\text{ع}}}{\frac{1}{\text{ع}}} = \frac{\frac{1}{\text{ع}}}{\frac{1}{\text{ع}}} = \frac{1}{\text{ع}}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{6} \left[\text{جتا } (40 - 70) + \text{ت جتا } (40 - 70) \right]$$

$$2 = \left(\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \text{ت} = \text{ت} + \sqrt{3} = (1, \sqrt{3})$$

مثال: ضع العدد $(1 - \text{ت})$ على الصورة المثلثية ثم أوجد قيم $(1 - \text{ت})$

الحل

$$\sqrt{2} = 1 + i = \text{ل} ، 1 = \text{ص} ، 1 = \text{س}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\text{ص}}{\text{ل}} = \text{جا هـ} ، \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\text{س}}{\text{ل}} = \text{جتا هـ}$$

$$\therefore \text{هـ} = 45 - 315 = 315$$

$$1 - \text{ت} = \sqrt{2} (\text{جتا } 315 + \text{ت جتا } 315)$$

$$(1 - \text{ت}) = \sqrt{2} (\text{جتا } 315 + \text{ت جتا } 315)$$

$$8 = (\text{جتا } 1890 + \text{ت جتا } 1890)$$

$$8 = (\text{جتا } 90 + \text{ت جتا } 90)$$

مثال: إذا كان $\text{ع} = 1$ ، $\text{ل} = 1$ (جتا $(\text{أ} + \text{ب}) + \text{ت جتا } (\text{أ} + \text{ب})$) ، $\text{ع} = 1$ ، $\text{ل} = 1$ (جتا $(\text{أ} - \text{ب}) + \text{ت جتا } (\text{أ} - \text{ب})$) أوجد $\text{ع} ، \text{ع}$

الحل

$$\text{ع} ، \text{ع} = 1 ، \text{ل} = 1 (\text{جتا } 12 + \text{ت جتا } 12)$$

مثال: أوجد الصورة المثلثية لحاصل ضرب $\text{ع} ، \text{ع}$ إذا كان :

$$\text{ع} = -240 - \text{ت جتا } 240 ، \text{ع} = 7 (\text{جتا } 120 - \text{ت جتا } 120)$$

الحل

$$\begin{aligned} \text{ع} = ١٠ \text{ جا} + ٦٠ \text{ جتا} &= ٦٠ \text{ جتا} + ٢٠ \text{ ت جا} + ٢٠ \text{ جتا} \\ \text{ع} = ١٠ \text{ جا} + ٦٠ \text{ ت جتا} &= (٦٠ \text{ جتا} + ٢٠ \text{ ت جا} + ٢٠ \text{ جتا}) \\ \therefore \text{ع} = ١٠ \text{ جا} + ٦٠ \text{ ت جتا} &= ٦٠ \text{ جتا} + ٢٠ \text{ ت جا} + ٢٠ \text{ جتا} \\ \therefore \text{مقياس ع} = ١٠ \text{ يساوي ٧ سعة ع} &= ١٠ \text{ ع} = ٦٠ \end{aligned}$$

مثال: إذا كان ع = ١٠ (جتا هـ + ت جا هـ) ، ع = ١٠ (جتا هـ - ت جا هـ) أوجد $\frac{\text{ع}}{\text{ع}}$

الحل

$$\begin{aligned} \text{ع} = ١٠ (٣٠ - \text{جتا هـ} - \text{ت جا هـ}) \\ ٣٠ = [\text{جتا} (\text{ط} + \text{هـ}) + \text{ت جا} (\text{ط} + \text{هـ})] \\ \text{ع} = ١٠ (٥ - \text{جتا هـ} - \text{ت جا هـ}) \\ \therefore \frac{\text{ع}}{\text{ع}} = ٦ = [\text{جتا} (\text{ط} + \text{هـ}^٢) + \text{ت جا} (\text{ط} + \text{هـ}^٢)] \end{aligned}$$

مثال: اختصر لأبسط صورة : $\frac{(\text{جتا} - \text{ت جا} - \text{جتا}^٢ + \text{ت جا}^٢)(\text{جتا} - \text{ت جا} - \text{جتا}^٢ + \text{ت جا}^٢)}{(\text{جتا} - \text{ت جا} - \text{جتا}^٢ + \text{ت جا}^٢)}$

الحل

$$\begin{aligned} &\frac{(\text{جتا}^٢ - \text{ت جا}^٢ + \text{جتا}^٢ - \text{ت جا}^٢)(\text{جتا}^٢ - \text{ت جا}^٢ + \text{جتا}^٢ - \text{ت جا}^٢)}{(\text{جتا}^٢ - \text{ت جا}^٢ + \text{جتا}^٢ - \text{ت جا}^٢)} \\ &= \text{جتا} (\frac{\text{ط}^٢}{٢} - \frac{\text{ط}^٥}{٢} + \frac{\text{ط}^٣}{٢}) + \text{ت جا} (\frac{\text{ط}^٢}{٢} - \frac{\text{ط}^٥}{٢} + \frac{\text{ط}^٣}{٢}) \\ &= \text{جتا} \frac{\text{ط}^٥}{٢} + \text{ت جا} \frac{\text{ط}^٥}{٢} = \text{ت} \end{aligned}$$

مثال: إذا كان ع = ١٠٠ (جتا هـ + ت جا هـ) ، ع = ١٠ (جتا هـ - ت جا هـ) أوجد الصورة المثلثية والصورة الجبرية لحاصل الضرب ع ع .

الحل

$$١٤ = \frac{1}{٢} [\text{جتا } (٢٢-٩٠) + \text{ت} (٢٢-٩٠)]$$

$$١٤ \times ١٠٠ = \frac{1}{٢} [\text{جتا } (٢٢-٩٠+٥) + \text{ت} (٢٢-٩٠+٥)]$$

$$٥ = [\text{جتا } (٩٠-٥) + \text{ت} (٩٠-٥)]$$

$$٥ = [\text{جا } ٥ + \text{ت} (٥)]$$

$$٥ = \left[\frac{٢}{٥} + \frac{٤}{٥} \text{ت} \right] \text{ وهي الصورة الجبرية}$$

مثال: أوجد قيمة $\left(\frac{\text{ت}-١}{\text{ت}+١} \right)$

الحل

$$\text{ت} = \frac{٢-١}{١+١} = \frac{٢-١}{٢} = \frac{١}{٢}$$

$$\therefore \left(\frac{\text{ت}-١}{\text{ت}+١} \right) = \left(\frac{١}{٢} - ١ \right) = -\frac{1}{2}$$

مثال: إذا كان $١٠ = [\text{جتا } (٣١٠) + \text{ت} (٣١٠)]$ ، $١٤ = [\text{جتا } (١٠٠) + \text{ت} (١٠٠)]$

أوجد الصورة المثلثية والجبرية لكل من $\frac{١٤}{١٠}$ ، $\frac{١٠}{١٤}$

الحل

$$\frac{١٤}{١٠} = \frac{1}{٥} [\text{جتا } (٣١٠-١٠٠) + \text{ت} (٣١٠-١٠٠)]$$

$$= [\text{جتا } ٢١٠ + \text{ت} (٢١٠)]$$

$$= [-٣٠ \text{ جتا} - ٣٠ \text{ ت}] \text{ الصورة المثلثية}$$

$$= [-\frac{٣}{٢} \sqrt{٧} - \frac{1}{٢} \text{ت}] \text{ الصورة الجبرية}$$

$$\frac{١٠}{١٤} = \frac{1}{٢} [\text{جتا } (٢١٠-١٠٠) + \text{ت} (٢١٠-١٠٠)]$$

$$= [\text{جتا } ١٥٠ + \text{ت} (١٥٠)]$$

$$= [٣٠ \text{ جتا} + ٣٠ \text{ ت}] \text{ الصورة المثلثية}$$

$$= [\frac{٣}{٢} \sqrt{٧} + \frac{1}{٢} \text{ت}] \text{ الصورة الجبرية}$$

مثال: ضع كل من العددين $\sqrt{2}t$ ، $t+1$ على الصورة المثلثية ثم أوجد $\left(\frac{\sqrt{2}t}{t+1}\right)^4$

الحل

$$\sqrt{2}t = t \left(\cos \frac{\pi}{4} + j \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$t+1 = t \left(\cos \frac{\pi}{4} + j \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$= \cos \frac{\pi}{4} + j \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}t}{t+1}\right)^4 = \cos 2\pi + j \sin 2\pi = 1$$

تمارين (٩)

■ أوجد الصورة المثلثية لكل من $e^{j\pi/6}$ ، $e^{-j\pi/6}$ ، $e^{j\pi/3}$ ، $e^{-j\pi/3}$ في كل مما يأتي :-

$$(1) \quad e^{j\pi/6} = \cos \frac{\pi}{6} + j \sin \frac{\pi}{6} \quad , \quad e^{-j\pi/6} = \cos \frac{\pi}{6} - j \sin \frac{\pi}{6}$$

$$(2) \quad e^{j\pi/3} = \cos \frac{\pi}{3} + j \sin \frac{\pi}{3} \quad , \quad e^{-j\pi/3} = \cos \frac{\pi}{3} - j \sin \frac{\pi}{3}$$

$$(3) \quad e^{j\pi/2} = \cos \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{\pi}{2} \quad , \quad e^{-j\pi/2} = \cos \frac{\pi}{2} - j \sin \frac{\pi}{2}$$

$$(4) \quad e^{j\pi} = \cos \pi + j \sin \pi \quad , \quad e^{-j\pi} = \cos \pi - j \sin \pi$$

■ أوجد الصور المثلثية لكل من $e^{j\pi/4}$ ، $e^{-j\pi/4}$ في كل مما يأتي :-

$$(5) \quad \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos \frac{\pi}{4} + j \sin \frac{\pi}{4}$$

$$(6) \quad \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos \frac{\pi}{4} - j \sin \frac{\pi}{4}$$

(٧) أكتب الصورة المثلثية لكل من العددين المركبين :

$$e^{j\pi/4} = \cos \frac{\pi}{4} + j \sin \frac{\pi}{4} \quad , \quad e^{-j\pi/4} = \cos \frac{\pi}{4} - j \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\text{أولاً: } e^{j\pi/4} = \cos \frac{\pi}{4} + j \sin \frac{\pi}{4} \quad \text{ثانياً: } e^{-j\pi/4} = \cos \frac{\pi}{4} - j \sin \frac{\pi}{4}$$

$$(8) \quad \text{إذا كان } e^{j\pi/4} = \cos \frac{\pi}{4} + j \sin \frac{\pi}{4} \quad , \quad e^{-j\pi/4} = \cos \frac{\pi}{4} - j \sin \frac{\pi}{4}$$

$$e^{j\pi/4} = \cos \frac{\pi}{4} + j \sin \frac{\pi}{4} \quad , \quad e^{-j\pi/4} = \cos \frac{\pi}{4} - j \sin \frac{\pi}{4}$$

$$(9) \quad \text{إذا كان } e^{j\pi/4} = \cos \frac{\pi}{4} + j \sin \frac{\pi}{4} \quad , \quad e^{-j\pi/4} = \cos \frac{\pi}{4} - j \sin \frac{\pi}{4}$$

$$e^{j\pi/4} = \cos \frac{\pi}{4} + j \sin \frac{\pi}{4}$$

$$(10) \quad \text{اختصر لأبسط صورة } \frac{(\cos \frac{\pi}{4} + j \sin \frac{\pi}{4})^4}{(\cos \frac{\pi}{4} - j \sin \frac{\pi}{4})^4}$$

نظرية ديموافر

■ إذا كان n عددا نسبيا فإن : (جتا h + ت جا h) n = جتا h + ت جا n h

■ إذا كان n عدد صحيح موجب أو سالب فإن :

$$(\text{جتا } h + \text{ت جا } h)^n = [\text{جتا } (h + \text{رط}^2) + \text{ت جا } (h + \text{رط}^2)]^n$$

$$= \text{جتا } n \text{ جا } h + \text{ت جا } n \text{ جا } h$$

■ إذا كان n كسر حقيقي وليكن $n = \frac{1}{k}$ (جتا h + ت جا h) $\frac{1}{k}$

$$= \frac{\text{جتا } h + \text{رط}^2}{k} + \frac{\text{ت جا } h + \text{رط}^2}{k}$$

لذلك المقدار (جتا h + ت جا h) $\frac{1}{k}$ له k من القيم المختلفة نحصل عليها بالتعويض في

المقدار (جتا $h + \text{رط}^2$ + ت جا $h + \text{رط}^2$) عن $r = 0, 1, 2, \dots$ إلى ($k - 1$)

مثال: اختصر الآتي: (جتا $\frac{\pi}{4}$ + ت جا $\frac{\pi}{4}$)⁴

الحل

$$(\text{جتا } \frac{\pi}{4} + \text{ت جا } \frac{\pi}{4})^4 = \text{جتا } \frac{\pi}{4} \times 4 + \text{ت جا } \frac{\pi}{4} \times 3$$

$$= \text{جتا } \frac{\pi}{4} + \text{ت جا } \frac{\pi}{4}$$

$$= 1 + 0 = 1$$

مثال: أثبت أن $\frac{(\text{جتا } \frac{\pi}{4} + \text{ت جا } \frac{\pi}{4})^n (\text{جتا } \frac{\pi}{4} - \text{ت جا } \frac{\pi}{4})^n}{(\text{جتا } \frac{\pi}{4} + \text{ت جا } \frac{\pi}{4})^n} = 1$

الحل

$$\frac{(\text{جتا } \frac{\pi}{4} + \text{ت جا } \frac{\pi}{4})^n (\text{جتا } \frac{\pi}{4} - \text{ت جا } \frac{\pi}{4})^n}{(\text{جتا } \frac{\pi}{4} + \text{ت جا } \frac{\pi}{4})^n}$$

$$= \frac{(\text{جتا } \frac{\pi}{4} + \text{ت جا } \frac{\pi}{4})^n (\text{جتا } \frac{\pi}{4} - \text{ت جا } \frac{\pi}{4})^n}{(\text{جتا } \frac{\pi}{4} + \text{ت جا } \frac{\pi}{4})^n}$$

$$\frac{\text{جتا } \frac{\pi}{6} + \text{ت جا } \frac{\pi}{6}}{\text{جتا } \frac{\pi}{3} + \text{ت جا } \frac{\pi}{3}} = \frac{\text{جتا } (\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}) + \text{ت جا } (\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6})}{\text{جتا } \frac{\pi}{3} + \text{ت جا } \frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{\text{جتا } (\frac{\pi}{3}) + \text{ت جا } (\frac{\pi}{3})}{\text{جتا } \frac{\pi}{3} + \text{ت جا } \frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{\text{جتا } \frac{\pi}{3} + \text{ت جا } \frac{\pi}{3}}{\text{جتا } \frac{\pi}{3} + \text{ت جا } \frac{\pi}{3}} = 1 + \text{ت} = 1 + \text{ت}$$

مثال: أثبت أن: $\frac{1}{4} = \frac{\text{ت}}{(\text{جتا } \frac{\pi}{4} - \text{ت جا } \frac{\pi}{4})}$ $(1 - \sqrt{3} \text{ت})$

الحل

الطرف الأيمن = $\frac{\text{ت}}{(\text{جتا } \frac{\pi}{4} - \text{ت جا } \frac{\pi}{4})} = \frac{\text{ت}}{[\text{جتا } (\frac{\pi}{4}) + \text{ت جا } (\frac{\pi}{4})]}$

$$= \frac{\text{ت}}{\text{جتا } (\frac{\pi}{4}) + \text{ت جا } (\frac{\pi}{4})} = \frac{\text{ت}}{\text{جتا } \frac{\pi}{4} - \text{ت جا } \frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\text{ت}}{\text{جتا } \frac{\pi}{4} - \text{ت جا } \frac{\pi}{4}} = \frac{\text{ت}}{\frac{1}{\sqrt{2}} - \text{ت} \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\text{ت}}{\frac{1 - \text{ت}}{\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{\text{ت}}{\frac{1 - \text{ت}}{\sqrt{2}}} = \frac{\text{ت} \sqrt{2}}{1 - \text{ت}} \quad \text{بالتضرب في مرافق المقام}$$

$$= \frac{(1 - \sqrt{3} \text{ت})}{4} = \frac{1}{4} (1 - \sqrt{3} \text{ت}) = \text{الطرف الأيسر}$$

مثال: باستخدام نظرية بيموافر عبر عن كل من : جا ٣ هـ ، جتا ٣ هـ بدلالة قوس جاه ، جتا هـ

الحل

الفكرة: نكتب العدد الذي مقياسه = ١ ، سعه = ٣ هـ على صورة بيموافر

$$\therefore \text{جتا } ٣ هـ + \text{ت جا } ٣ هـ = (\text{جتا } ٣ هـ + \text{ت جا } ٣ هـ)$$

بفك الطرف الأيسر بنظرية ذات الحدين

$$= \text{جتا } ٣ هـ + ٢ \text{جتا } ٣ هـ (ت جا هـ) + \text{جتا } ٣ هـ (ت جا هـ) + \text{ت جا } ٣ هـ (ت جا هـ)$$

$$= \text{جتا } ٣ هـ + ٢ \text{جتا } ٣ هـ (ت جا هـ) - \text{ت جا } ٣ هـ (ت جا هـ) - \text{ت جا } ٣ هـ (ت جا هـ)$$

$$= (\text{جتا } ٣ هـ - \text{ت جا } ٣ هـ (ت جا هـ)) + (\text{جتا } ٣ هـ - \text{ت جا } ٣ هـ (ت جا هـ))$$

وبمساواة الحقيقي بالتخيلي والتخيلي بالتخيلي

$$\therefore \text{جتا}^2 \text{هـ} = \text{جتا}^2 \text{هـ} - \text{جا}^2 \text{هـ} \text{جتا هـ}$$

$$= \text{جتا}^2 \text{هـ} - (1 - \text{جتا}^2 \text{هـ}) \text{جتا هـ}$$

$$= \text{جتا}^2 \text{هـ} - \text{جتا هـ} + \text{جتا}^3 \text{هـ}$$

$$= 4 \text{جتا}^2 \text{هـ} - 3 \text{جتا هـ}$$

$$، \text{جا}^3 \text{هـ} = 3 \text{جا هـ} \text{جتا}^2 \text{هـ} - \text{جا}^4 \text{هـ}$$

$$= 3 \text{جا هـ} (1 - \text{جتا}^2 \text{هـ}) - \text{جا}^4 \text{هـ}$$

$$= 3 \text{جا هـ} - 4 \text{جا}^3 \text{هـ}$$

مثال: باستخدام نظرية دي موافر أو جد قيمة كل من جتا ٢ هـ ، جا ٢ هـ بدلالة النسب المثلثية للزاوية هـ .

الحل

$$\text{من دي موافر (جتا هـ + ت جا هـ)}^2 = \text{جتا}^2 \text{هـ} + \text{ت جا}^2 \text{هـ} \text{---- (١)}$$

$$، \text{جبرياً (جتا هـ + ت جا هـ)}^2 = \text{جتا}^2 \text{هـ} + \text{ت جا}^2 \text{هـ} + 2 \text{جا هـ} \text{جتا هـ} \text{ت}$$

$$= \text{جتا}^2 \text{هـ} - \text{جا}^2 \text{هـ} + 2 \text{جا هـ} \text{جتا هـ} \text{ت}$$

$$= (\text{جتا}^2 \text{هـ} - \text{جا}^2 \text{هـ}) + 2 \text{جا هـ} \text{جتا هـ} \text{ت} \text{---- (٢)}$$

من (١) ، (٢) واستخدام خصائص تساوي عددين مركبين

$$\therefore \text{جتا}^2 \text{هـ} + \text{ت جا}^2 \text{هـ} = (\text{جتا}^2 \text{هـ} - \text{جا}^2 \text{هـ}) + 2 \text{جا هـ} \text{جتا هـ} \text{ت}$$

$$\therefore \text{جتا}^2 \text{هـ} = \text{جتا}^2 \text{هـ} - \text{جا}^2 \text{هـ} ، \text{جا}^2 \text{هـ} = 2 \text{جا هـ} \text{جتا هـ} \text{ت}$$

مثال: إذا كان $\text{ع} = 2$ ، $\text{ع} = 4$ ، $(\text{جتا هـ} + \text{ت جا هـ})^2 = 4$ ، $(\text{جتا}^2 \text{هـ} + \text{ت جا}^2 \text{هـ}) = 4$

$$\text{ع} = 2 = \frac{1}{4} (\text{جتا}^2 \text{هـ} + \text{ت جا}^2 \text{هـ}) \text{ أوجد الصورة الجبرية للعدد: } \frac{\text{ع} \times \text{ع}}{\text{ع}}$$

$$\text{علماً بأن هـ} \in [0, 90] ، \text{ظا هـ} = \frac{3}{4}$$

الحل

$$\text{ع} = 2 = (\text{جتا هـ} + \text{ت جا هـ})^2 \text{---- (١)}$$

$$، \text{ع} = 4 = \text{جتا}^2 \text{هـ} + \text{ت جا}^2 \text{هـ} \text{---- (٢)}$$

$$= 2 = (\text{جتا}^2 \text{هـ} + \text{ت جا}^2 \text{هـ}) \text{---- (٢)}$$

$$ع^{\circ} = \left(\frac{1}{4} \right)^{\circ} [جتاه + ت جا ه] \text{ ---- (٣)}$$

من (١)، (٢)، (٣)

$$\frac{١٠٢ \times ٢^{\circ}}{(٠)} = \frac{٢٠٤ \times ١٤^{\circ}}{٢٤} [جتا(٥٥ هـ - ٦ هـ) + ت جا(٥ هـ - ٦ هـ)]$$

$$= [جتا(٢٠ هـ) + ت جا(٢٠ هـ)] \text{ ---- (٤)}$$

$$، \because طاه = \frac{٢}{٤} هـ ، [٣٠ هـ] ٩٠ هـ$$

$$\therefore جتا(٢٠ هـ) = جتا ٢ هـ = ٢ جتا ١ هـ$$

$$\frac{٧}{٢٥} = ١ - \frac{٢٢}{٢٥} = ١ - \left(\frac{٤}{٥} \right)^{\circ} \times ٢ =$$

$$، جتا(٢٠ هـ) = جتا ٢ هـ = ٢ جتا ١ هـ$$

$$\frac{٢٤}{٢٥} = \frac{٤}{٥} \times \frac{٢}{٥} \times ٢ =$$

، بالتعويض في (٤) ينتج أن :-

$$\frac{٤٨}{٢٥} - \frac{١٤}{٢٥} = (ت \frac{٢٤}{٢٥} - \frac{٧}{٢٥}) \times ٢ = \frac{٢٠٤ \times ١٤^{\circ}}{٢٤}$$

مثال: أوجد المقياس والسعة للعدد المركب $ع = (١ + جتا + ت جا)^{\circ}$

الحل

نضع $١ + جتا + ت جا$ في الصورة القطبية

$$\therefore ١ + جتا = ٢ جتا \frac{١}{٢} ، جتا = ٢ جا \frac{١}{٢} جتا \frac{١}{٢}$$

$$\therefore ١ + جتا + ت جا = ٢ جتا \frac{١}{٢} + ت \times ٢ جا \frac{١}{٢} جتا \frac{١}{٢}$$

$$= ٢ جتا \frac{١}{٢} (جتا \frac{١}{٢} + ت جا \frac{١}{٢})$$

$$\therefore ع^{\circ} = ٢ جتا \frac{١}{٢} (جتاه \times \frac{١}{٢} + ت جا \times \frac{١}{٢})$$

$$\therefore |ع| = ٢٢ جتا \frac{١}{٢} ، سعة العدد = \frac{١٥}{٢}$$

مثال: اختصر العدد الآتي إلى الصورة الجبرية :-

$$ع = \frac{(جتا \frac{\pi}{4} + ت جا \frac{\pi}{4}) \times (جتا \frac{\pi}{4} + ت جا \frac{\pi}{4})}{(جتا \frac{\pi}{4} + ت جا \frac{\pi}{4})}$$

الحل

بتطبيق نظرية ديموافر على البسط والمقام

$$\therefore ع = \frac{(جتا \frac{\pi}{4} + ت جا \frac{\pi}{4}) \times (جتا \frac{\pi}{4} + ت جا \frac{\pi}{4})}{جتا (\frac{\pi}{4}) + ت جا (\frac{\pi}{4})}$$

$$= [جتا (\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}) + ت جا (\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4})]$$

$$= جتا \frac{\pi}{4} + ت جا \frac{\pi}{4} = جتا ٢٢٥ + ت جا ٢٢٥$$

$$= جتا (١٨٠ + ٤٥) + ت جا (١٨٠ + ٤٥)$$

$$= -\sqrt{\frac{1}{2}} - ت \sqrt{\frac{1}{2}} = -\sqrt{\frac{1}{2}} (١ + ت)$$

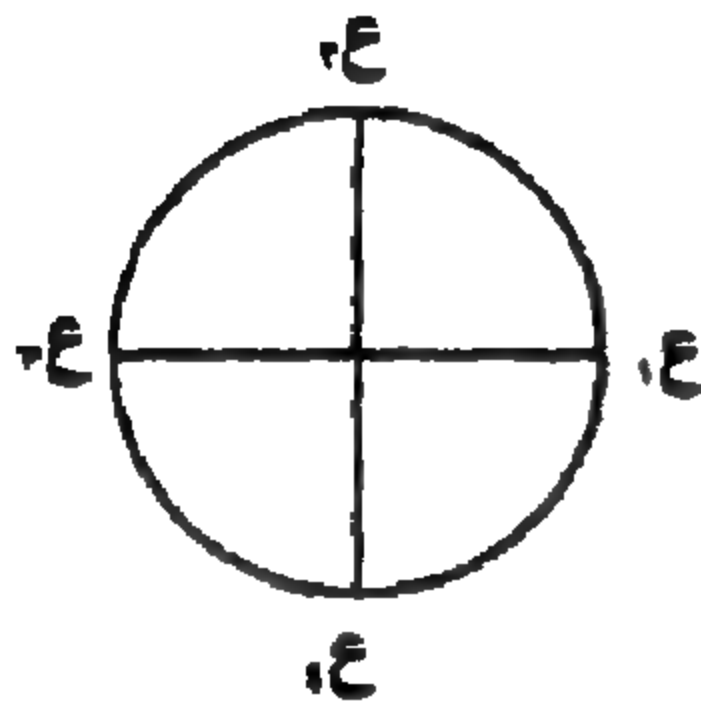
استخدام نظرية دي موافر لإيجاد جذور الأعداد المركبة

إذا كان العدد المركب $E = L (\cos \theta + j \sin \theta)$ ، ن عدد صحيح موجب فإن E له n من الجذور المختلفة التي تعطي بالقانون :

$$E^{\frac{1}{n}} = L^{\frac{1}{n}} [\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + j \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n}] , k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

مثال: للمعادلة $S^4 = 1$ أربعة جذور أحدهما $R = 1$ ($\cos 0 + j \sin 0$) أوجد الجذور الأخرى.

الحل



$$\therefore S^4 = 1$$

$$\therefore \cos \theta + j \sin \theta = 1$$

لإيجاد بقية الجذور يضاف لكل زاوية $(\frac{360}{4} = 90)$

$$\therefore \cos 90 + j \sin 90 = j$$

$$\cos 180 + j \sin 180 = -1$$

$$\cos 270 + j \sin 270 = -j$$

مثال: ضع العدد المركب $-8 + j\sqrt{3}$ في الصورة $R (\cos \theta + j \sin \theta)$

ثم أوجد $\sqrt[4]{-8 + j\sqrt{3}}$

الحل

$$-8 + j\sqrt{3} = R (\cos \theta + j \sin \theta)$$

$$R = \sqrt{(-8)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{64 + 3} = \sqrt{67} \quad \therefore R = \sqrt{67}$$

$$\cos \theta = \frac{-8}{\sqrt{67}} = \frac{S}{R} \quad \therefore \theta = \cos^{-1} \left(\frac{S}{R} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{-8}{\sqrt{67}} \right)$$

$$\therefore \theta = 180 - 60 = 120$$

$$\therefore -8 + j\sqrt{3} = \sqrt{67} (\cos 120 + j \sin 120)$$

لإيجاد الجذر الرابع فقط لابد من إيجاد الجذر الأول

$$١٤ = \sqrt[4]{١٦} [\text{جتا} \frac{١٢٠}{٤} + \text{ت جا} \frac{١٢٠}{٤}] = ٢ [\text{جتا} ٣٠ + \text{ت جا} ٣٠]$$

$$١٤ = ٢ [\text{جتا} (٢٧٠ + ٣٠) + \text{ت جا} (٢٧٠ + ٣٠)] = ٢ [\text{جتا} ٣٠٠ + \text{ت جا} ٣٠٠]$$

مثال: أثبت أن (١ + ت) = ١٠ حيث ١٠.٢٤ = $\sqrt[10]{١٠}$

الحل

$$(١ + ت)^{١٠} = [(١ + ت)]^{١٠}$$

$$= (١ + ١ - ١)^{١٠} = (٢)^{١٠}$$

$$١٠.٢٤ = ١٠ \times ١٠.٢٤ = ٢ \times ١٠.٢٤ = ٢ \times ١٠ = ١٠$$

مثال: أوجد الجذور الخمسة للعدد ٣٢

الحل

$$٣٢ = ١ \times ٣٢ [\text{جتا} . + \text{ت جا} .]$$

$$\therefore \sqrt[5]{٣٢} = ١ [\text{جتا} \frac{٣٦٠}{٥} + \text{ت جا} \frac{٣٦٠}{٥}]$$

لإيجاد بقية الجذور يضاف لكل زاوية على التتابع

$$٧٢ = \frac{٣٦٠}{٥}$$

$$٢ = ٢ [\text{جتا} ٧٢ + \text{ت جا} ٧٢]$$

$$٣ = ٣ [\text{جتا} ١٤٤ + \text{ت جا} ١٤٤]$$

$$٤ = ٤ [\text{جتا} ٢١٦ + \text{ت جا} ٢١٦]$$

$$٥ = ٥ [\text{جتا} ٢٨٨ + \text{ت جا} ٢٨٨]$$

مثال: إذا كانت س = ١ + ت فحول س إلى الصورة المثلثية ثم أوجد قيمة س^{١٠}

الحل

$$س = ١ + ت$$

$$٢ = \sqrt[10]{١ + ١} = \sqrt[10]{٢}$$

$$١ = \frac{١}{٢} = ط$$

$$\therefore ه = ٤٥$$

$$س = \sqrt[10]{٢} [\text{جتا} ٤٥ + \text{ت جا} ٤٥]$$

$$س^{١٠} = [\sqrt[10]{٢} [\text{جتا} ٤٥ + \text{ت جا} ٤٥]]^{١٠} = ٢ [\text{جتا} ٤٥٠ + \text{ت جا} ٤٥٠]$$

$$= ٢ [\text{جتا} ٩٠ + \text{ت جا} ٩٠] = ٣٢$$

إيجاد الجذرين التربيعيين للعدد المركب

لكل عدد مركب $E = L (جناه + ت جاه)$ يوجد جذران تربيعيان مقياس كل منهما \sqrt{L}

وسعة الأولي $\frac{ه}{٤}$ وسعة الثاني $(\frac{ه}{٤} + ط)$

أي الجذران هما

$$\sqrt{L} (جناه + \frac{ه}{٤} ت جاه) , \sqrt{L} [جناه (\frac{ه}{٤} + ط) + ت جاه (\frac{ه}{٤} + ط)]$$

مثال: أوجد الجذرين التربيعيين للعدد $E = ٢ + ٢\sqrt{٣}$ بتحويله إلى الصورة القطبية
الحصل

نضع العدد E بالصورة القطبية

$$L = ٤ = \sqrt{١٢ + ٤\sqrt{٣}} = \sqrt{(\sqrt{٣})^2 + (\sqrt{٢})^2} = |ع|$$

$$\therefore \theta = ٦٠^\circ$$

$$جناي = \frac{س}{L} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$$

$$\therefore ه = ٦٠ - ١٨٠ = ١٢٠$$

$$\therefore ع = (٢ - \sqrt{٣}, ٢ + \sqrt{٣}) \text{ تقع في الربع الثاني}$$

$$\therefore ع = ٤ (جناه ١٢٠ + ت جاه ١٢٠)$$

$$\therefore \sqrt{٤} = \sqrt{٤} (جناه \frac{١٢٠}{٤} + ت جاه \frac{١٢٠}{٤})$$

$$٢ = (جناه ٦٠ + ت جاه ٦٠) \sqrt{٣} + ١$$

$$١، \sqrt{٤} = \sqrt{٤} [جناه (١٨٠ + ٦٠) + ت جاه (١٨٠ + ٦٠)]$$

$$٢ = [(جناه ٦٠) - (ت جاه ٦٠)] \sqrt{٣} - ١$$

ملاحظة:

كل من الجذرين التربيعيين لأي عدد مركب هو المعكوس الجمعي للآخر فإذا كان الجذر

الأول هو $س + ت ص$ فإن الآخر $- س - ت ص = -(س + ت ص)$.

إيجاد الجذرين التربيعيين لعدد مركب جبرياً

مثال: أوجد جبرياً الجذرين التربيعيين للعدد $٧-٢٤ ت$

الحل

نفرض أن $\sqrt{٧-٢٤ ت} = س + ت ص$ وبتربيع الطرفين

$$٧-٢٤ ت = س^٢ - ٢ س ت + ٢ ص ت$$

$$\therefore س^٢ - ٢ ص ت = ٧-٢٤ ت \quad (١)$$

$$٢ س ص = ٢٤ ت \quad (٢)$$

$$\therefore ص = \frac{١٢}{س}$$

$$\text{بالتعويض في (١)} \quad \therefore س^٢ - \frac{١٤٤}{س} = ٧-٢٤ ت$$

$$\therefore س^٣ + ٢ س - ١٤٤ = ٠$$

$$(س-٩)(س^٢ + ٩ س + ١٦) = ٠ \quad \therefore س = ٩$$

$$\therefore س = ٣ \text{ أو } س = ١٦ \text{ وهذا مرفوض}$$

$$\text{بالتعويض في (٢)} \quad \therefore ص = \pm \frac{١٢}{٩}$$

$$\therefore \text{الجذران التربيعيان هما } \pm (٣ + ٤ ت)$$

مثال: ضع العدد ٢ بالصورة القطبية

الحل

$$\therefore ٢ = ٢ (جتا ٠ + ت جا ٠)$$

$$\therefore \sqrt{٢} = \sqrt{٢} (جتا \frac{١}{٢} + ت جا \frac{١}{٢})$$

$$= \sqrt{٢} (جتا ٤٥ + ت جا ٤٥) = ١ + ت$$

$$ا، \sqrt{٢} = \sqrt{٢} [جتا (٤٥ + ١٨٠) + ت جا (٤٥ + ١٨٠)]$$

$$= \sqrt{٢} (-جتا ٤٥ - ت جا ٤٥) = -١ - ت$$

$$\therefore \text{الجذران هما } \pm (١ + ت)$$

ثانياً: الطريقة الجبرية :-

نفرض أن $\sqrt{٢} = س + ت ص$

$$\therefore ٢ = (س^٢ - ٢ س ص + ٢ ص ت)$$

$$\therefore س^٢ - ٢ ص ت = ٢ \quad (١)$$

$$\therefore س ص = ١ \quad (٢) \quad \therefore ص = \frac{١}{س} \quad \text{بالتعويض في (١)}$$

$$\therefore \text{س} = \pm 1$$

$$\therefore \text{س}^2 = 1$$

$$\therefore \text{س}^2 - \frac{1}{\text{س}} = 0$$

$$\therefore \text{ص} = \pm 1$$

بالتعويض في (٢)

$$\therefore \text{الجذران هما } 1 \pm 1 \times \text{ت} = \pm (\text{ت} + 1)$$

مثال: إذا كان $\sqrt{\frac{\text{ت}^2 + 7}{\text{ت}^2 - 5}} = \text{أ} + \text{ب} \sqrt{\text{ت}}$ حيث أ ، ب حقيقيان أوجد قيم أ ، ب

الحل

$$\frac{\text{ت}^2 + 7}{\text{ت}^2 - 5} = \frac{\text{ت}^2 + 5}{\text{ت}^2 + 5} \times \frac{\text{ت}^2 + 7}{\text{ت}^2 - 5} = \text{الكسر}$$

$$= \frac{\text{ت}^4 + 12\text{ت}^2 + 35}{\text{ت}^4 - 25} = \frac{\text{ت}^4 + 3\text{ت}^2 + 4}{\text{ت}^4 - 25}$$

$$\therefore \sqrt{\text{ت}^4 + 3\text{ت}^2 + 4} = \text{أ} + \text{ب} \sqrt{\text{ت}}$$

$$\therefore \text{ت}^4 + 3\text{ت}^2 + 4 = \text{أ}^2 + 2\text{أب} \sqrt{\text{ت}} + \text{ب}^2 \text{ت}$$

$$\therefore \text{أ}^2 - 3\text{ت}^2 = 4 - 2\text{أب} \sqrt{\text{ت}} \quad (1)$$

$$\therefore \text{ب} = \frac{2}{\sqrt{\text{ت}}} \text{ وبالتعويض في (1)}$$

$$\therefore \text{أ}^2 - 3\text{ت}^2 = 4 - 4\sqrt{\text{ت}} \quad \therefore \text{أ}^2 - 3\text{ت}^2 + 4\sqrt{\text{ت}} - 4 = 0$$

$$\therefore (\text{أ}^2 - 4)(-3\text{ت}^2 + 4\sqrt{\text{ت}}) = 0$$

$$\therefore \text{أ}^2 = 4 \quad \therefore \text{أ} = \pm 2 \quad \therefore \text{ب} = \pm 2$$

مثال: أوجد قيم س ، ص الحقيقية التي تحقق المعادلة :

$$(\text{س} + \text{ت} \sqrt{\text{ص}}) - 4 = \frac{\sqrt{\text{ت}^2 + 3}}{\text{ت} - 3\sqrt{\text{ص}}} + 4 = \text{صفر}$$

الحل

$$\frac{\sqrt{\text{ت}^2 + 3}}{\text{ت} - 3\sqrt{\text{ص}}} = \frac{\sqrt{\text{ت}^2 + 3}}{\text{ت} - 3\sqrt{\text{ص}}} \times \frac{\text{ت} + 3\sqrt{\text{ص}}}{\text{ت} + 3\sqrt{\text{ص}}} = \frac{\text{ت} + 3\sqrt{\text{ص}}}{\text{ت}^2 - 9\text{ص}}$$

بالتعويض بهذه القيمة عن الكسر في المعادلة

$$\therefore (\text{س} + \text{ت} \sqrt{\text{ص}}) - 4 = \frac{\text{ت} + 3\sqrt{\text{ص}}}{\text{ت}^2 - 9\text{ص}} + 4 = \text{صفر}$$

$$\therefore (\text{س} + \text{ت} \sqrt{\text{ص}}) - 4 = \frac{\text{ت} + 3\sqrt{\text{ص}}}{\text{ت}^2 - 9\text{ص}} + 4 = 0$$

$$\therefore (\text{س} + \text{ت} \sqrt{\text{ص}}) = 4 - \frac{\text{ت} + 3\sqrt{\text{ص}}}{\text{ت}^2 - 9\text{ص}}$$

$$\therefore \text{س} - \text{ص} + 2\text{س} \sqrt{\text{ص}} = 4 - \frac{\text{ت} + 3\sqrt{\text{ص}}}{\text{ت}^2 - 9\text{ص}}$$

$$\begin{array}{ll}
\therefore \text{س}^2 - \text{ص}^2 = 2- & \text{----- (1)} \\
\therefore \text{س} \text{ ص} = \sqrt{2} & \\
\text{بالتعويض في (1)} & \\
\text{بالضرب في س} & \\
\therefore \text{س}^4 + 2\text{س}^2 - 3 = 0 & \\
\therefore \text{س}^2 = 3- \text{ (مرفوض) } \text{أ، س}^2 = 1 & \\
\text{بالتعويض في (2)} & \\
\therefore \text{س} = \pm 1 & \\
\therefore \text{ص} = \pm \sqrt{2} & \\
\text{----- (2)} & \\
\therefore \text{س}^2 = 2- & \\
\therefore \text{س} \text{ ص} = \sqrt{2} & \\
\therefore \text{س}^2 - 2\text{س}^2 = 2- & \\
\therefore -\text{س}^2 = 2- & \\
\therefore \text{س}^2 = 1- & \\
\therefore \text{س} = \pm 1- & \\
\therefore \text{ص} = \pm \sqrt{2} &
\end{array}$$

مثال: إذا كانت $3 \leq x$ فأوجد مجموعة الحل للمعادلة $2 - (x+2) - (x+1) = 0$

الحل

$$\therefore \text{س} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{حيث } a=1, b=-(x+2), c=-(x+1)$$

$$\therefore \text{س} = \frac{(x+2) \pm \sqrt{(x+2)^2 + 4(x+1)}}{2} = \frac{(x+2) \pm \sqrt{x^2 + 4x + 4 + 4x + 4}}{2}$$

ثم نفرض أن $\sqrt{x^2 + 4x + 4} = l + t$ وبتربيع الطرفين

$$\therefore x^2 + 4x + 4 = l^2 + t^2 + 2lt$$

$$\therefore x^2 + 4x + 4 = l^2 + t^2 + 2lt \quad \text{----- (1)} \quad 4x = l^2 + t^2$$

$$\text{بتربيع (1)، (2) والجمع} \quad \therefore (l+t)^2 = 4x+5$$

$$\therefore l^2 + t^2 + 2lt = 4x+5 \quad \text{----- (3)}$$

$$\text{بجمع (1)، (3)} \quad 4x = l^2 + t^2 \quad \therefore l^2 = 4x-16$$

$$\text{بطرح (1) من (3)} \quad 18 = t^2 \quad \therefore t = 3$$

$$\therefore \sqrt{x^2 + 4x + 4} = \pm (3 + t)$$

$$\therefore \text{س} = \frac{(x+2) \pm (3+t)}{2}$$

$$\therefore \text{س} = \frac{(x+2) \pm (3+t)}{2} = \frac{x^2 + 4x + 4 \pm (3+t)^2}{2}$$

$$\text{أ، س} = \frac{x^2 + 4x + 4 \pm (3+t)^2}{2} = \frac{x^2 + 4x + 4 \pm (3+t)^2}{2}$$

\therefore مجموعة الحل للمعادلة هي: $\{x+3, x-1\}$

تمارين (١٠)

- استخدم نظرية ديموافر الجذرين التربيعين لكل من الأعداد الآتية:

$$(١) \quad ٢- \text{ت} \quad (٢) \quad ١- \sqrt[٣]{٧} \text{ت}$$

$$(٣) \quad ٢- \sqrt[٣]{٧} + \text{ت} \quad (٤) \quad ٤ (جنا \frac{٣}{٤} - \text{ت} \text{جا} \frac{٣}{٤})$$

$$(٥) \quad ٩ (جنا ٣٠٠ + \text{ت} \text{جا} ٣٠٠) \quad (٦) \quad \frac{٨-}{\sqrt[٣]{٧} + ١} \text{ت}$$

- أوجد الجذرين التربيعين لكل مما يأتي دون التحويل للصورة المثلثية :-

$$(٧) \quad ٦- ٨- \text{ت} \quad (٨) \quad ١٢- ٥ \text{ت}$$

$$(٩) \quad \frac{٧- + \text{ت}}{١+ \text{ت}} \quad (١٠) \quad \frac{١٧+ ٣١ \text{ت}}{١- \text{ت}}$$

$$(١١) \quad \text{إذا كان } ٤ + ٣ = ٤ \text{ ت أثبت أن } ٥ + ٤ = ٤ \pm$$

$$(١٢) \quad \text{إذا كان } (س + \text{ت} ص) = ١ + \frac{(١- \text{ت})٨}{١+ \text{ت}} + ١٥ = \text{صفر فأوجد قيمتي س ، ص الحقيقية التي}$$

تحقق المعادلة .

$$(١٣) \quad \text{إذا كان } س + \text{ت} ص = \frac{٧- \text{ت}}{١+ \text{ت}} \text{ حيث س ، ص حقيقتان فأوجد قيمة } \sqrt[٣]{٢- س} - \text{تص}$$

$$(١٤) \quad \text{إذا كانت س} = \frac{١+ \text{ت}}{١- \text{ت}} \text{ ، ص} = \frac{١- \text{ت}}{١+ \text{ت}} \text{ أوجد : قيمة } \sqrt[٣]{٥ س + ٣ ص}$$

$$(١٥) \quad \text{إذا كانت س د ك حل المعادلة}$$

$$(٢+ \text{ت}) س - ٢ - (١+ \text{ت}) ٢ - س - ٤ (١- ٢ \text{ت}) = \text{صفر}$$

- أوجد الصورة المثلثية لقيم المقادير الآتية :-

$$(١٦) \quad \sqrt[٣]{-٧ + \text{ت}} \quad (١٧) \quad \sqrt[٣]{-٦٤ \text{ت}}$$

$$(١٨) \quad \sqrt[٣]{١+ \text{ت}} \quad (١٩) \quad \sqrt[٣]{٣٢}$$

- حل كل من المعادلات الآتية في ك :-

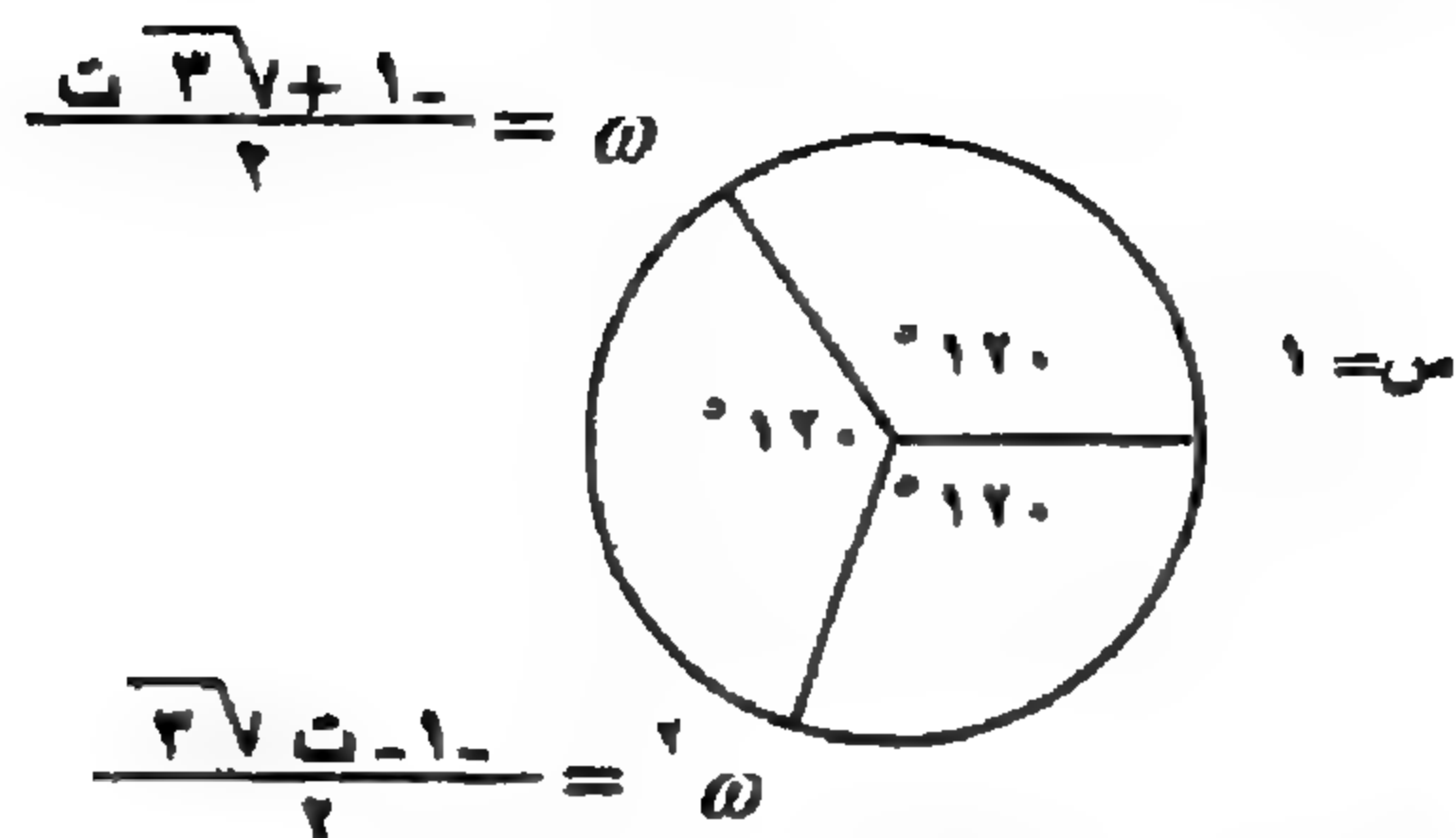
$$(٢٠) \quad ١ + ٠ = ٠$$

$$(٢١) \quad ١- \sqrt[٣]{٧} = ٠ \text{ع} \text{ت}$$

الجزور التكعيبية للواحد الصحيح

$$[\frac{\sqrt[3]{-1-t}}{2} = \omega , \frac{\sqrt[3]{-1+t}}{2} = \omega^2 , 1 = \omega^3]$$

أي للواحد الصحيح ثلاثة جذور أحدهما حقيقي والجذران الآخران تخيليان مترافقان



■ خواص الجزور التكعيبية للواحد الصحيح :

١. مربع أحد الجذرين التخيلين = الجذر التخيلي الآخر .
٢. مجموع الجزور التكعيبية للواحد الصحيح = صفر .
٣. الفرق بين الجذرين التخيلين $\pm \sqrt[3]{-1-t} = \omega$
٤. حاصل ضرب الجذرين التخيلين $= 1$

■ علاقات هامة بين الجزور التكعيبية للواحد الصحيح :

$\sqrt[3]{-1-t} \pm \sqrt[3]{-1-t} = \omega - \omega^2$	$1 = \omega \times \omega^2$	$0 = \omega + \omega^2 + 1$
<u>طرح الجزور</u> إذا اعتبرنا $\sqrt[3]{-1-t} = \omega - \omega^2$ فإن: $\sqrt[3]{-1-t} = \omega + \omega^2$ والعكس صحيح	<u>ضرب الجزور</u> $\frac{1}{\omega} = \omega^2$ $\frac{1}{\omega^2} = \omega$ $1 = \omega \times \omega^2$	<u>جمع الجزور</u> $\omega - \omega^2 = \omega + 1$ $\omega - \omega^2 = \omega + 1$ $1 - \omega^2 = \omega + \omega^2$ $0 = \omega + \omega^2 + 1$

■ كيفية اختزال قوى ω :

اقسم الأس على ٣ وبقي خارج القسمة هو الأس الجديد لـ ω .

$$1 = \omega^0, \quad \omega = \omega^1, \quad \omega^2 = \omega^2, \quad \omega^3 = \omega^0, \quad \omega^4 = \omega^1, \quad \omega^5 = \omega^2, \quad \omega^6 = \omega^0, \quad \omega^7 = \omega^1, \quad \omega^8 = \omega^2, \quad \omega^9 = \omega^0, \quad \omega^{10} = \omega^1, \quad \omega^{11} = \omega^2$$

مثال: أثبت أن $(\omega + 1)^3 = 1$

الحل

$$\omega^3 = (\omega + 1)^3 \therefore \omega^3 = \omega^3 + 3\omega^2 + 3\omega + 1$$

$$\therefore \omega^3 = \omega^3 + 3\omega^2 + 3\omega + 1 \quad \therefore \omega^3 = \omega^3 + 3\omega^2 + 3\omega + 1$$

$$\therefore \omega^3 = \omega^3 + 3\omega^2 + 3\omega + 1 \quad \therefore \omega^3 = \omega^3 + 3\omega^2 + 3\omega + 1$$

$$1 = \frac{1}{\omega^3 + 3\omega^2 + 3\omega + 1} + \frac{1}{\omega^3 + 3\omega^2 + 3\omega + 1}$$

الحل

نجعل المقدار المكون من ثلاثة حدود ثنائي الحد

$$\omega^3 + 3\omega^2 + 3\omega + 1 = (\omega + 1)^3$$

$$\omega + 1 = \omega^2 + 2\omega + 1$$

$$\omega - 1 = \omega^2 - 2\omega + 1$$

$$\therefore \frac{2}{\omega^3 - \omega + \omega^2 - 2} = \frac{\omega + 1 + \omega - 1}{(\omega - 1)(\omega + 2)} = \frac{1}{\omega - 1} + \frac{1}{\omega + 2}$$

$$1 = \frac{2}{2} = \frac{2}{1 + 2} = \frac{2}{(\omega + \omega) - 2} = \frac{2}{\omega - \omega - 2} =$$

مثال: إذا كان ω أحد الجذور التكعيبة للواحد الصحيح فأوجد قيمة :

$$\left(\frac{\omega^4 - \omega^3 - 2}{\omega^3 + 2\omega - 4} - \frac{\omega^4 - \omega^3 + 2}{\omega^2 + \omega^4 - 3} \right)$$

الحل

$$\omega = \frac{(\omega^4 - 3 + \omega^2)\omega}{(\omega^2 + \omega^4 - 3)} = \frac{\omega^4 - \omega^3 + 2}{\omega^2 + \omega^4 - 3}$$

$$\frac{1}{\omega} = \frac{\omega^2 - \omega^2 + 2}{(\omega^2 - \omega^2 + 2)\omega} = \frac{\omega^2 - \omega^2 - 2}{\omega^2 - \omega^2 + 2} : \text{الكسر الثاني}$$

$$\therefore \text{المقدار } \left[\frac{1}{\omega} - \omega \right] = \left[\frac{\omega^2 - \omega^2 - 2}{\omega^2 - \omega^2 + 2} \right]$$

$$2 = \omega^2 - \omega^2 = (\omega^2 - \omega^2) = \left[\frac{\omega^2 - \omega^2 - 2}{\omega^2 - \omega^2 + 2} \right] = \left[\frac{\omega^2 - \omega^2 - 2}{\omega^2 - \omega^2 + 2} \right]$$

مثال: أثبت أن:

$$\text{صفر} = \left(\frac{1}{\omega} + \omega^2 + 2 \right) + \left(\frac{1}{\omega} + \omega^2 + 2 \right) + \left(\frac{1}{\omega} + \omega^2 + 2 \right)$$

الحل

$$\text{الطرف الأيمن} = (\omega^2 + \omega^2 + 2) + (\omega^2 + \omega^2 + 2) + (\omega^2 + \omega^2 + 2)$$

$$[2 + (\omega + \omega)^2] + [\omega^2 + (\omega + 1)^2] + [\omega^2 + (\omega + 1)^2] =$$

$$(\omega^2 + \omega^2) + [\omega^2 + \omega^2 - 2\omega] + [\omega^2 + \omega^2 - 2\omega] =$$

$$1 + \omega + \omega = 1 + \omega + \omega =$$

$$\text{صفر} = 1 + \omega + \omega =$$

$$\omega = \frac{\omega - \omega + 1}{\omega + \omega - 1} : \text{مثال: أثبت أن}$$

الحل

$$\omega = \frac{\omega^2 - \omega^2}{\omega^2 - \omega^2} = \frac{\omega - \omega}{\omega - \omega} = \frac{\omega - (\omega + 1)}{\omega - (\omega + 1)}$$

$$1 = \frac{\omega + 2}{\omega^2 + 1} + \frac{\omega + 2}{\omega^2 + 1} : \text{مثال: أثبت أن}$$

الحل

$$\frac{(\omega^2 + 1)(\omega + 2) + (\omega^2 + 1)(\omega + 2)}{(\omega^2 + 1)(\omega^2 + 1)} = \text{الطرف الأيمن}$$

$$\frac{\omega^2 + \omega + \omega^2 + 2 + \omega^2 + \omega + \omega^2 + 2}{\omega^2 + \omega^2 + \omega^2 + 1} =$$

$$1 = \frac{3}{3} = \frac{7-10}{2-5} = \frac{(\omega + \omega')^7 + 10}{(\omega + \omega')^2 + 5} = \frac{\omega^7 + \omega'^7 + 10}{(\omega + \omega')^2 + 5} =$$

مثال: إذا كانت 1، ω ، ω' هي الجذور التكعيبية للواحد الصحيح فأثبت أن:

$$\sqrt[3]{\omega} \pm \sqrt[3]{\omega'} = \omega - \omega' = \omega' - \omega$$

الحل

$$\frac{\sqrt[3]{\omega} + 1}{2} = \omega', \quad \frac{\sqrt[3]{\omega'} + 1}{2} = \omega$$

$$\sqrt[3]{\omega} = 2\omega' - 1, \quad \sqrt[3]{\omega'} = 2\omega - 1$$

$$\sqrt[3]{\omega} \pm \sqrt[3]{\omega'} = \omega' - \omega$$

$$\omega \pm = \sqrt[3]{\frac{\omega^7 + \omega'^7 + 5}{\omega^7 + \omega'^7 + 7}} \quad \text{مثال: أثبت أن :}$$

الحل

بالتربيع للطرفين

$$\omega = \frac{\omega^7 + \omega'^7 + 5}{\frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega'} + 7}$$

$$\omega = \frac{\omega^7 + (\omega' + 1)^7}{\frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega'} + 7} =$$

$$\omega = \sqrt[3]{\omega} = \sqrt[3]{\frac{\omega^7 + \omega - 5}{\omega^7 + \omega'^7 + 7}} =$$

مثال: حل المعادلة $\omega + 1 = \omega'$ حيث $\omega \neq \omega'$

الحل

$$\omega + 1 = \omega' \Rightarrow \frac{\sqrt[3]{\omega} + 1}{2} = \omega' \Rightarrow \frac{\sqrt[3]{\omega} + 1}{2} = \omega' = \frac{\sqrt[3]{\omega'} + 1}{2} = \omega$$

$$\frac{\sqrt[3]{\omega} + 1}{2} =$$

$$س^٢ = [جنا ٦٠ + ت جا ٦٠]$$

$$س = (جنا \frac{٦٠}{٢} + ت جا \frac{٦٠}{٢}) = (جنا ٣٠ + ت جا ٣٠)$$

$$يضاف \frac{٣٦٠}{٢} = ١٨٠ \therefore س = (جنا ٢١٠ + ت جا ٢١٠)$$

مثال: اثبت ان

$$\frac{٥}{١٢} = \frac{١}{\omega - \omega^٢ + ٣} + \frac{١}{\omega + \omega^٢ - ٢}$$

الحل

$$\omega^٣ - ١ = \omega - ١ \omega^٢ - ٢ = \omega + \omega^٢ - ٢ \therefore$$

$$\omega^٣ + ٤ = \omega + ١ + \omega^٢ + ٣ = (\omega - ١ - ١) - \omega^٢ + ٣ = \omega - \omega^٢ + ٣,$$

$$\frac{١}{\omega^٣ + ٤} + \frac{١}{\omega^٣ - ١} = \text{الطرف الأيمن}$$

$$\frac{٥}{\omega^٩ - \omega^{١٢} - \omega^٣ + ٤} = \frac{\omega^٣ - ١ + \omega^٣ + ٤}{(\omega^٣ + ٤)(\omega^٣ - ١)} =$$

$$\frac{٥}{١٢} = \frac{٥}{(\omega + \omega)^٩ - ٤} = \frac{٥}{\omega^٩ - \omega^{٩-٤}} =$$

$$\frac{٣}{٢} \pm = \sqrt[٢]{\frac{\omega^{١٠} + \omega^{١٠} + ١}{\omega^٣ + \omega^٣ - ١}} \quad \text{مثال: اثبت ان}$$

الحل

$$\frac{٣}{٢} \pm = \sqrt[٢]{\frac{٩-}{٤}} = \sqrt[٢]{\frac{١٠-١}{٣+١}} = \sqrt[٢]{\frac{(\omega + \omega)^{١٠} + ١}{(\omega + \omega)^٣ - ١}} = \text{الطرف الأيمن}$$

$$\text{مثال: إذا كانت } س = \frac{\sqrt[٣]{٧+١}-١}{٢} \text{ فاثبت ان } س^١ + س^٨ + س^١ = ١$$

الحل

$$\frac{\sqrt[٣]{٧+١}-١}{٢} = \omega = س$$

$$٠ = ١ + \omega + \omega^٢$$

$$٠ = ١ + \omega^٨ + \omega^{١٠}$$

مثال: أثبت أن $\gamma = {}^r({}^1\omega - \omega - 1) + {}^r(\omega + 1)$

الحل

$${}^r[({}^1\omega + \omega) - 1] + {}^r(\omega + 1)$$

$${}^r(1+1) + {}^r({}^1\omega -) =$$

$$\gamma = 1 + 1 = {}^r 2 + {}^1\omega - =$$

مثال: اختصر إلى أبسط صورة ${}^r(\frac{{}^1-\omega}{\omega}) - {}^r(\frac{1}{\omega} + 2)$

الحل

$${}^r(\frac{1}{\omega} - {}^r\omega) + {}^r({}^1\omega + 2)$$

$${}^1\omega + \omega 2 - 1 + {}^1\omega + {}^r\omega 1 + 1 =$$

$$\omega 2 - \omega + {}^r\omega 0 + 0 =$$

$$\omega - ({}^r\omega + 1)0 =$$

$$\omega 1 = \omega - \omega 0 =$$

تمارين (١١)

■ إذا كانت $1, \omega, \omega^2$ هي الجذور التكعيبية للواحد الصحيح فاثبت أن:

$$(1) \quad 81 = (\omega^2 + \omega + 1)(\omega^2 + \omega + 1)(\omega^2 + \omega + 1)$$

$$(2) \quad 3 = \left(\frac{1}{\omega + 1} - \frac{1}{\omega^2 + 1} \right)$$

$$(3) \quad 3 = \left(\frac{1 - \omega}{\omega} \right) - \left(\frac{1 + \omega^2}{\omega} \right)$$

$$(4) \quad \frac{9}{2} = \frac{(\omega^2 + \omega + 1)(\omega^2 + \omega + 1)(\omega^2 + \omega + 1)}{(\omega + 1)(\omega^2 + 1)}$$

$$(5) \quad \frac{9}{2} = \left(\frac{3 - \omega}{\omega^2 + 1} - \frac{3 - \omega}{\omega^2 + 1} \right) (\omega - \omega^2)$$

$$(6) \quad 4 = \left(\frac{1}{\omega^2 + \omega^3} - \frac{1}{\omega^3 + \omega^4 + \omega^5} \right) (\omega + \omega^5)$$

$$(7) \quad \frac{48}{169} = \left(\frac{1}{\omega^2 + \omega^2 - 1} - \frac{1}{\omega^2 - \omega^2 + 1} \right)$$

$$(8) \quad 1 + \left(\frac{1}{\omega} - 1 \right) = \left(\frac{1}{\omega} + 1 \right) \left(\frac{1}{\omega} + 1 \right)$$

$$(9) \quad \text{عدد حقيقي} = \left(\frac{4}{\omega} - \omega^2 + 1 \right) \left(\frac{4}{\omega} - \omega^3 + 1 \right)$$

$$(10) \quad \left(\frac{1 + 1}{\omega + \omega(1 + 2) + 1} \right) \text{ لا يتوقف على قيمة } \omega$$

$$(11) \quad 9 = \left(\frac{\omega^7 - 2}{\omega^2} - \frac{\omega^3 - 5}{\omega^5} \right)$$

(12) أوجد مجموعة ن حدا الأولى من المتتابعة:

($1, \omega, \omega^2, \dots$) ثم أوجد هذا المجموع في أبسط صورة عندما

$n = 3, m^3, 1 + m^3, 2 + m^3$ حيث m عدد صحيح

$$(13) \quad \text{إذا كانت } s = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ فاثبت أن } s^3 + s^2 + s + 1 = 0$$

$$(14) \quad \text{أوجد جذري المعادلة: } s^3 + (\omega^2 + \omega + 1)s + 1 = 0$$

(١٥) أوجد قيمة $t + w + t + w + t + w + \dots$ إلى ١٥ حداً

(١٦) أوجد مجموع ٢٣ حداً من المتتابعة الآتية ابتداءً من الحد الأول :

$$(w, t, w, t, w, t, \dots)$$

(١٧) أوجد قيمة $(w-1)(t-1)(t-1)(w-1)$

(١٨) كون المعادلة التي جذورها $t(t-1)$ ، $t(t-1)$

(١٩) إذا كان $s + t = t(t-1)$ حيث s ، t عدنان حقيقيان فلو وجد

s ، t

(٢٠) إذا كان $(t-1)(s+t) = 19$ فاثبت أن $\left(\frac{1}{w^{3+s}} + \frac{1}{w^{3-t}}\right)$

$$s = t = \frac{7}{2}$$

(٢١) حل المعادلة $s + 1 = t$

الباب الثالث

المحددات

المحدد هو مجموعة من العناصر مرتبة علي هيئة صفوف وأعمدة بشرط عدد الصفوف = عدد الأعمدة وكل محدد له قيمة محددة .

* محدد 2×2 ويأخذ الصورة $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{ج} & \text{د} \end{vmatrix}$

مثال ١: أوجد قيمة :-

[أ] $2 - 4 = 6 - 2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$ [ب] $1 = 1 + 2 + 3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$

* محدد 3×3

مثال ٢: أوجد قيمة $\begin{vmatrix} + & - & + \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

المحدد $= 1 + 2 + 5 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 18$

ملاحظة: فك المحدد ممكن باستخدام اي صف أو اي عمود مع ملاحظة الإشارات .

مثال ٣: حل المعادلة $3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & س \\ س & س & 1 \\ س & 2 & 0 \end{vmatrix}$

الحل

∴ $س (س^2 - 2س) = 3س$

$س^3 - 2س^2 = 3س$ ، $س (س^2 - 2س - 3) = 0$

$س (س - 3) (س + 1) = 0$

∴ $س = 0$ ، $س = 3$ ، $س = -1$

مثال ٤: إذا كانت (س - ١) أحد عوامل المحدد

س + ١	ك	٤
ك	٤	س + ١
٥	٧	٦

فأوجد قيمة ك ؟

الحاصل

∴ (س-١) أحد عوامل المحدد

\therefore المحدد = ١ عندما $s = ١$ أي عندما $s = ١$

$$\therefore = (٢٠-ك٧) ٤ + (١٠-ك٦) ك - (١٤-٢٤)٢$$

$$\bullet = ٨٠ - ٢٨٢ + ١٠٢ + ٢٦٢$$

$$2 \div \cdot = 70 \text{ ك} 28 + 7 \text{ ك}$$

$$2 \text{ ك} - 19 \text{ ك} + 50 = 0$$

$$3 = k \quad \frac{1}{2} = k \therefore \quad \bullet = (3 - k)(10 - k)$$

مثال ٥ : إذا كان $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2$ فاوجد قيمة $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

الحل

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \therefore$$

$$y + 20 = 0 \therefore y = -20 \therefore$$

$$2 = 2 - 2 + 2 = 2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \therefore$$

۲- = ۲- و- و- = و- =

$$2 = 2 - 2 + 2 = 2 - 2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

مثال ۶: إذا كانت جذراً للمعادلة $x^2 - 1 = 0$.

$$0 = \left| \begin{array}{cc} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{array} \right| - \left| \begin{array}{cc} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{array} \right|$$

الحل

الطرف الأيمن : (ج - ٣ - ج^٢) + (١٤ - ١٢)

$$\therefore \text{ج}^٢ - ٣ - \text{ج} + ٢$$

$$\text{ج}^٢ - \text{ج} - ١$$

$$\therefore \text{ج} \text{ جذراً للمعادلة } \text{س}^٢ - \text{س} - ١ = ٠$$

$$\therefore \text{ج}^٢ - \text{ج} - ١ = ٠ \text{ وهذا يحقق صحة المطلوب}$$

تمارين (١٢)

(١) أكتب المحددات التي تنشأ من حذف المتغيرات من المعادلات الآتية:-

$$(أ) \quad ٢ = ٣ + \text{س} , \quad ٢_- = ٢$$

$$(ب) \quad ٢ = \text{س} - \text{ص} , \quad ١ = \text{س} + ٣ \text{ص} , \quad ٤ = ٥ \text{س} - ٢ \text{ص} , \quad ٣ =$$

$$(ج) \quad \text{س} - \text{ص} = ٣ , \quad ٣ = ٢ \text{ص} + ٣ \text{س} , \quad ٤ = \text{س} - ٣ \text{ص} , \quad ٥_- =$$

(٢) أوجد قيمة المحددات الآتية :-

$$\begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٤ & ٢_- \end{vmatrix} [أ] \quad \begin{vmatrix} ٠ & ٢ \\ ٥ & . \end{vmatrix} [ب] \quad \begin{vmatrix} ٥ & ١ \\ ١_- & ٢ \end{vmatrix} [١]$$

$$\begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ . & ٤ \end{vmatrix} [أ] \quad \begin{vmatrix} . & . \\ ٢_- & . \end{vmatrix} [و] \quad \begin{vmatrix} \text{س} & . \\ . & \text{س} \end{vmatrix} [٤]$$

(٣) باستخدام عناصر الصف الأول ، أوجد قيمة المحددات الآتية :-

$$\begin{vmatrix} . & . & ١ \\ ١ & . & . \\ . & ١ & . \end{vmatrix} [ج] \quad \begin{vmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٢ & ١ & ٣ \\ ١ & ٣ & ٢ \end{vmatrix} [ب] \quad \begin{vmatrix} . & . & ١ \\ . & ٤ & ٢ \\ ٢_- & ١_- & ٥ \end{vmatrix} [١]$$

$$\begin{vmatrix} ٢_- & ١ & . \\ ٣_- & . & ١_- \\ . & ٣ & ٢ \end{vmatrix} [أ] \quad \begin{vmatrix} . & . & ٢ \\ . & ٤ & . \\ ١_- & . & ١ \end{vmatrix} [و] \quad \begin{vmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٦ & ٥ & ٤ \\ ٩ & ٨ & ٧ \end{vmatrix} [٤]$$

(٤) حل كلا من المعادلات الآتية:-

$$(أ) \quad \begin{vmatrix} \text{س}^٢ & \text{س} \\ \text{س} & \text{س} \end{vmatrix} = ١ \quad (ب) \quad \begin{vmatrix} ١ & \text{س} \\ \text{س} & ٣ \end{vmatrix} = ١ \quad (ج) \quad \begin{vmatrix} \text{س} & . & \text{س} \\ \text{س} & \text{س} & ١ \\ \text{س} & ٢ & ٥ \end{vmatrix} = ٣$$

خواص المحددات

(١) قيمة المحدد (Δ) = مجموع حواصل ضرب عناصر أي صف (عمود) \times العوامل المرافقة لها.

مثال ٧: أوجد قيمة المحدد

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 7 & 0 & 4 \\ 6 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

الحل

باستخدام عناصر الصف الثاني

$$\therefore \Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} \times 4 - \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} \times 0 + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} \times 7$$

$$\therefore \Delta = 12 \times 4 - 6 \times 4 = 24 - 24 = 0$$

$$108 = 84 - 24$$

(٢) قيمة المحدد لا تتغير إذا تبديلت الصفوف بالأعمدة أو الأعمدة بالصفوف بنفس ترتيبها

$$\therefore \text{المحدد} = \text{محورته} \quad \therefore \Delta = \Delta$$

مثال ٨: حقق الخاصية السابقة إذا كان:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

الحل

$$\therefore \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \times 3 - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \times 2 + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \times 1$$

$$29 = 4 + 2 - 27 = 2 \times 2 - 2 \times 1 - 9 \times 3 =$$

$$29 = 1 \times 2 + 9 \times 3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \times 2 + \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \times 3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \Delta$$

$$\therefore \text{المحدد} = \text{محورته}$$

(٣) قيمة المحدد لا تتغير بإضافة أي صف أو عمود مضروباً في عدد ثابت إلى صف أو عمود آخر .

مثال ٩: بدون فك المحدد أثبت أن :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & b & c \\ 1 & c & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+b & 1+b & 1+b \\ c & b & 1 \\ 1+b & b+c & 1+b \end{vmatrix}$$

الحل

نضيف - ص_١ إلى ص_٢

$$\therefore \begin{vmatrix} 1+b & 1+b & 1+b \\ c & b & 1 \\ 1+b & b+c & 1+b \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c & b & 1+b \\ 1+b & b+c & 1+b \end{vmatrix} \text{ ثم نضيف - ص}_2 \text{ إلى ص}_3$$

$$\therefore \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c & b & 1+b \\ 1+b & b+c & 1+b \end{vmatrix}$$

∴ الطرفان متساويان .

(٤) قيمة المحدد على الصورة المثلثية = حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي .

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times 2 \times 3 = 6$$

مثال ١٠: أوجد قيمة :

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \\ 7 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

∴ المحدد على الصورة المثلثية

∴ قيمة المحدد = حاصل ضرب عناصر قطره الرئيسي

$$105 = 7 \times 5 \times 3 =$$

(٥) إذا ضرب كل عنصر من عناصر أي صف أو عمود في عدد ثابت فإن قيمة المحدد تضرب في نفس العدد .

$$\therefore \Delta \times K = \begin{vmatrix} K & K & K \\ 10 & 7 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} \therefore \Delta = \frac{1}{K} \begin{vmatrix} K & K & K \\ 10 & 7 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

نتيجة : العامل المشترك لعناصر صف (أو عمود) هو أحد عوامل المحدد .

مثال ١١ : بدون فك المحدد أثبت أن :

$$\begin{vmatrix} S & S & S \\ S & S & S \\ E & E & E \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

الحل

بأخذ S ← عامل مشترك من ص١

، ص ← عامل مشترك من ص٢

، ع ← عامل مشترك من ص٣

$$\therefore S \times V \times E = \begin{vmatrix} S & S & S \\ S & S & S \\ E & E & E \end{vmatrix} = \text{الطرف الأيسر}$$

(٦) تتغير إشارة المحدد إذا تبادلت الوضع صفان أو عمودان .

$$\text{مثال ١٢} : \text{بدون فك المحدد أثبت أن : } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ S & V & E \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} S & V & E \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

الحل

$$\text{ص١ ، ص٢ ، يتبادلان الوضع : } \therefore \begin{vmatrix} S & V & E \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

ثم ص ، ص ، بتبادلان الوضع : $\therefore -x-$ $\begin{vmatrix} \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}$ الأيسر =

(٧) خاصية التجزئ (تحويل محدد إلى مجموع محددين) ويستفاد منها :

[١] ينتج عامل مشترك بعد التجزئ كان من الصعب استخراجها قبل التجزئ.

[٢] ينتج بعد التجزئ صفان أو عمودان متساويان .

مثال ١٣ : $\begin{vmatrix} \text{س} + \text{أ} & \text{ص} + \text{ب} & \text{ع} + \text{ج} \\ \text{هـ} & \text{و} & \text{م} \\ \text{ك} & \text{ل} & \end{vmatrix}$

الحل

$$\begin{vmatrix} \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ \text{هـ} & \text{و} & \text{م} \\ \text{ك} & \text{ل} & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{ج} \\ \text{هـ} & \text{و} & \text{م} \\ \text{ك} & \text{ل} & \end{vmatrix} =$$

نتيجة :

قاعدة جمع المحددات :-

أ- أن يكونا من نفس الدرجة .

ب- أن تتطابق جميع صفوفهما (أو أعمدهما) ما عدا صف واحد (أو عمود واحد) على الأكثر .

مثال ١٤ : بدون فك المحدد أثبت أن :-

$$\text{صفر} = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 7 \\ 9 & 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 7 \\ 8 & 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & 1 & 4 \\ 9 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

الحل

بجمع المحددين الأول والثاني فقط

$$\begin{vmatrix} 9 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 7 \\ 9 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 7 \\ 9 & 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 7 \\ 8 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

= صفر لأن ص = ص = ص

إنعدام المحدد

(١) ينعدم المحدد إذا تساوي فيه صفان أو عمودان .

مثال ٥١: بدون فك المحدد أثبت أن:

$$\text{صفر} = \begin{vmatrix} ١ & س & ٢ \\ ب & ص & أب \\ ج & ع & أج \end{vmatrix}$$

الحل

$$\therefore \begin{vmatrix} ١ & س & ٢ \\ ب & ص & أب \\ ج & ع & أج \end{vmatrix} \text{ ولأن } ع = ٢ع$$

\therefore المحدد = صفر

(٢) ينعدم المحدد إذا كانت جميع عناصر أي صف أو عمود أصفار

$$\text{صفر} = \begin{vmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٣ & ٢ & ١ \\ ٦ & ٥ & ٤ \end{vmatrix}$$

(٣) ينعدم المحدد إذا وجد تناسب بين عناصر صفين أو عمودين .

$$٠ = \begin{vmatrix} ٦ & ٧ & ٣ \\ ٤ & ٨ & ٢ \\ ١٠ & ١١ & ٥ \end{vmatrix} \text{ لوجود تناسب بين } ع١, ع٢$$

$$\frac{١}{٢} = \frac{٥}{١٠} = \frac{٢}{٤} = \frac{٣}{٦}$$

(٤) ينعدم المحدد إذا وجد به صف أو عمود عناصره تساوي المجموع الجبري للصفين أو

العمودين الآخرين .

$$\text{صفر} = \begin{vmatrix} ٥ & ٣ & ١ \\ ٦ & ٤ & ٢ \\ ١١ & ٧ & ٣ \end{vmatrix}$$

لأن $ص٢ = ص١ + ص٣$

٥) ينعدم المحدد إذا كانت عناصره في توالي عددي بالنسبة للصفوف (الأعمدة) .

$$\text{صفر} = \begin{vmatrix} ١٥ & ١١ & ٥ \\ ١٦ & ١٢ & ٦ \\ ١٧ & ١٣ & ٧ \end{vmatrix}$$

تعريف المحدد المتماثل:

$$\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{س} & \text{ص} \\ \text{س} & \text{ب} & \text{ع} \\ \text{ص} & \text{ع} & \text{ج} \end{vmatrix} \quad \text{عناصره أعلى القطر الرئيسي} = \text{عناصره أسفل القطر الرئيسي}$$

٦) ينعدم المحدد إذا كان ملتو التماثل عناصر قطره الرئيسي أصفار وعناصره أعلى القطر

$$\begin{vmatrix} ٥- & ١ & ١ \\ ٣- & ١- & ٥ \\ \swarrow & ٣ & ٥ \end{vmatrix} = \text{الرئيسي} \quad \text{عناصره أسفل القطر الرئيسي ولكن بإشارة مختلفة والمحدد الملتوي التماثل فردي الدرجة .}$$

$$\text{مثال ١٦ : إذا كان } \begin{vmatrix} ١١ & ٤ & ١ \\ ١٢ & \text{س} & ٢ \\ \text{ص} & ٦ & ٣ \end{vmatrix} = ٠ \quad \text{بأربع طرق مختلفة اقترح قيمة لكل من س ، ص}$$

الحل

$$(١) \text{ س} = ٥ ، \text{ ص} = ١٣ \quad \text{عناصر المحدد في توالي عددي}$$

$$(٢) \text{ ص} = ١ + \text{ص} = ٢ \text{ ص} \quad \therefore \text{س} = ٢ ، \text{ص} = ٢٣$$

$$(٣) \text{ تناسب بين ص}٢، \text{ص}٢ \quad \therefore \frac{١١}{١٨} = \frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$$

$$\therefore \text{س} = ٤ ، \text{ص} = ١٨$$

$$(٤) \text{ تناسب بين ع}١، \text{ع}٢ \quad \therefore \frac{٦}{\text{ص}} = \frac{\text{س}}{١٢} = \frac{٤}{١١}$$

$$\therefore \text{س} = \frac{٤٨}{١١} ، \text{ص} = \frac{٦٦}{٤}$$

كيف تفكر في حل مسائل المحددات ؟

إذا طلب منك إثبات قيمة المحدد بالخواص أو إيجاد قيمة المحدد بالخواص أو حل معادلة في صورة محدد بحيث يكون المجهول متواجد في عناصر القطر الرئيسي أو موزع علي عناصر المحدد أتبع ما يلي :-

- [١] أخرج العامل المشترك أولاً إن وجد .
- [٢] جمع صفين أو عمودين أو ثلاثة صفوف أو ثلاثة أعمدة بشرط ما ينتج من الجمع مقدار ثابت (مقادير متساوية) ثم تخرج هذا الثابت خارج المحدد .
- [٣] إذا كانت عناصر أحد الصفوف = واحد تضرب x - ١ ثم إضافته إلي x ، ٢ ، ٣ ينتج صفين ثم تفك المحدد بالمرافقات .
- [٤] إذا كانت أحد الأعمدة = واحد تضرب x - ١ ثم إضافته إلي x ، ٢ ، ٣ ينتج صفين ثم تفك المحدد بالمرافقات .

مثال ١٧ : باستخدام خواص المحددات بالمرافقات باستخدام خواص المحددات أثبت أن:

$$(s + v + e)^2 = \begin{vmatrix} s-v-e & e^2 & 2v \\ s^2 & e^2 & v-e-s \\ s^2 & 2v & v-e-s \end{vmatrix}$$

الحل

$$\begin{vmatrix} s-v-e & e^2 & 2v \\ s^2 & e^2 & v-e-s \\ s^2 & 2v & v-e-s \end{vmatrix} \begin{matrix} +e \\ +e \\ +e \end{matrix} = \begin{vmatrix} s-v-e & e^2 & 2v \\ s^2 & e^2 & v-e-s \\ s^2 & 2v & v-e-s \end{vmatrix} \begin{matrix} +e \\ +e \\ +e \end{matrix}$$

$$\therefore (s + v + e) = \begin{vmatrix} 1 & e^2 & 2v \\ 1 & e^2 & v-e-s \\ 1 & 2v & v-e-s \end{vmatrix}$$

x - ١ ثم إضافته إلي x ، ٢ ، ٣

$$\therefore (s + v + e) = \begin{vmatrix} 1 & e^2 & 2v \\ 1 & e^2 & v-e-s \\ 1 & 2v & v-e-s \end{vmatrix}$$

$$= (s + v + e) (e - s - v) (e - s - v) =$$

$$= (s + v + e) (e - s - v) (e - s - v) = (s + v + e)^2$$

مثال ١٨: أثبت أن $(س-أ)(س-ب)(س+أ+ب) = \begin{vmatrix} ب & أ & س \\ ب & س & أ \\ س & ب & أ \end{vmatrix}$

الحل

$$\therefore \begin{vmatrix} ب & أ & س+أ+ب \\ ب & س & أ+أ+ب \\ س & ب & أ+أ+ب \end{vmatrix} = ١ع + ١ع + ١ع$$

$$(س+أ+ب) = \begin{vmatrix} ب & أ & ١ \\ ب & س & ١ \\ س & ب & ١ \end{vmatrix}$$

بضرب ص ١، $١-x$ وإضافته إلى ص ٢، ص ٣

$$\therefore (س+أ+ب) = \begin{vmatrix} ب & أ & ١ \\ ٠ & س-أ & ٠ \\ ٠ & ب-أ & ٠ \end{vmatrix}$$

يفك المحدد بمعلومية ع ١

$$\therefore \Delta = (س+أ+ب)(س-أ)(س-ب)$$

مثال ١٩: بدون فك المحدد أثبت أن

$$\begin{vmatrix} ع & ص & س \\ س & ع & ص \\ ص & س & ع \end{vmatrix} = ٢ \begin{vmatrix} ع+س & ص+ع & س+ص \\ س+ص & ع+س & ص+ع \\ ع+ص & س+ع & ص+س \end{vmatrix}$$

الحل

$$\begin{vmatrix} ع+س & ص+ع & (س+ص+ع)٢ \\ س+ص & ع+س & (ع+ص+ع)٢ \\ ع+ص & س+ع & (س+ص+ع)٢ \end{vmatrix} = ١ع + ١ع + ١ع$$

$$\therefore ٢ \begin{vmatrix} ع+س & ص+ع & س+ص+ع \\ س+ص & ع+س & ع+ص+س \\ ع+ص & س+ع & س+ص+ع \end{vmatrix}$$

$${}^2E - {}^1E$$

$$= \begin{vmatrix} S & S+E & S+E \\ S & S+E & S+E \\ E & S+S & S+S \end{vmatrix}$$

$${}^2E - {}^1E$$

$$= \begin{vmatrix} S & S+E & S \\ S & S+E & S \\ E & S+S & S \end{vmatrix}$$

$${}^2E - {}^1E$$

$$= \begin{vmatrix} S & S & S \\ S & E & E \\ E & S & S \end{vmatrix} = \text{الأيسر}$$

مثال ٢٠: اثبت ان:

$$= \begin{vmatrix} J_2^2 A & J_2^2 B & 1 \\ J_2^2 B & J_2^2 A & 1 \\ J_2^2 J & J_2^2 J & 1 \end{vmatrix}$$

الحل

$$\therefore J_2^2 A = J_2^2 A - 1$$

$$\therefore \begin{vmatrix} 1 & J_2^2 A & J_2^2 A - 1 \\ 1 & J_2^2 B & J_2^2 B - 1 \\ 1 & J_2^2 J & J_2^2 J - 1 \end{vmatrix}$$

$${}^2E + {}^1E$$

$$\therefore \begin{vmatrix} 1 & J_2^2 A & J_2^2 A \\ 1 & J_2^2 B & J_2^2 B \\ 1 & J_2^2 J & J_2^2 J \end{vmatrix}$$

$$، \therefore \text{يوجد تناسب بين } {}^2E, {}^1E = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{المحدد} = \text{صفر}$$

مثال ٢١ : باستخدام خواص المحددات أوجد قيمة

$$\begin{vmatrix} 2\text{جا}^2\text{س} & 1 & 2\text{جا}^2\text{ص} \\ 2\text{جا}^2\text{ص} & 1 & 2\text{جا}^2\text{ع} \\ 2\text{جا}^2\text{ع} & 1 & 2\text{جا}^2\text{س} \end{vmatrix}$$

الحل

$$\begin{vmatrix} 2\text{جا}^2\text{س} + 2\text{جا}^2\text{ص} + 2\text{جا}^2\text{ع} & 1 & 2\text{جا}^2\text{س} \\ 2\text{جا}^2\text{ص} - 2\text{جا}^2\text{ص} & 1 & 2\text{جا}^2\text{ص} \\ 2\text{جا}^2\text{ع} + 2\text{جا}^2\text{ع} & 1 & 2\text{جا}^2\text{ع} \end{vmatrix} \begin{matrix} 2\text{ع} + 2\text{ع} \\ 0 \\ 2\text{ع} \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2(\text{جا}^2\text{س} + \text{جا}^2\text{ص} + \text{جا}^2\text{ع}) & 1 & 2\text{جا}^2\text{س} \\ 2(\text{جا}^2\text{ص} - \text{جا}^2\text{ص}) & 1 & 2\text{جا}^2\text{ص} \\ 2(\text{جا}^2\text{ع} + \text{جا}^2\text{ع}) & 1 & 2\text{جا}^2\text{ع} \end{vmatrix}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 2\text{جا}^2\text{س} & 1 & 1 \\ 2\text{جا}^2\text{ص} & 1 & 1 \\ 2\text{جا}^2\text{ع} & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

∴ المحدد = صفر لأن $2\text{ع} = 2\text{ع}$

ملاحظة:

إذا كان أحد عناصر الصفوف (الأعمدة) = واحد فإنه بالاستفادة بعملية الضرب الخارجي بجعل العناصر المناظرة له أصفار وذلك بضرب العناصر بإشارة مخالفة ثم إضافتها إلى الصفوف أو الأعمدة الأخرى.

مثال ٢٢ : باستخدام الخواص أثبت أن

$$(1-1)^2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

الحل

$$\text{ص} 1 \times 1 - 1 + \text{ص} 2$$

$$\text{ص} 1 \times 1 - 1 + \text{ص} 2$$

$$(1-1)^2 = (1-1)(1-1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ (1-1) & (1-1) & 1 \\ (1-1) & 1 & 1 \end{vmatrix} = \text{المحدد}$$

مثال ٢٣: بدون فك المحدد أثبت أن:

$$0 = \begin{vmatrix} ٢-ب٦ & ١٤ & ٢ \\ ١٢+ج- & ب٣ & ١ \\ ٢٦-أ٤- & ج٢ & ٢- \end{vmatrix}$$

الحل

بأخذ ٢ ع. م من ص. ١، ٢ ع. م من ص. ٢

$$\therefore \times ٢ \begin{vmatrix} ١٢ & ٢٣-ب٢ & ١ \\ ١ & ب٣ & ١ \\ ١ & ج- & ١ \end{vmatrix}$$

٢ ع + ٢ ع

$$\therefore \text{المحدد} = ٤ - \begin{vmatrix} ١٢ & ٢٣+ب٢-ج & ١ \\ ١٢+ب٢-ج & ب٣ & ١ \\ ١٢+ب٢-ج & ج- & ١ \end{vmatrix}$$

$$= ٤ - (١٢+ب٢-ج) \begin{vmatrix} ١ & ١٢ & ١ \\ ١ & ب٣ & ١ \\ ١ & ج- & ١ \end{vmatrix}$$

\therefore المحدد = صفر لأن ١ ع = ٢ ع

مثال ٢٤: بدون فك المحدد أثبت أن

$$0 = \begin{vmatrix} ١ & \frac{١}{٢} & \frac{١}{٢} \\ ٢ & ب & ج \\ ٤ & ٢-ب & ١٢-ج \end{vmatrix}$$

الحل

نأخذ $\frac{1}{٢}$ ع. م من ص. ١

$$\therefore \frac{1}{٢} \begin{vmatrix} ٢ & ب & ١ \\ ٢ & ب & ج \\ ١ & ٢-ب & ١٢-ج \end{vmatrix}$$

ص + ٢ ص

$$\therefore \frac{1}{٢} \begin{vmatrix} ٢ & ب & ١ \\ ٢ & ب & ج \\ ٤ & ٢-ب & ١٢ \end{vmatrix} \therefore \text{المحدد} = \text{صفر} \text{ لوجود تناسب بين ص. ١، ص. ٢}$$

مثال ٢٥ : أثبت أن

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

الحل

$$\therefore \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

ص_١ × ١ ، ص_٢ × ب ، ص_٣ × ج

$$\therefore \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

ع_١ + ع_٢

$$\therefore \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1+1+1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ لأن } ع_١ = ع_٢ = ع_٣$$

ملاحظة هامة:

$$\begin{vmatrix} 1+س & 1+ل & 1+هـ \\ 1+ص & 1+م & 1+و \\ 1+ع & 1+ن & 1+ع \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} س & ل & هـ \\ ص & م & و \\ ع & ن & ع \end{vmatrix}$$

مثال ٢٦: أثبت أن :

$$0 = \begin{vmatrix} 1+s & 1+s & 1+s \\ 1+s & 1+s & 1+s \\ 1+s & 1+s & 1+s \end{vmatrix}$$

الحل

$$= \begin{vmatrix} s & s & s \\ s & s & s \\ s & s & s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s & s & s \\ s & s & s \\ s & s & s \end{vmatrix} = 0$$

مثال ٢٧: بدون فك المحدد أثبت أن

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

الحل

نجزئ المحدد

$$\therefore \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$ص_1 \times 1 ، ص_2 \times 1 ، ص_3 \times 1$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

بطلنا ع_١ مع ع_٢ ، ع_٢ مع ع_٣

مثال ٢٨: أوجد مجموعة الحل ، أثبت أن $x = 2$ تحقق هذه المعادلة

، أثبت أن $x = 2$ جذرا لهذه المعادلة

الحل

$$0 = \begin{vmatrix} 2 & 6-x & 10-x \\ 4 & 9-x & 6 \\ 5-x & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$2(16 + 12 + 12) = 16 + 12 + 12$$

$$0 = \begin{vmatrix} 2 & 6-x & 2-x \\ 4 & 9-x & 2-x \\ 5-x & 4 & 2-x \end{vmatrix}$$

$$0 = \begin{vmatrix} 2 & 6-x & (2-x) \\ 4 & 9-x & (2-x)2 \\ 5-x & 4 & (2-x)2 \end{vmatrix}$$

$$2(16 + 12 + 12)$$

$$0 = \begin{vmatrix} 2 & 6-x & 1 \\ 4 & 9-x & 2 \\ 5-x & 4 & 2 \end{vmatrix} (2-x)$$

ص 1×2 ثم إضافته إلى ص 2 ، ص 3

$$0 = \begin{vmatrix} 2 & 6-x & 1 \\ 8 & 21-x & 0 \\ 5-x & 8 & 0 \end{vmatrix} (2-x)$$

$$0 = \begin{vmatrix} 8 & 21-x \\ 5-x & 8 \end{vmatrix} (2-x)$$

$$0 = (2-x)(21-21-x + 8-x + 40) = (2-x)(17-x)$$

$$0 = (2-x)(17-x)$$

$$0 = (2-x)(17-x)$$

$$\therefore x = 2, x = 5, x = 17$$

$$\therefore \text{مجموعة الحل } | 2, 5, 17 |$$

مثال ٢٩ : باستخدام خواص المحددات أوجد مجموعة الحل للمعادلة

$$0 = \begin{vmatrix} 2 & 1- & 1-س \\ 1- & 2+س & 1- \\ 1-س & 1- & 2 \end{vmatrix}$$

الحل

$$ص_1 + ص_2 + ص_3 \leftarrow ص_1$$

$$0 = \begin{vmatrix} س & س & س \\ 1- & 2+س & 1- \\ 1-س & 1- & 2 \end{vmatrix}$$

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1- & 2+س & 1- \\ 1-س & 1- & 2 \end{vmatrix} س$$

ع_١ × ١- ثم إضافته إلى كل من ع_٢ ، ع_٣

$$0 = \begin{vmatrix} \begin{array}{c} \diagup \\ \square \end{array} & 2+س & 1- \\ 3-س & 3- & 2 \end{vmatrix} س$$

$$0 = (3-س) (3+س)$$

$$س = 0 ، س = 3- ، س = 3$$

∴ مجموعة الحل | 0 ، 3 ± |

مثال ٣٠ : أثبت بالخواص

$$(س+ع) (ص+ع) (ص+س) = \begin{vmatrix} ص- & ع- & س+ص+ع \\ س- & س+ص+ع & ع- \\ س+ص+ع & ع- & ص- \end{vmatrix}$$

الحل

$$∴ ص_1 + ص_2 \leftarrow ص_1 ، ص_1 + ص_3 \leftarrow ص_1$$

$$\therefore \text{المحدد} \begin{vmatrix} \text{س} + \text{ص} + \text{ع} & \text{ع} - & \text{ص} - \\ \text{س} + \text{ص} & \text{س} + \text{ص} & -(\text{س} + \text{ص}) \\ \text{س} + \text{ع} & -(\text{س} + \text{ع}) & \text{س} + \text{ع} \end{vmatrix}$$

$$= (\text{س} + \text{ص}) (\text{س} + \text{ع}) \begin{vmatrix} \text{س} + \text{ص} + \text{ع} & \text{ع} - & \text{ص} - \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{ص} + \text{ص} + \text{ص} \leftarrow \text{ص} + \text{ص} + \text{ص}$$

$$(\text{س} + \text{ص}) (\text{س} + \text{ع}) \begin{vmatrix} \text{س} + \text{ص} + \text{ع} & \text{ع} - & \text{ص} - \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\text{س} + \text{ص}) (\text{س} + \text{ع}) \begin{vmatrix} \text{ص} - & \text{ع} - \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\text{س} + \text{ص}) (\text{س} + \text{ع}) \times (\text{ع} - \text{ص})$$

$$= (\text{س} + \text{ص}) (\text{س} + \text{ع}) (\text{ع} - \text{ص})$$

مثال ٣١: باستخدام المحددات أثبت أن:
$$1 + \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{ج} \\ \text{ب} & 1 + \text{ب} & \text{ج} \\ 1 + \text{ج} & \text{ج} & \text{أ} \end{vmatrix} = 1 + \text{ب} + \text{ج} + \text{أ}$$

الحل

بالتجزئ

$$\text{المحدد} = \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{ج} \\ \text{ب} & 1 + \text{ب} & \text{ج} \\ 1 + \text{ج} & \text{ج} & \text{أ} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{ج} \\ \text{ب} & 1 + \text{ب} & \text{ج} \\ 1 + \text{ج} & \text{ج} & \text{أ} \end{vmatrix}$$

$$\text{أ.ع. م من ص} + \text{أ.ع. م من ع}$$

$$\therefore 1 \times 1 = \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{ج} \\ \text{ب} & 1 + \text{ب} & \text{ج} \\ 1 + \text{ج} & \text{ج} & \text{أ} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{ج} \\ \text{ب} & 1 + \text{ب} & \text{ج} \\ 1 + \text{ج} & \text{ج} & \text{أ} \end{vmatrix}$$

$$\text{ص} + \text{ب} + \text{ج} \leftarrow \text{ص}$$

$$\text{ص} + \text{ج} + \text{أ} \leftarrow \text{ص}$$

$$1 + 'ج' + 'ب' + 'ا' =$$

إذا كان المجهول x متواجد في عناصر صف أو عمود ساوي s (من الدرجة الأولى)
بالقيم المناظرة لها .

$$\bullet = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

∴ مجموعة الحل $| \pm 2, 1 |$

مثال ۳۳: اِذا كان

۰	۲-س	۱
۲	۱-۱	۸
۱	۱	۱

= ۰ فین س = ----، ----

$$\bullet = \Delta \quad \tau_E = \tau_E \therefore$$

تمارين (١٣)

(١) بدون فك المحدد وضع أن كلا من المحددات الآتية يساوي المحدد $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$ مع نكر

الخاصية التي استخدمت في كل حالة.

$$\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \text{ [ج] } \quad \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \text{ [ب] } \quad \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \text{ [أ] }$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 5 \end{vmatrix} \text{ [و] } \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 5 & 6 & 0 \end{vmatrix} \text{ [هـ] } \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 4 \end{vmatrix} \text{ [ع] }$$

(٢) بدون فك المحدد وضع أن كلا من المحددات الآتية يساوي صفر مع نكر الخاصية التي

استخدمت في كل حالة .

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \text{ [ج] } \quad \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \text{ [ب] } \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \text{ [أ] }$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} \text{ [و] } \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} \text{ [هـ] } \quad \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} \text{ [ع] }$$

(٣) باستخدام خصائص المحددات أوجد قيم المحددات الآتية:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \text{ص} \\ 1 & \text{ص} & \text{ص} \\ \text{ص} & \text{ص} & \text{ع} \end{vmatrix} \text{ [أ] } \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & \text{ص} \\ 1 & \text{ص} & \text{ص} \\ \text{ص} & \text{ص} & \text{ع} \end{vmatrix} \text{ [ب] }$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} \text{ [ج] }$$

(٤) أثبت أن:

$$[أ] \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (أ-ب)(ب-ج)(ج-أ) + (أ+ب+ج)$$

$$[ب] \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (12 + س)(1 - س)$$

$$[ج] \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + س + س + س + س$$

(٥) أثبت أن :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

ثم عم هذه القاعدة بالنسبة للمحددات من الدرجة ٣ .

حل المعادلات الخطية

شكل المعادلات الخطية :

هي معادلات من الدرجة الأولى تحتوي كل مجموعة منها على نفس العدد من المجاهيل .

مثال: $\begin{cases} ١٢ = ص + ٢س \\ ١١ = ص + ٣س \end{cases}$ معادلات خطية ذات مجهولين

معادلات خطية ذات ثلاث مجاهيل $\begin{cases} ١٣ = ع + ص + ٢س \\ ٧ = ع + ٢ص - ٢س \\ ٤ = ع + ص + ٤س \end{cases}$

حل المعادلات الخطية بطريقة المحددات (كرامر)

طريقة الحل:

- ١- نوجد محدد المعاملات .
- ٢- نستبدل ع ، بعمود الثوابت ونوجد Δ .
- ٣- نستبدل ص ، بعمود الثوابت ونوجد Δ .

$$\therefore س = \frac{\Delta}{\Delta} ، ص = \frac{\Delta}{\Delta}$$

مثال: حل المعادلتين $١ = ص - ٢س$ ، $٥ = ص + ٢س$

الحل

$$\therefore \Delta = \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix} = ٢ - ١ = ١$$

$$\therefore \Delta = \begin{vmatrix} ١ & ٥ \\ ١ & ١ \end{vmatrix} = ١ - ٥ = -٤$$

$$\therefore \Delta = \begin{vmatrix} ٥ & ١ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix} = ١٠ - ١ = ٩$$

$$ص = \frac{\Delta}{\Delta} = \frac{٩}{١} = ٩$$

$$\therefore س = \frac{\Delta}{\Delta} = \frac{-٤}{١} = -٤$$

\therefore مجموعة الحل هي $\{(٩, -٤)\}$

مثال: أوجد مجموعة الحل للمعادلات الآتية :-

$$١٠ = ع٢ - ص٢ + س٢$$

$$١ = ع٢ + ص٢ + س٢$$

$$٤ = ع٣ + ص٤ + س٥$$

الحل

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc|ccc} ٢ & ٣ & ٢ & ٢ & ٣ & ٢ & ٢ & ٢ & ٢ \\ ٤ & ٥ & ٢ & ٣ & ٥ & ١ & ٣ & ٤ & ٢ \end{array} \right| = \Delta \therefore$$

$$(١٠ - ١٢)٢ - (١٠ - ٩)١ - (٨ - ٦)٢ =$$

$$٧ - = \Delta \therefore$$

∴ مجموعة المعادلات لها حل وحيد ، ∴ Δ ≠ صفر

$$٧ - = ٤ - \times ٢ - = (٥ -)١ - - (٢ -)١٠ = \left| \begin{array}{ccc|ccc} ٢ - & ١ & ١٠ & ٢ & ٢ & ١ \\ ٢ & ٢ & ١ & ٣ & ٤ & ٤ \end{array} \right| = ١ \Delta \therefore$$

$$١٤ - = ٧ \times ٢ - = (١ -)١٠ - - (٥ -)٢ = \left| \begin{array}{ccc|ccc} ٢ - & ١٠ & ٢ & ٢ & ١ & ٣ \\ ٢ & ١ & ٣ & ٣ & ٤ & ٥ \end{array} \right| = ٢ \Delta \therefore$$

$$٢١ = ٢ \times ١٠ + ٧ \times ١ - - ٤ \times ٢ = \left| \begin{array}{ccc|ccc} ١٠ & ١ & ٢ & ١٠ & ١ & ٣ \\ ١ & ١ & ٣ & ٤ & ٤ & ٥ \end{array} \right| = ٣ \Delta \therefore$$

$$٢ = \frac{١٤ -}{٧ -} = \frac{٢ \Delta}{\Delta} = ص ، \quad ١ = \frac{٧ -}{٧ -} = \frac{١ \Delta}{\Delta} = س \therefore$$

$$٣ - = \frac{٢١ -}{٧ -} = \frac{٣ \Delta}{\Delta} = ع$$

∴ مجموعة الحل هي { (٣ - ، ٢ ، ١) }

ملاحظة :

يمكن التأكد من صحة الحل بالتعويض بقيمة كل من س ، ص ، ع في أحد المعادلات الثلاثة فيتساوى طرفاها.

تمارين (١٤)

(١) حل المعادلات الآتية بطريقة كرامر:-

$$(أ) \quad ٢ = ص + ٢س ، \quad ٥ = ٣س + ٢ص$$

$$(ب) \quad ٢ = ص + س ، \quad ١ = ٢س + ٣ص$$

$$(ج) \quad ٥ = ص + ٥س ، \quad ٠ = ٢س + ص$$

$$(د) \quad ١ = ٥ص - ٢س ، \quad ٢ = ص + س -$$

(٢) حل المعادلات الآتية بطريقة كرامر:-

$$(أ) \quad ١٢ = ع + ٢ص + ٣س ، \quad ٢ = ع + ص - ٢س ، \quad ٢ = ع - ص + ٣س$$

$$(ب) \quad ١٠ = ع + ص - ٢س ، \quad ١ = ع + ٢ص + ٣س ، \quad ٤ = ع + ٥س + ٣ص$$

$$(ج) \quad ١٠ = ع + ٢ص - ٢س ، \quad ٢ = ع - ٤ص - ٢س ، \quad ١٤ = ع + ٤س + ٢ص -$$

$$(د) \quad ٦ = ع + ٢ص - ٣س ، \quad ٣ = ع + ص - ٢س ، \quad ١ = ع + ٢ص - س -$$

$$(هـ) \quad ٢٠ = ع + ٢ص + ٣س ، \quad ٧ = ع + ٢ص - ٣س ، \quad ١ = ع + ص - س$$

$$(و) \quad ٥ = ع + ٢ص ، \quad ١٠ = ٣ص ، \quad ١ = ٥س$$

تمارين غير محلولة

۱۔ اثبت ان :
$$(1-JS)(1-A_S) = \begin{vmatrix} 1 & S & S \\ S & 1 & 1 \\ 1 & J & 1 \end{vmatrix}$$

٢- بدون فك المحدد أثبت أن :

$$= \begin{vmatrix} \text{س} + \text{أ} & \text{ب} & \text{ج} \\ \text{أ} & \text{س} + \text{ب} & \text{ج} \\ \text{أ} & \text{ب} & \text{س} + \text{ج} \end{vmatrix}$$

س = (أ + ب + ج) س

۳۔ اثبت ان :

س + ۱	ص ص	س ع
ص ص	ص + ۱	ص ع
س ع	ص ع	ع + ۱

= س + ۱ + ص + ۱ + ع + ۱

$$4. \text{ اثبت ان : } \begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{جا ا} & \text{جتا ا} & 1 \\ \hline \text{حاب} & \text{جتا ب} & 1 \\ \hline \text{حا ج} & \text{جتا ج} & 1 \\ \hline \end{array} = \text{جا (ا-ب)} + \text{جا (ب-ج)} + \text{جا (ج-ا)}$$

٥- أثبت أن لكل a, b, c فإن جذور المعادلة

- ا - س ب ب ج - س	= صفر	(تكون أعداداً حقيقية)
--------------------------------	-------	-------------------------

٦- اثبت ان : $\begin{vmatrix} ٥+٤ & ٣+٢ \\ ٣-٢ & ٥+٤ \end{vmatrix} = ٢٠ + ٢٤ + ٢٣ + ٢٢$

ومن تلك ضع $1 + 3 + 5 + 7$ في صورة محدد

٧- اثبت ان :

$$(1 + \frac{1}{j} + \frac{1}{j^2} + \frac{1}{j^3})ab = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1+1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ j+1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

٨- حل المعادلات الآتية باستخدام كرامر :

٧ ص - ٣ ص - ٣ ع = ٨

۱ - س + ص =

١- = ع + س-

ثانياً: الهندسة الفراغية

الباب الأول

المستقيمات والمستويات

مفاهيم ومسلمات:-

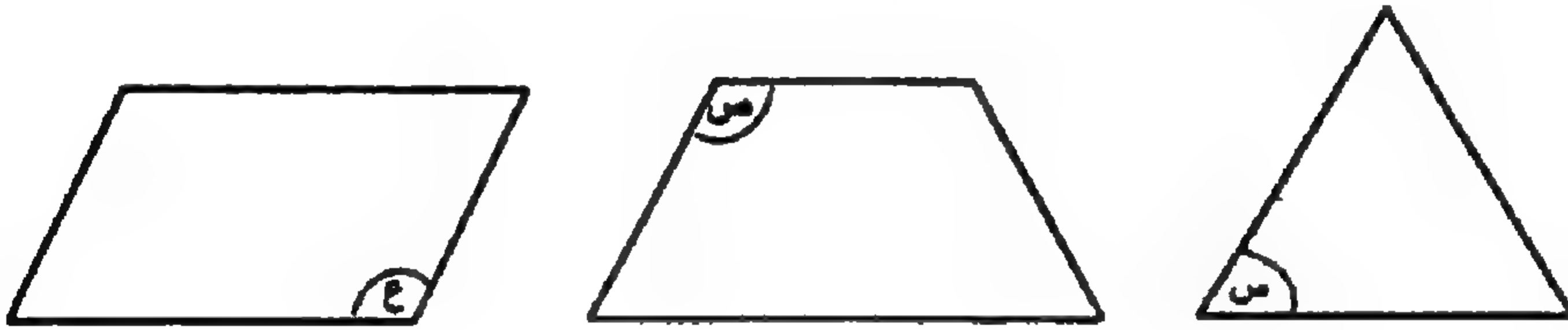
الهندسة الفراغية هي العلم الذي يدرس خواص المستقيمات والمستويات والمجسمات في الفراغ والعلاقة بينهما جميعاً.

المستقيم الهندسي:

عبارة عن مجموعة غير منتهية من النقط وأي نقطتين مختلفتين يمر بهما مستقيم واحد.

المستوي:

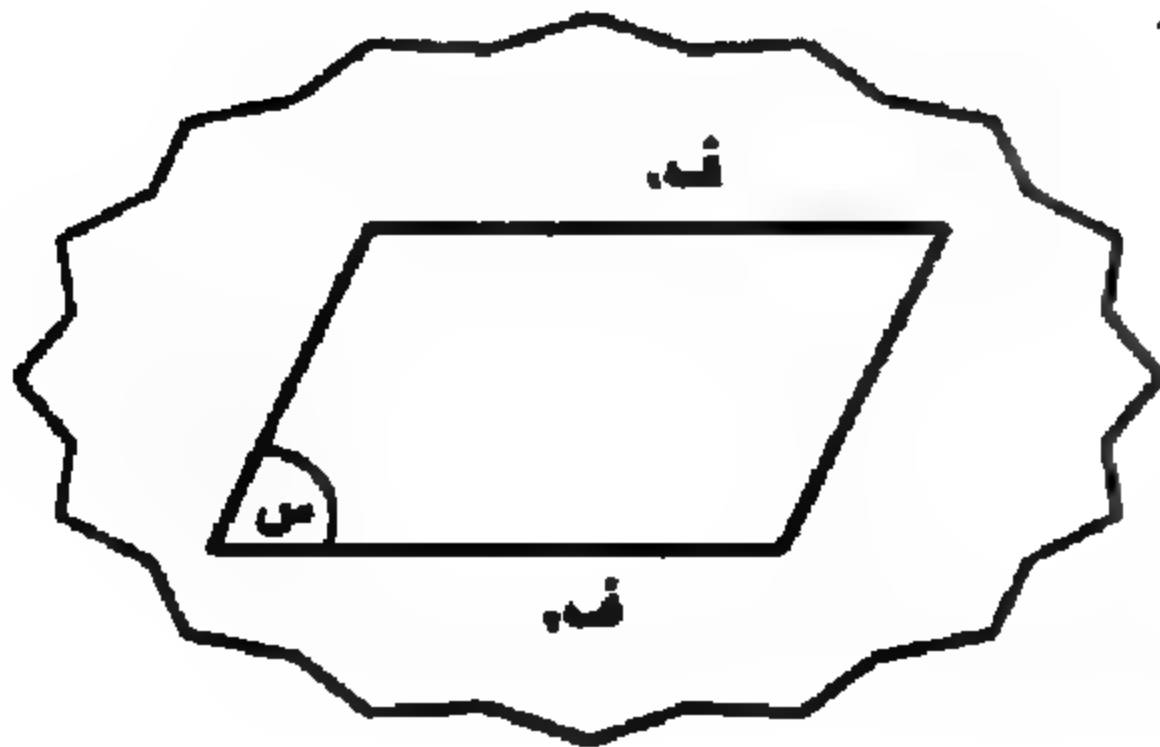
عبارة عن مجموعة غير منتهية من النقط ينطبق عليها مستقيم في جميع الاتجاهات [المستوي لا أول له ولا آخر من جميع جهاته] ويرمز للمستوي عادة بأحد الحروف الكبيرة مثل س، ص ويمثل المستوي الممتد من جميع جهاته بجزء محدود منه علي شكل مثلث أو شكل رباعي.



الفراغ (أو الفضاء) (ف):

هو مجموعة غير منتهية من النقط يحتوي جميع الأجسام أو المستويات (كل ما تفكر فيه من الأشكال) وبذلك يكون الفراغ بمثابة المجموعة الشاملة.

تجزئة الفراغ بأي مستوي:-



المستوي س يجزئ الفراغ ف إلى ثلاث مجموعات منفصلة من النقط هي المستوي س نفسه ونصفا الفراغ ف₁، ف₂ ويسمى المستوي س حداً (وجهاً) لكل من نصفي الفراغ رغم عدم وقوعه في أي منهما.

ونجد أن: $F_1 \cap F_2 = S$ ، $F = F_1 \cup F_2 \cup S$

تحديد المستوى في الفراغ:-

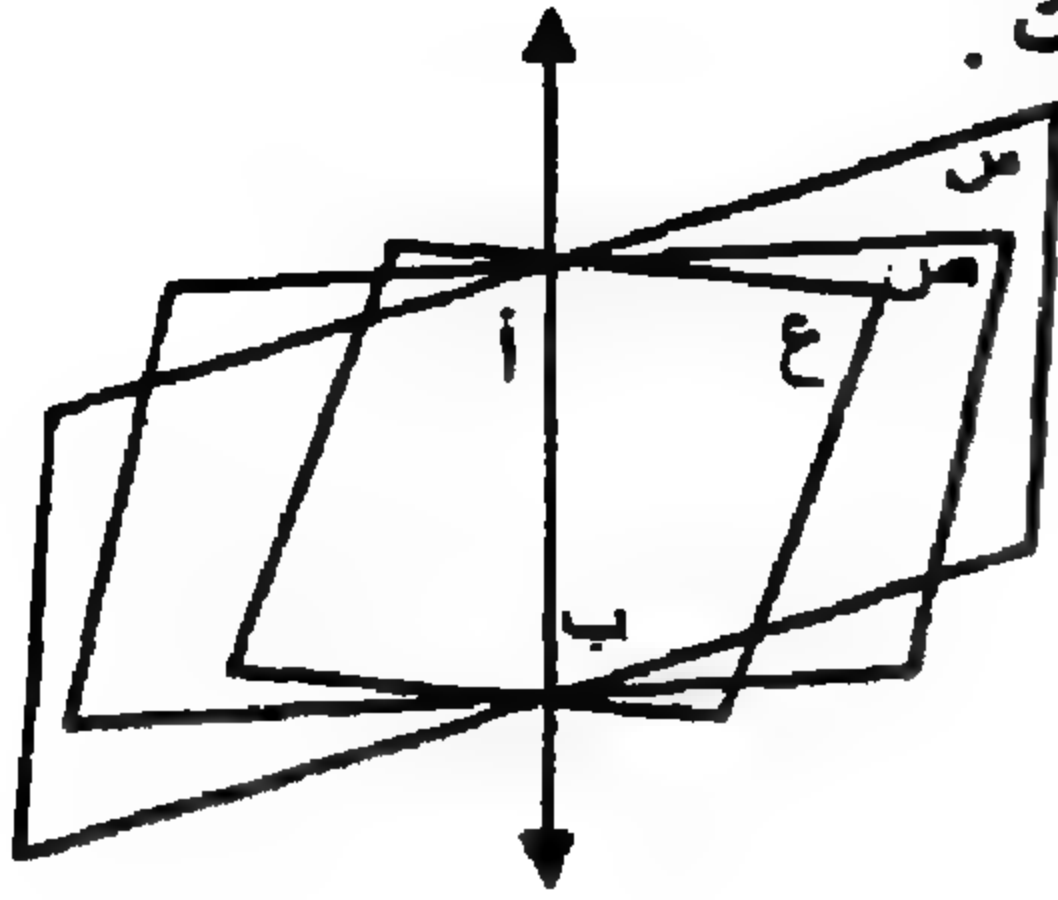
نعلم أن أي نقطة في المستوى يمر بها عدد لا نهائي من المستقيمات .

في الفراغ:

١- أي نقطة في الفراغ يمر بها عدد لا نهائي من المستويات .

٢- أي مستقيم في الفراغ يمر بها عدد لا نهائي من المستويات .

كما بالرسم



• نقطة أ في الفراغ يمر بها عدد لا نهائي من المستويات .

• \longleftrightarrow أ ب مستقيم في الفراغ يمر به عدد لا نهائي من المستويات .

حالات تحديد المستوى:

(١) ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة .
× × ×

(٢) مستقيمان متقاطعان .
 \longleftrightarrow

(٣) مستقيم ونقطة لا تنتمي إليه .
 \longleftrightarrow ×

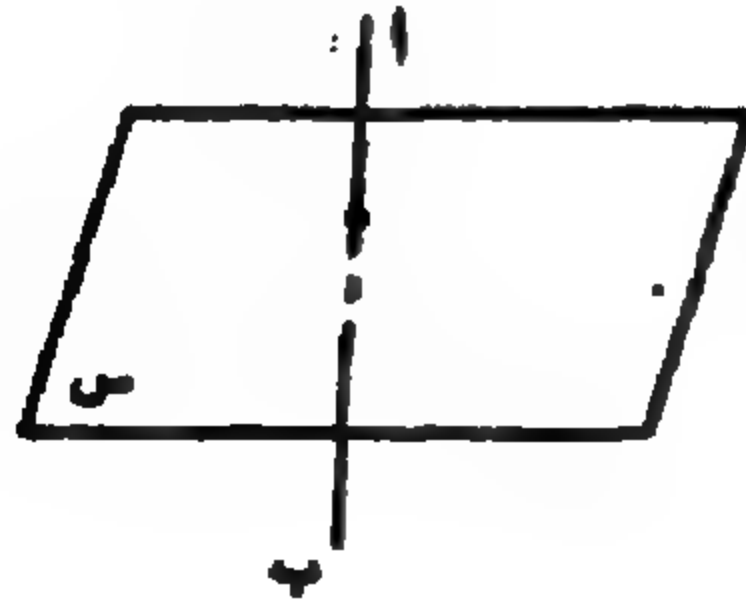
(٤) مستقيمان متوازيان .
 \longleftrightarrow
 \longleftrightarrow

نتيجة : إذا اشترك مستويات في ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة فلهما ينطبقان ويصبحان مستويًا واحدًا .

الأوضاع النسبية لمستقيم ومستوي:-

(١) المستقيم قاطع للمستوي س:

قد يلاقى المستوى في نقطة واحدة فيقال أن المستقيم قاطع للمستوي وقد يكون عمودياً على المستوى أو مائلاً عليه.



مستقيم قاطع للمستوي
(عمودي)



مستقيم قاطع للمستوي
(مائل)

∴ المستقيم يقطع المستوى في جـ.

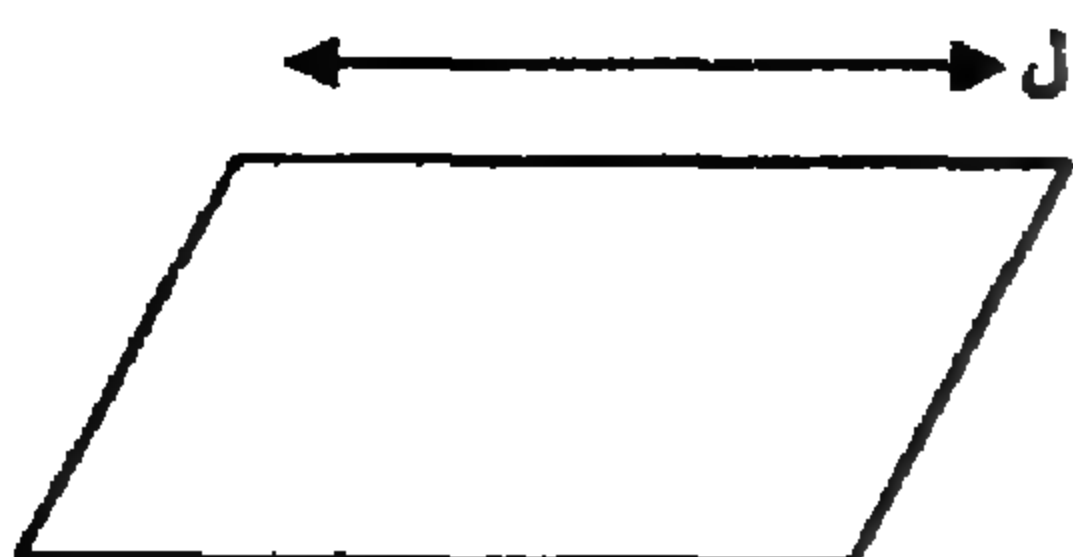
(٢) قد لا يقطع المستقيم في أي نقطة فيقال أن المستقيم

يوازي المستوى .

مثلاً: المستقيم أ ب يوازي المستوي س لأنه لا

يشارك معه في أي نقطة .

$$\therefore L \cap S = \emptyset$$



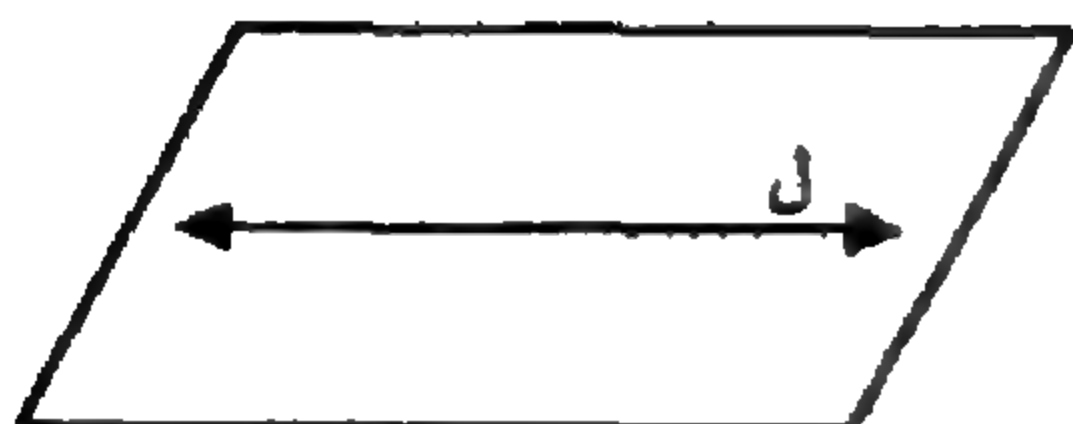
(٣) قد يشترك المستقيم مع المستوى في نقطتين فيقال

إن المستقيم واقع في المستوى مثل س في الحالة

التي تكون فيها جميع نقط المستقيم ل ممتداً إلى

ما لانهاية واقعة في المستوى س .

$$\therefore L \subset S \quad \therefore L \cap S = L$$



الأوضاع النسبية لمستويين:

(١) قد يكون المستويان متقاطعين . والمستويان يتقاطعان في خط مستقيم .

$$\therefore S \cap S' = AB$$



(٢) قد يشترك المستويان في جميع النقط فيقال إنهما متطابقان .

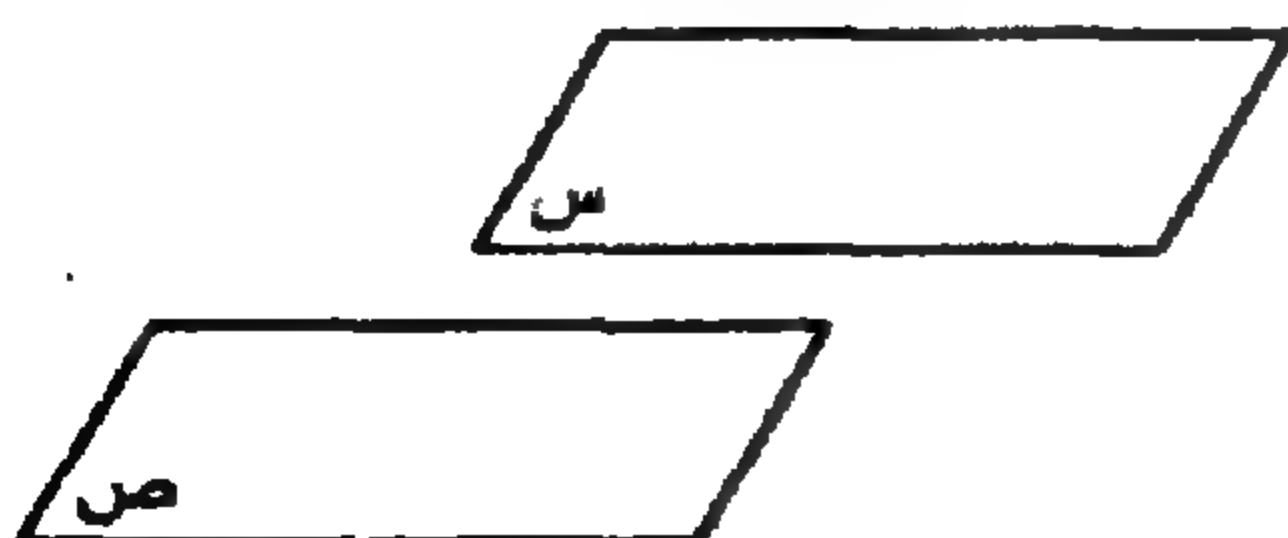
ويكون المستوى س هو نفسه المستوى س

$$\therefore S = S'$$



(٣) قد لا يشترك المستويان في أي نقطة مهما امتدا فيقال أنهما متوازيان

$$\therefore S \cap S' = \emptyset$$

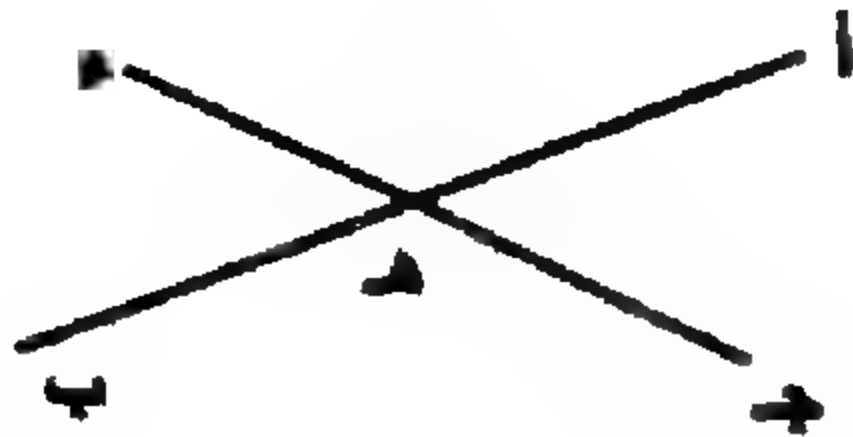


ملاحظة:

إذا اشترك مستويان مختلفان في نقطة فإتبعهما يشتركان في مستقيم يمر بهذه النقطة.

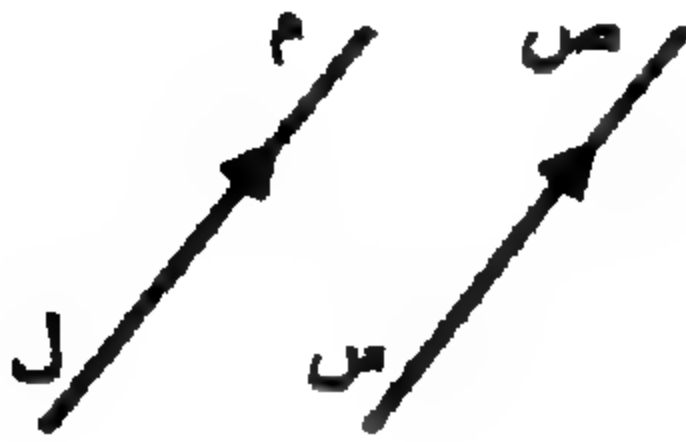
الأوضاع لنسبية لمستقيمين مختلفين في الفراغ:

(١) قد يكون المستقيمان في الفراغ متقاطعين وهما في مستو واحد مثل المستقيمان أ ب ، ج د المتقاطعان في هـ .



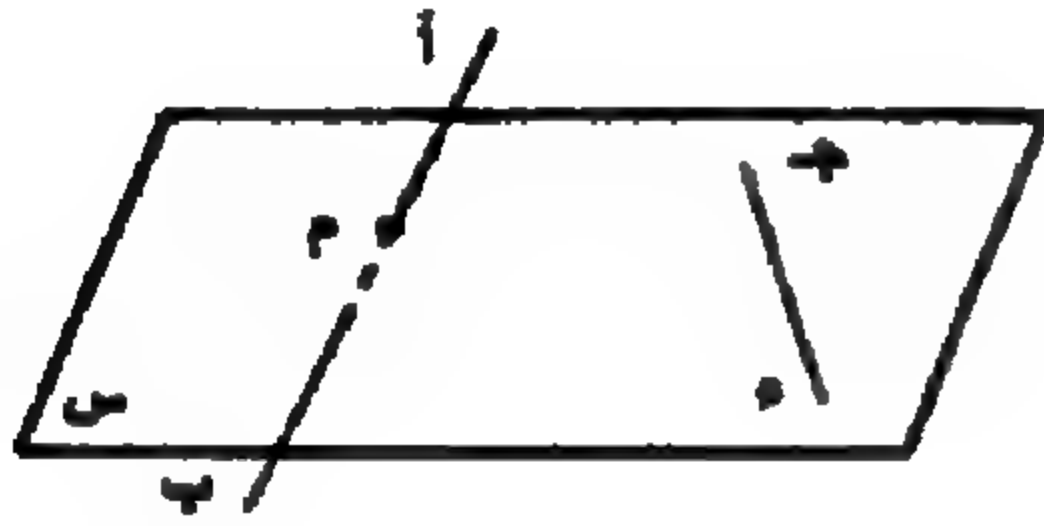
$$\therefore [١] \text{ أ ب } \cap \text{ ج د } = \{هـ\}$$

[٢] أ ب ، ج د يقعان في مستوي واحد .



(٢) قد يكون المستقيمان متوازيين مثل المستقيمين

س ص ، ل م وهما أيضاً في مستو واحد ولا يتلاقيان مهما امتدا .



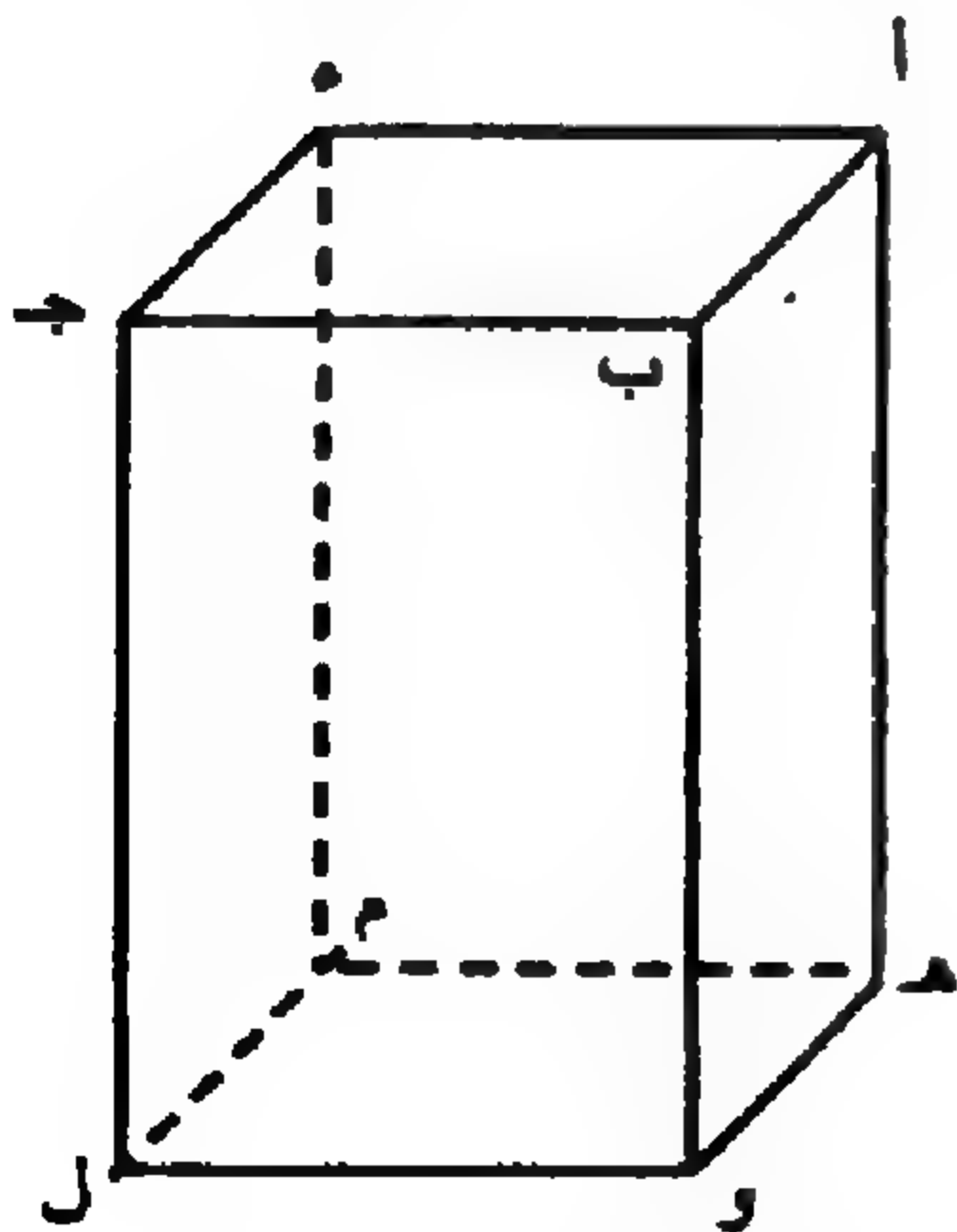
(٣) قد لا يكون المستقيمان في مستو واحد أي لا

يمكن أن يوجد مستو واحد يجمعهما وفي هذه الحالة يقال إن المستقيمين غير مستويين معاً أو أنهما متخالفان.

فمثلاً: أ ب يقطع المستوى س في نقطة م والمستقيم ج د واقع في المستوى س ولا يمر بنقطة م فيقال أن أ ب ، ج د مستقيمان متخالفان.

$$\therefore [١] \text{ أ ب } \cap \text{ ج د } = \emptyset$$

[٢] أ ب ، ج د لا يقعان في مستوي واحد .



مثال: من الشكل الذي أمامك :

- ١- أنكر مستقيمين يوازيان ب و
- ٢- أنكر مستقيمين يوازيان ل و
- ٣- أنكر مستقيمين يوازيان المستوى ب و ل ج
- ٤- أنكر مستقيمين يوازيان المستوى هـ و ل م
- ٥- أنكر مستقيمين يوازيان المستوى أ ب و هـ
- ٦- أنكر مستويين يوازيان المستوى أ هـ م ع
- ٧- أنكر مستقيمين متخالفين أحدهما ج د
- ٨- أنكر مستقيمين متخالفين أحدهما أ هـ

الحل

- | | | |
|---------------|----------------|--------------|
| (١) م، جـ ل | (٢) هـ م، ب جـ | (٣) أ هـ، م |
| (٤) أ ب، ع جـ | (٥) م ل جـ | (٦) ب و ل جـ |
| (٧) و ل، هـ م | (٨) ع جـ، م ل | |

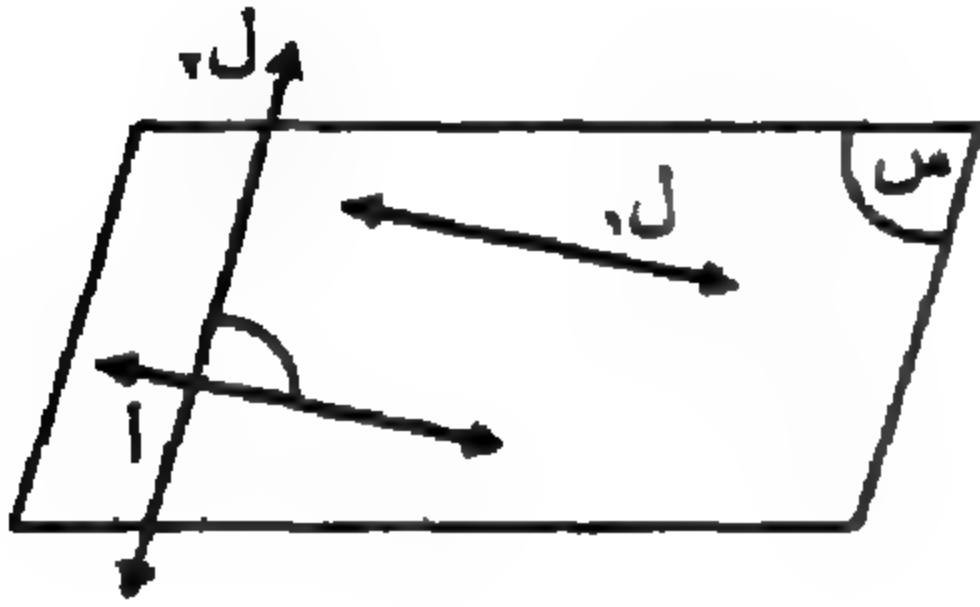
مثال: من الشكل المقابل أ ب جـ ع شبه منحرف أثبت أن أضلاعه تقع جميعاً في مستوى واحد .

الحل



أ ب، ع جـ مستقيمان متوازيان يعينان مستوى وليكن س .
 ∴ النقاط الأربعة أ، ب، جـ، ع تقع في هذا المستوى .
 أي أن المستقيمين أ ع، ب جـ يقعان في المستوى س .
 ∴ المستقيمتان أ ب، ع جـ، أ ع، ب جـ تقع في المستوى .

الزاوية بين مستقيمين متخالفين :-



الزاوية بين مستقيمين متخالفين هي إحدى الزوايا التي يصنعها أحدهما مع أي مستقيم مرسوم من نقطة عليه موازياً الآخر بفرض أن l_1, l_2 مستقيمان متخالفان ، l_1 يقع في المستوي س ، l_2 ∩ س = { أ } من نقطة أ في المستوي س نرسم أ هـ // l_1 فتصبح الزاوية بين أ هـ، l_2 هي الزاوية بين l_1, l_2 .

ملاحظة :

إذا كان قياس الزاوية بين المستقيمين المتخالفين = 90° فإنه يقال إن المستقيمين المتخالفين متعامدان .

مثال:

أ، ب نقطتان تقعان جهتين مختلفتين من مستوى س فإذا كان $\overline{أ ب} \cap س = \{ ع \}$ ، رسم الشعاع أ جـ ليقطع المستوى س في جـ والشعاع ب هـ ليقطع المستوى س في هـ بحيث كان أ جـ // ب هـ أثبت أن جـ، ع، هـ تقع على استقامة واحدة .

الإثبات

$\therefore \overline{أج} // \overline{هـ ب}$ فهما يعينان مستو وليكن ص

$\therefore ج، هـ \in \text{ص} \therefore ج، هـ \in \text{ص}$

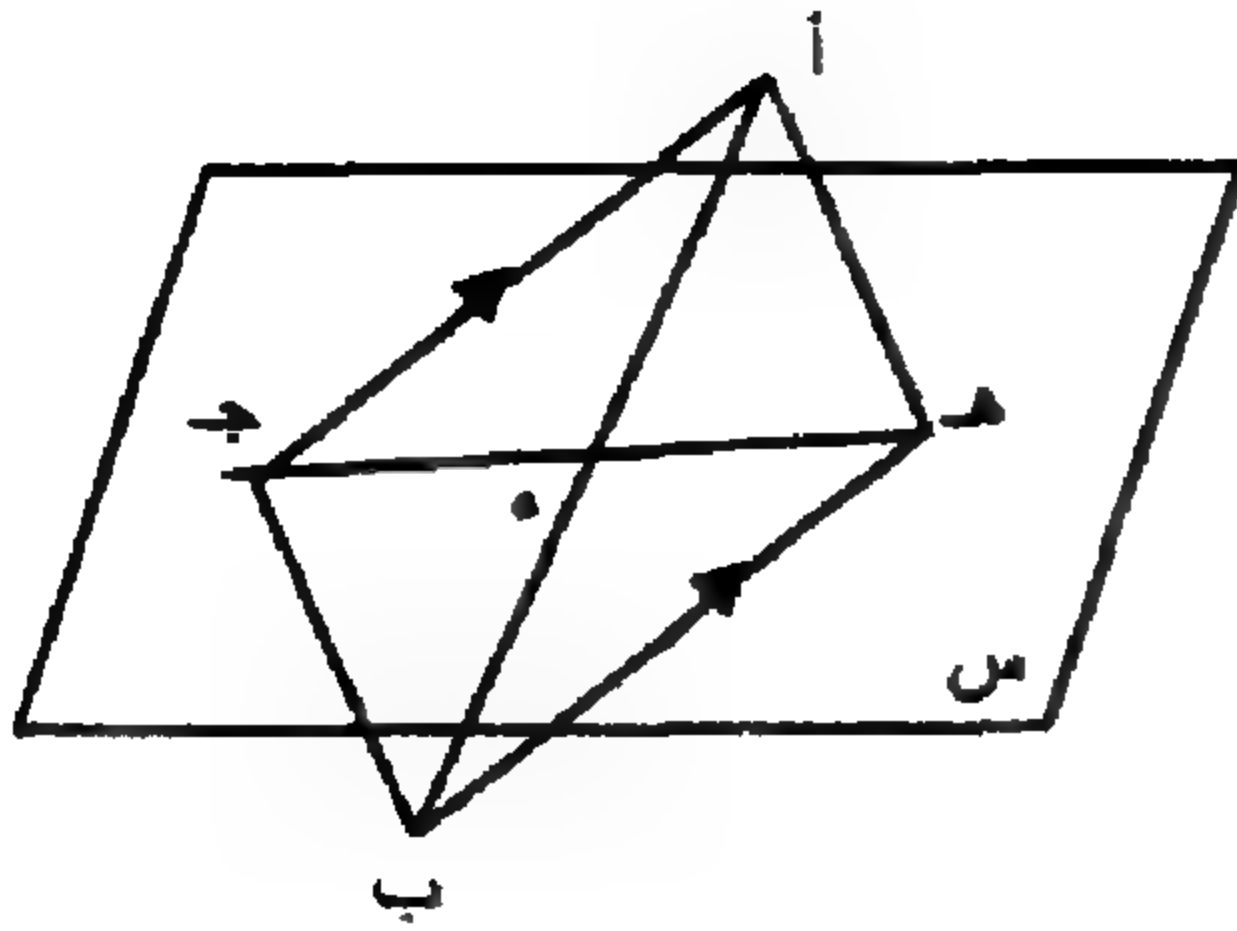
$\therefore \overline{أب} \subset \text{ص} \therefore \overline{أب} \subset \text{ص}$

$\therefore \text{ص} \supset \overline{أب}$

$\therefore \{أ، ب\} = \text{ص} \cap \overline{أب}$

$\therefore \text{ص} \supset \overline{أب} \therefore \text{ص} \supset \overline{أب}$

\therefore النقطة ج، هـ، هـ تقع علي استقامة واحدة .



مثال: برهن أن :

إذا قطع مستقيم ثلاثة مستقيمات متوازية فإن المستقيمات الأربعة تقع في مستوى واحد .

البرهان

نفرض أن ل، م، ن ثلاثة مستقيمات متوازية يقطعها

المستقيم ك في الترتيب

$\therefore ل // م$ $\therefore ل، م$ يعينان مستوى واحد وليكن ص

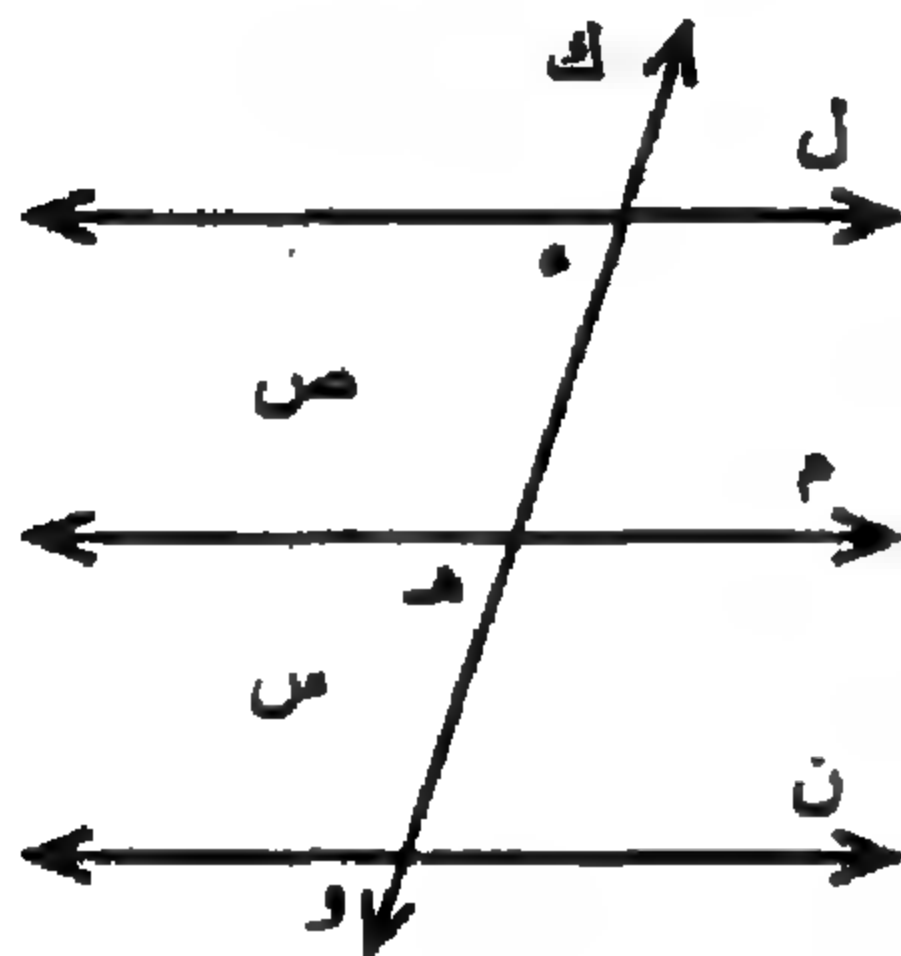
$\therefore \overline{أب} \subset \text{ص} \therefore \overline{أب} \subset \text{ص}$

$\therefore م // ن$ $\therefore م، ن$ يعينان مستوى واحد وليكن س

$\therefore \text{و} \in \text{ص}، \text{و} \in \text{س} \therefore \text{و} \in \text{ص} \cap \text{س} = \text{م}$

$\therefore \text{و} \in \text{و} \in \text{س} \cap \text{ص}$ حيث $و \notin \text{م}$ $\therefore \text{و} \in \text{و} \in \text{س} \cap \text{ص}$

$\therefore ل، م، ن، ك$ يحويها مستوى واحد.



مثال: أب، أج، آء ثلاثة مستقيمات في الفراغ متقاطعة في نقطة أ قطعها جميعاً المستقيم ل

في ب، ج، هـ علي الترتيب برهن أن المستقيمات الأربعة في مستوى واحد .

الحل

\therefore المستقيمان أب، أج متقاطعان

ب ج د س

۱۰ء دس ، ۲۰ء دس

۱۰۰

ملاحظات تفيد:

(١) إذا كان المستقيمان ل، ل٢ لا يتقاطعان ولا يتوازيان فأنهما :

ا۔ متخالفان۔
ب۔ او غیر مستویین معا۔

(٢) إذا كان L_1, L_2 مستقيمين في الفراغ وكان $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ فإنه إما :

أ- أن يكون المستقيم متوازيان. ب- أو متخالفان.

(٣) إذا تقاطع مستويان في خط مستقيم وكانت α و β للمستويين فإن α و β خط تقاطعهما .

(٤) المستويان يتقاطعان في خط مستقيم بينما الثلاثة مستويات يتقاطعون في خط مستقيم أو نقطة .

مثال: ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (x) أمام العبارة الخاطئة:-

(١) بفرض أن l مستقيم ، m مستوي ، النقطة

۱۔ إذا كان لـ س = { ا } فإن لـ س

ب۔ إذا كان ل \cap س = ϕ فإن ل // س

ج۔ إذا كان لـ د س فإن لـ س = ϕ

د- إذا كان ليواري س فإن ل ن س = { ا }

الحل: ١ - x ب - x ج - x د - ✓✓

(٢) أ- أي نقطتين تعينان مستويا .

ب- يتعين المستوي إذا علم ثلاث نقاط تنتمي إليه .

ج- يتطابق المستويان إذا اشتركا في ثلاث نقاط.

د- اضلاع اي مستطيل تقع في مستوي واحد.

هـ في الشكل الرباعي ا ب ج هـ إذا كن $\overline{ا ج} \cap \overline{ب هـ} = \{م\}$

كانت أضلاع الشكل في مستوى واحد .

و- اضلاع أي شكل رباعي تقع في مستو واحد .

الحل: أ - x




x-5

✓ →



x-9

تمرين (١)

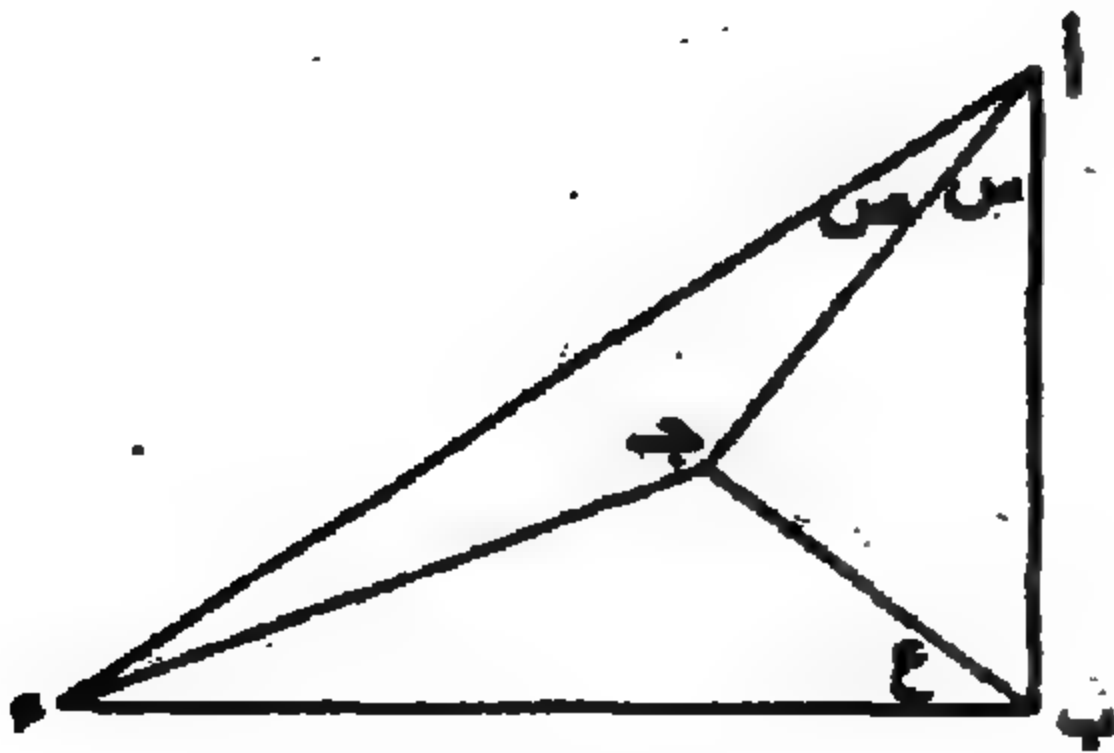
(١) أذكر العبارة الصحيحة والعبارة الخاطئة:-

١. المستقيمان المتخالفان لا يجمعهما مستوي واحد .
٢. يمكن أن يمر بالمستقيم عدد لا نهائي من المستويات .
٣. رؤوس المثلث تعين مستويًا .
٤. المستويان S ، V متوازيان $S \cap V = \emptyset$
٥. إذا وازى مستقيم مستويًا فإنه يوازي جميع المستقيمت الواقعة في هذا المستوي .
٦. المستقيمت التي توازي مستوي واحد تكون متوازية.
٧. المستقيمان المتخالفان يمكن أن يمر بهما مستويان متوازيان.
٨. المستوي يجرى الفراغ إلى ثلاث مجموعات منفصلة من النقط .
٩. يمكن أن يمر بالمستقيم عدد لا نهائي من المستويات .
١٠. جميع المستويات الأفقية في الفراغ متوازية.

(٢) S ، V ، E ، L أربع نقط في الفراغ بحيث $S \cap V // E \cap L$
 أثبت أن $S \cap V$ ، $S \cap E$ ، $E \cap L$ ، $L \cap S$ يحويها مستوي واحد .

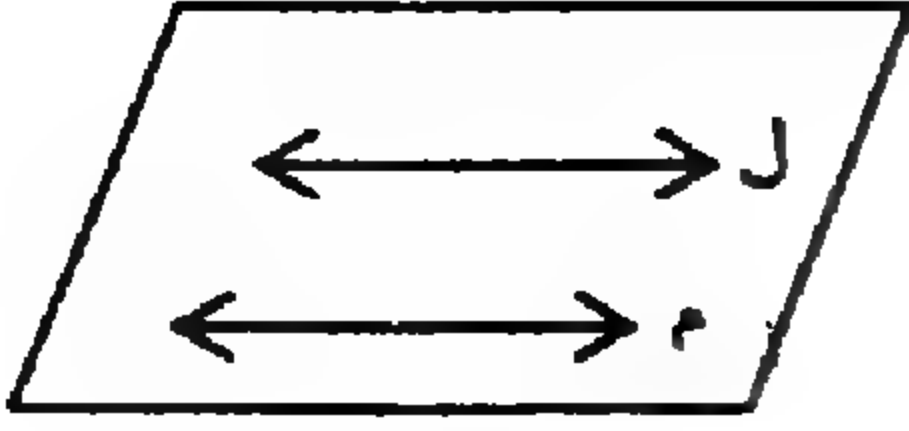
(٣) أثبت أن إذا تقاطعت ثلاثة مستويات متني متني في ثلاثة مستقيمت وتقاطع مستقيمان منهما في نقطة فإن نقطة تقاطع هذين المستقيمين تنتمي إلى المستقيم الثالث .

(٤) في الشكل المقابل أكمل :



١. $S \cap V =$
٢. $S \cap E =$
٣. $V \cap E =$
٤. $A \cap B =$
٥. $B \cap C =$ ، $C \cap A =$
٦. $S \cap V \cap E =$

توازي المستقيمان



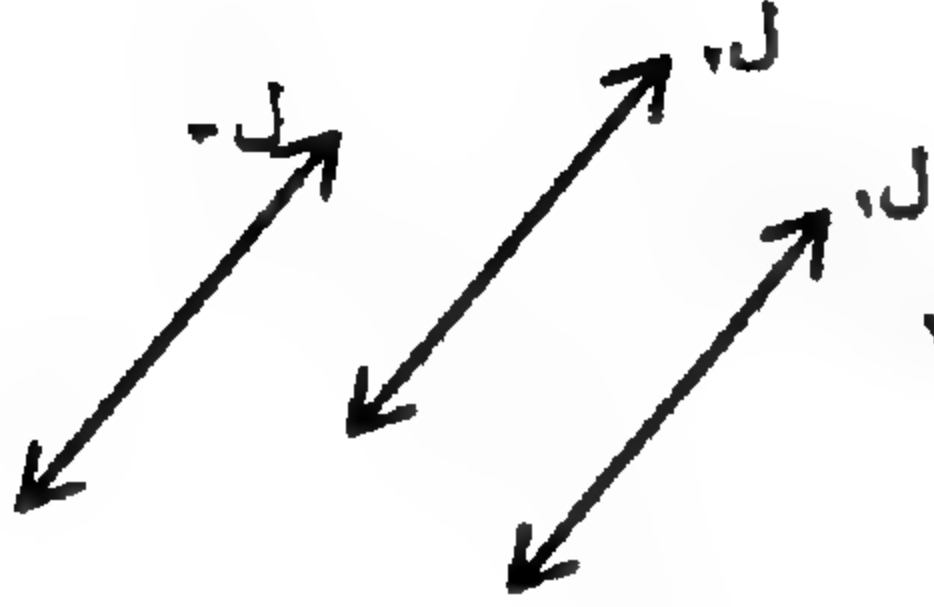
المستقيمان ل ، م يتوازيان وبذلك يكون

(أ) ل ، م في مستوى واحد.

(ب) $ل \cap م = \emptyset$

أي رغم وقوع ل ، م في مستوى واحد ومع ذلك لا يشتركان في أي نقطة

حقيقة :



المستقيمان الموازيان لثالث في الفراغ متوازيان .

المستقيم ل١ // المستقيم ل٢ ، المستقيم ل٢ // المستقيم ل٣

∴ المستقيم ل١ // المستقيم ل٣

بعض المجسمات الشهيرة

المجسم :

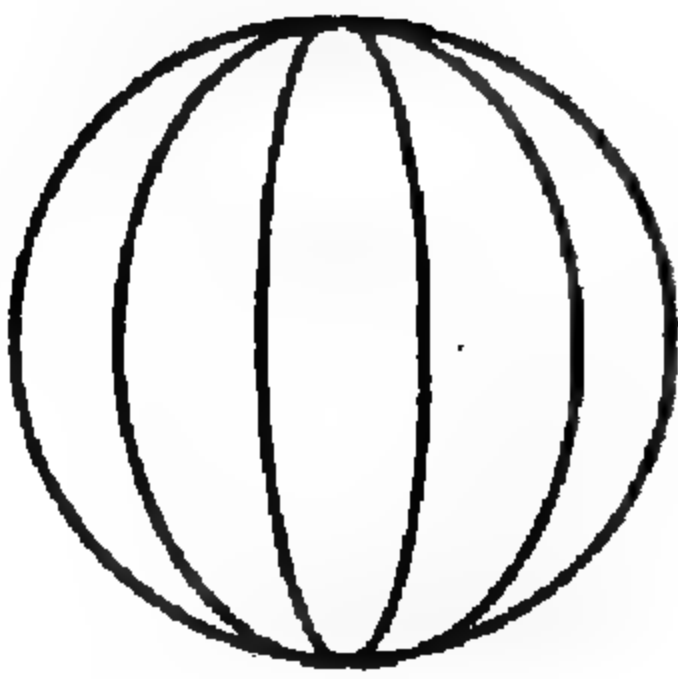
هو كل ما يشغل حيزاً من الفراغ وتفصله عن الفراغ سطوح مستوية أو سطوح منحنية.

والمجسمات تنقسم إلى ثلاثة أنواع رئيسية هي:

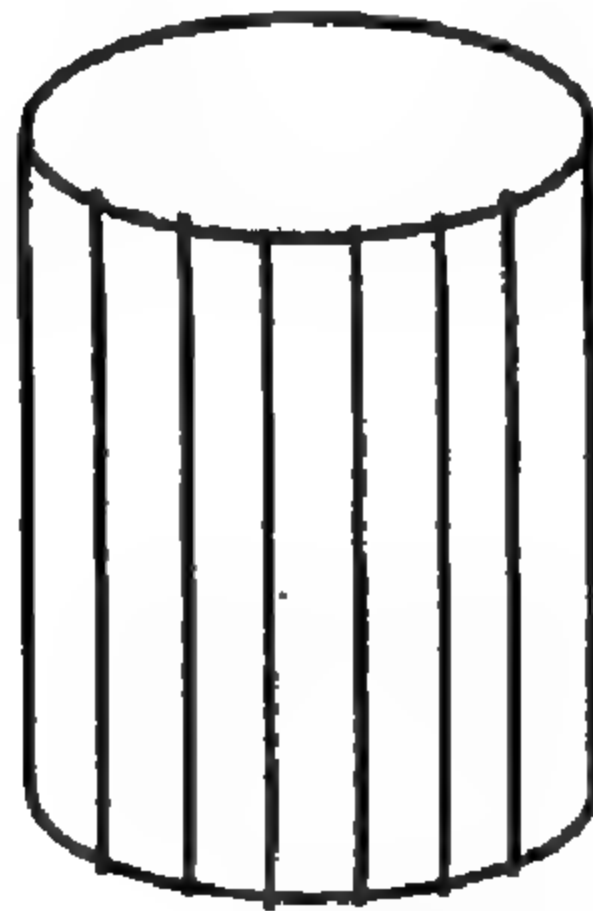
(١) مجسمات جميع أوجهها مستوية وغالباً ما يطلق عليها كثيرات السطوح . شكل (١)

(٢) مجسمات بعض أوجهها مستوية والأخرى سطوح منحنية . شكل (٢)

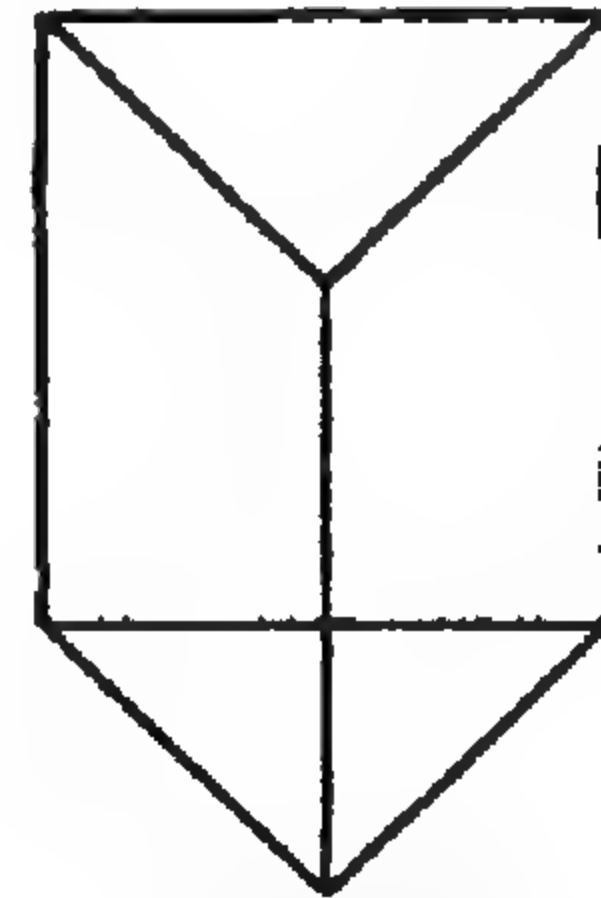
(٣) مجسمات جميع أوجهها سطوح منحنية . شكل (٣)



شكل (٣)



شكل (٢)

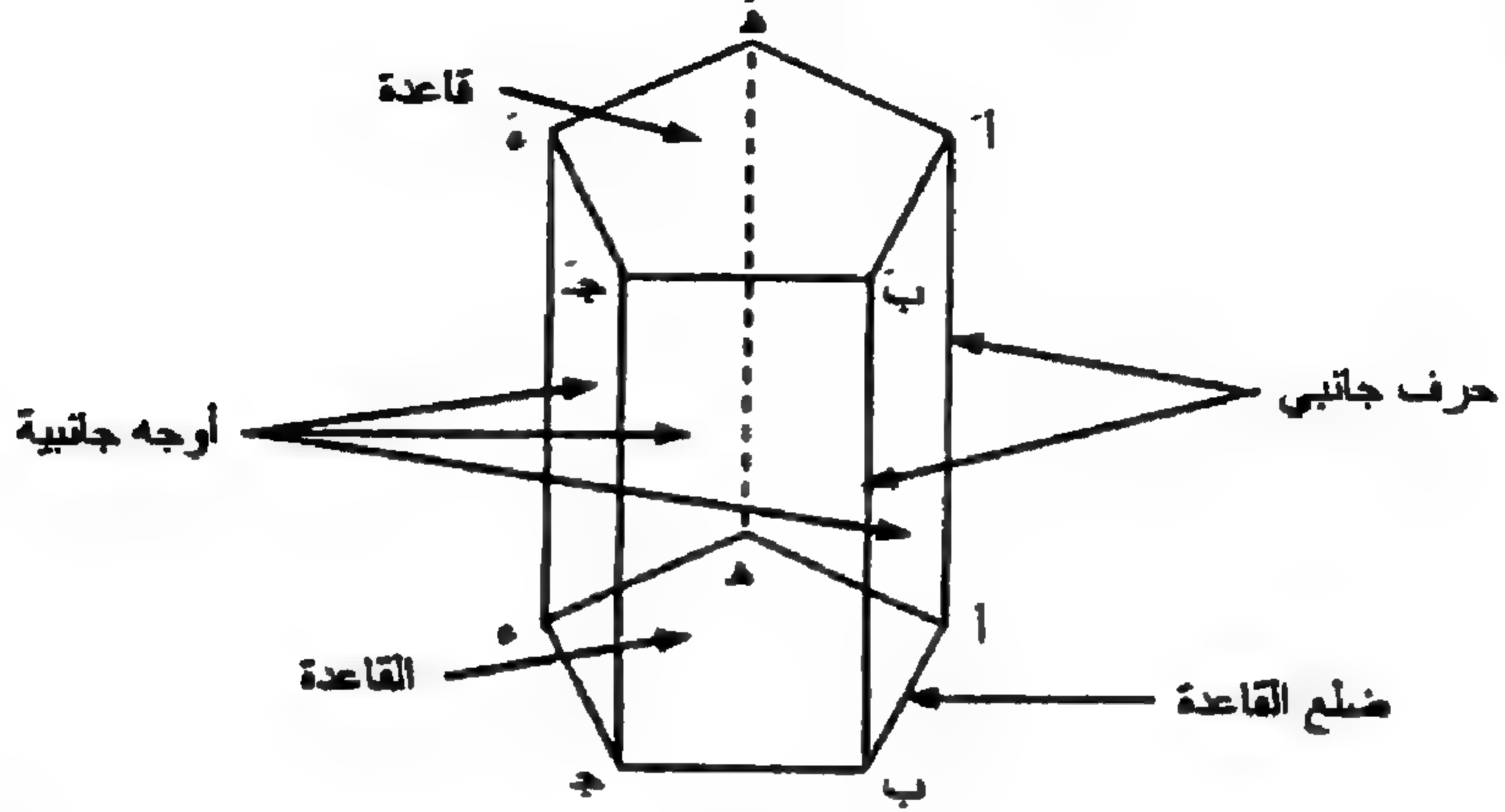


شكل (١)

أولاً : المنشور

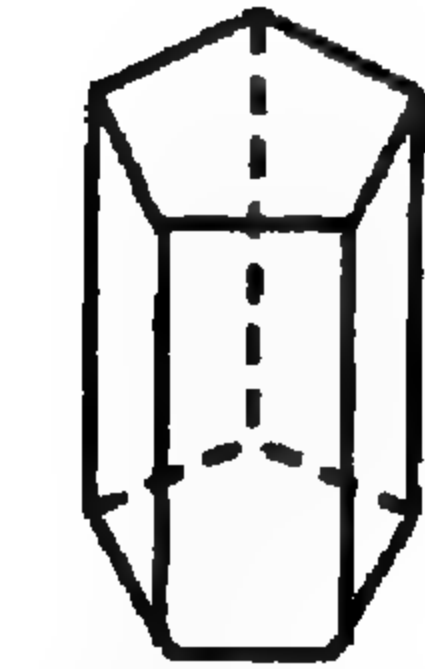
تعريف :

المنشور هو الجسم المتولد من انتقال سطح مضلع موازياً لنفسه في اتجاه ثابت ويسمى سطح المضلع في كل من وضعه الأول والأخير قاعدة المنشور.

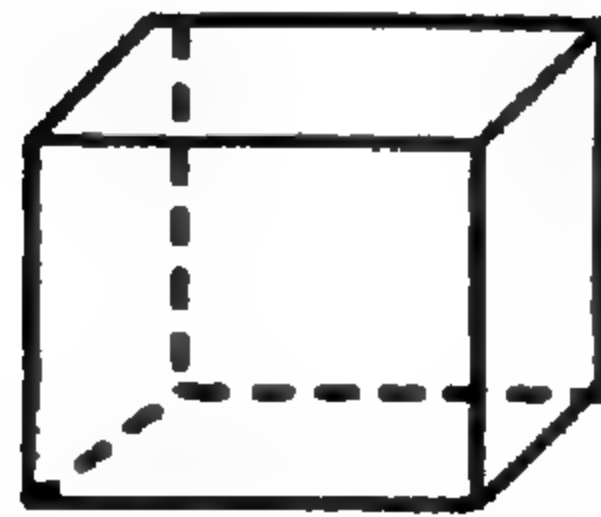


- المنشور له قاعدتان متوازيتان ومتطابقتان - أوجهه الجانبية على شكل متوازي أضلاع - أحرفه الجانبية متساوية ومتوازية.
- يقال أن المنشور ثلاثي إذا كانت كل من قاعدتيه سطح مثلث .
ويقال أن المنشور رباعي إذا كانت كل من قاعدتيه سطح شكل رباعي .
ويقال أن المنشور خماسي إذا كانت كل من قاعدتيه سطح خماسي ،

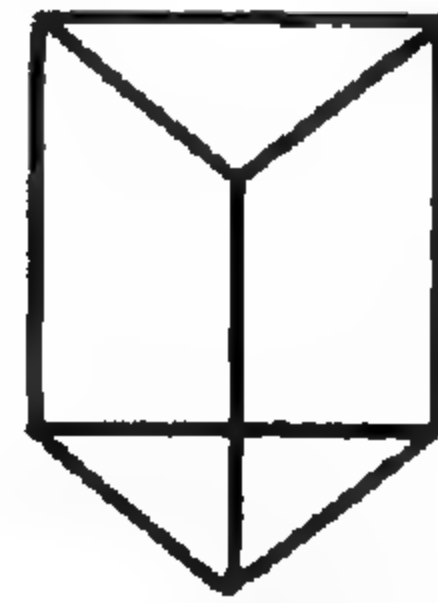
المنشور القائم:



منشور خماسي قائم



منشور رباعي قائم

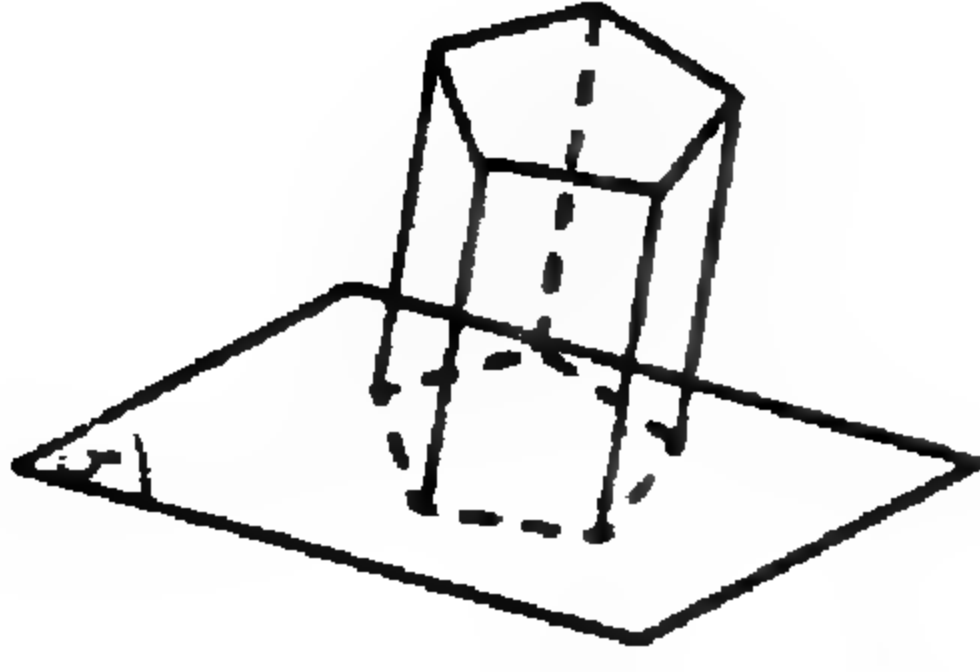


منشور ثلاثي قائم

ويسمى المنشور قائماً إذا كانت:-

- أوجهه الجانبية عمودية على مستوى القاعدة.
- أحرفه الجانبية عمودية على مستوى القاعدة .
- أوجهه الجانبية مستطيلات.

المنشور المائل :

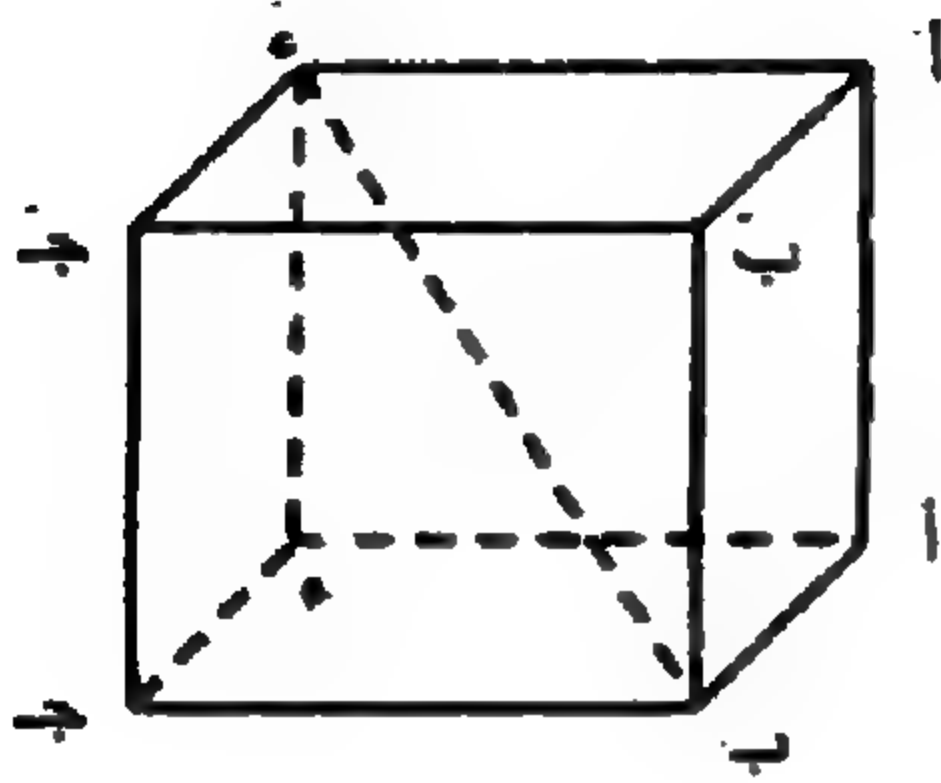


يسمى المنشور مائلا:

إذا كانت أوجهه الجانبية مائلة على مستوى القاعدة .

حالات خاصة للمنشور

١- متوازي السطوح :-



منشور كل من قاعدتيه سطح متوازي أضلاع
وبذلك تحده ستة أوجه كل منها سطح متوازي
أضلاع حيث كل وجهين متقابلين متوازيين
ومتطابقين وله ١٢ حرف كل أربعة متوازية
ومتساوية وله ثمانية رؤوس .

أقطار متوازي السطوح:

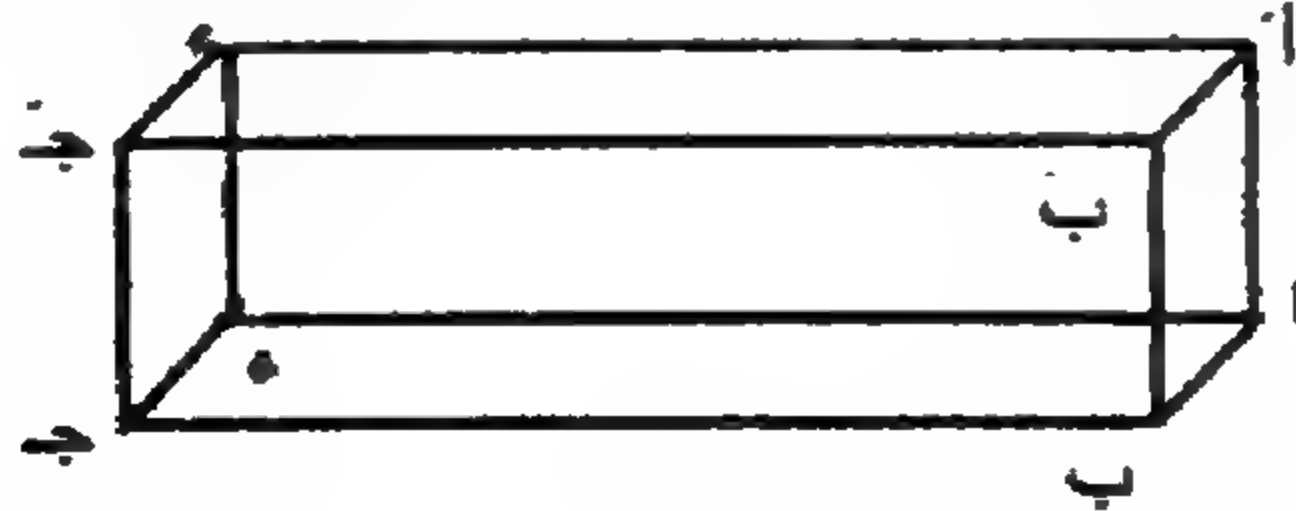
هي القطع المستقيمة التي تصل بين رأسين ليسا في وجه واحد عددها أربعة وهي كما بالشكل:

أ ج ، أ ج ، ب ع ، ب ع

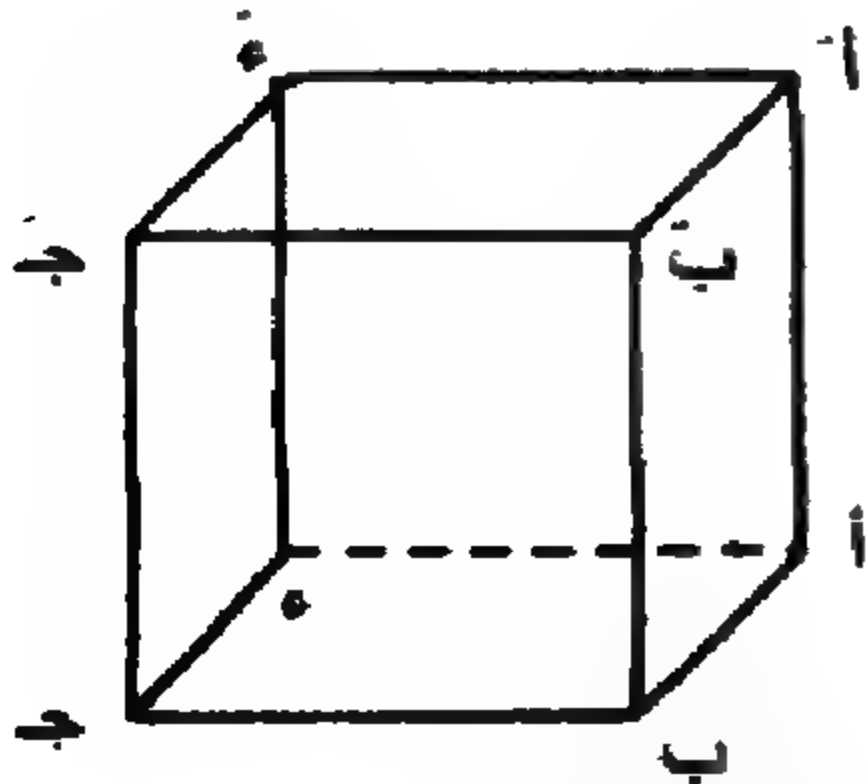
وأقطار متوازي السطوح تتقاطع جميعا في نقطة واحدة هي منتصف كل منها.

٢- متوازي المستطيلات:-

هو منشور رباعي قائم قاعدته سطح مستطيل. له ستة أوجه جميعها مستطيلات. أقطاره متساوية
في الطول وتتقاطع في نقطة هي منتصف كل منها. متوازي المستطيلات هو متوازي سطوح قائم
قاعدتيه مستطيل .



٣- المكعب :-



- هو متوازي مستطيلات تساوت أبعاده الثلاثة .

- له (٦) أوجه عبارة عن سطوح مربعة متقاطعة .

- له (١٢) حرف متساوية في الطول.

- له ثمانية رؤوس.

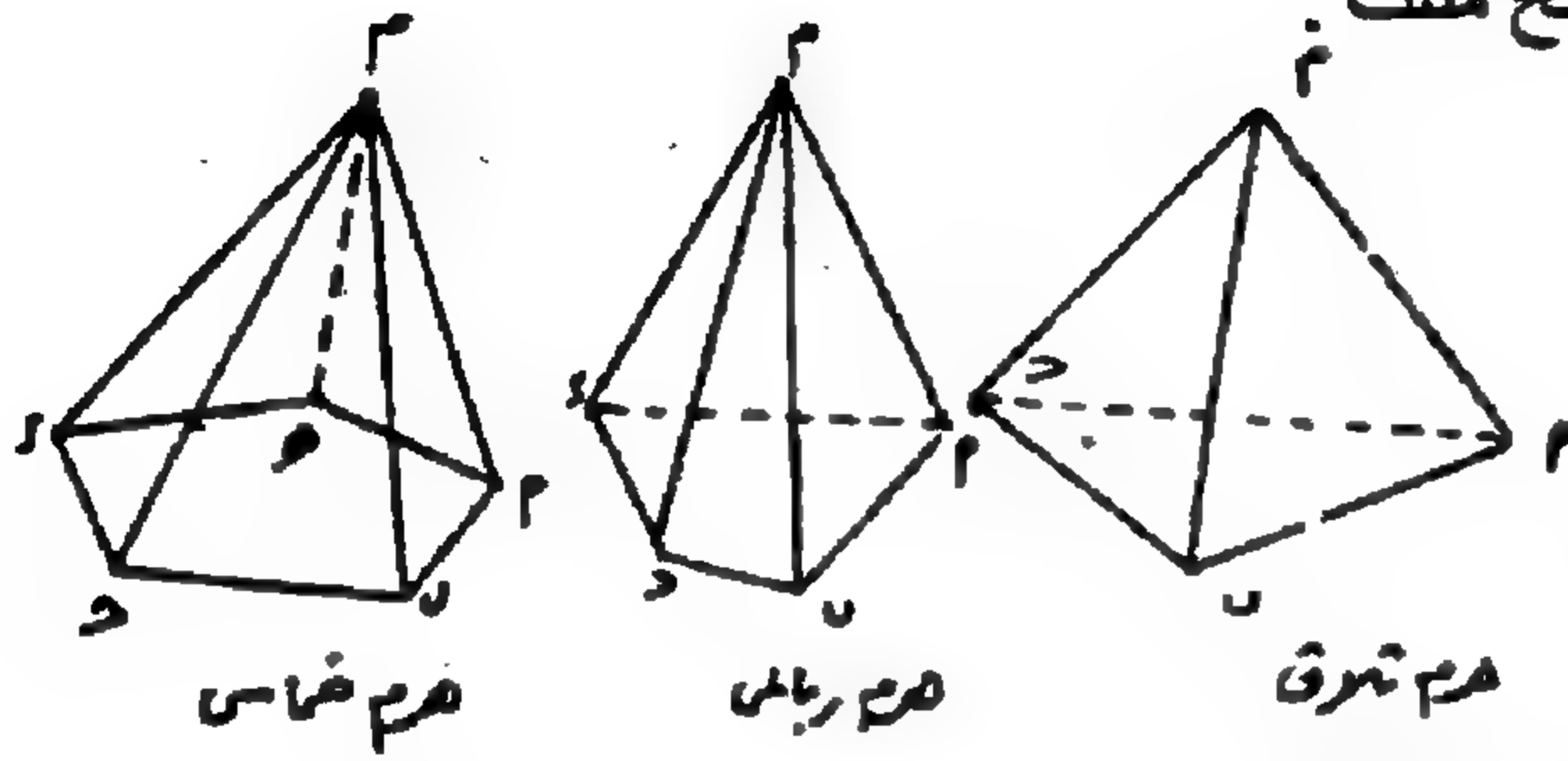
- له (٤) أقطار متساوية وتتقاطع جميعا في نقطة واحدة هي منتصف كل منها.

ثانياً: الهرم

تعريف:

إذا كانت م نقطة لا تنتمي إلى سطح المضلع س فإن اتجاه القطع المستقيمة المرسومة من النقطة م إلى جميع نقاط سطح المضلع س يسمى هرمًا. وتسمى م رأس الهرم ويسمى سطح المضلع بقاعدة الهرم.

- يقال أن الهرم ثلاثي إذا كانت قاعدته سطح مثلث
- ويقال أن الهرم رباعي إذا كانت قاعدته سطح رباعي.
- ويقال أن الهرم خماسي إذا كانت قاعدته سطح خماسي أي يسمى الهرم تبعاً لعدد أضلاعه.



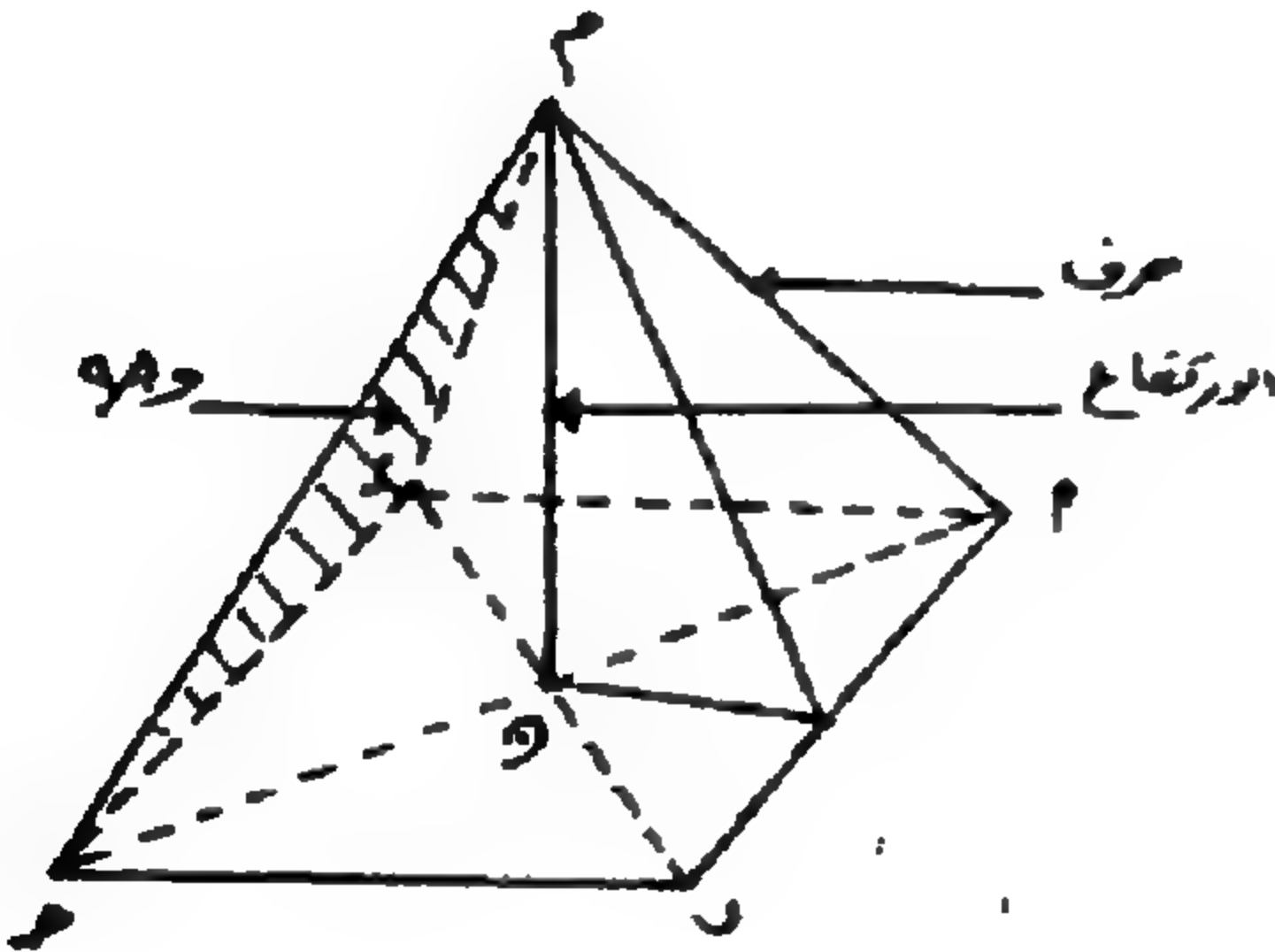
- الأحرف الجانبية هي القطع المستقيمة

م أ ، م ب ، م ج ، م د المرسومة من

رأس الهرم إلى رؤوس القاعدة .

- ارتفاع الهرم هو طول القطعة المستقيمة م ن

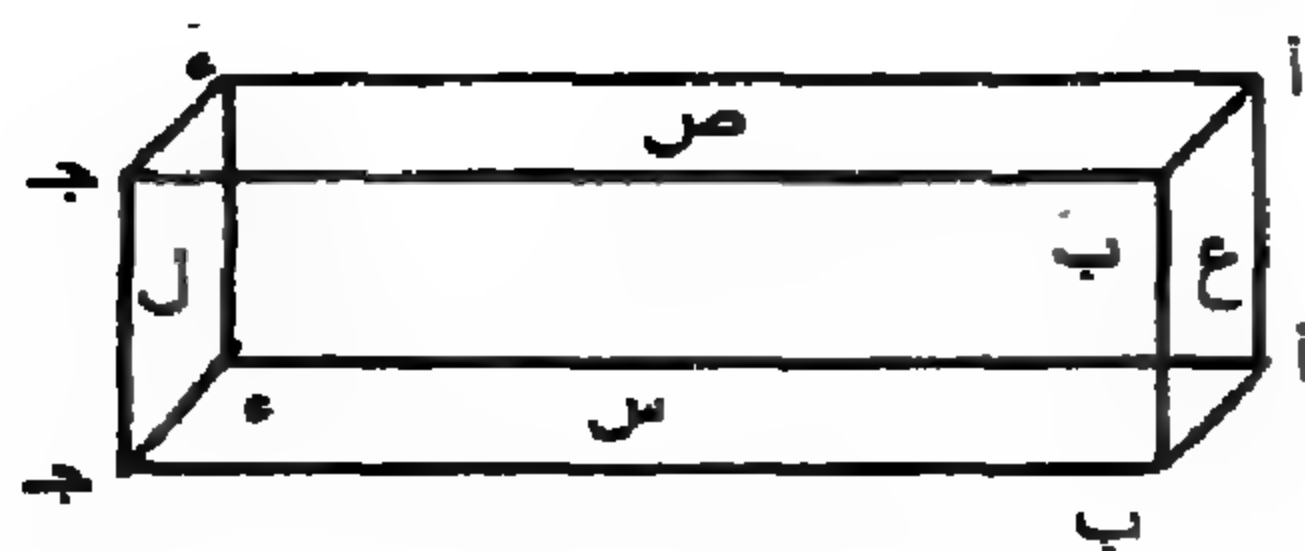
المرسومة من م عمودية على مستوى القاعدة .



الهرم الثلاثي المنتظم:

هو هرم أوجهه الأربعة مثلثات متساوية الأضلاع وأحرفه الستة متساوية في الطول .

مثال: أ ب ج ء أ ب ج ء متوازي مستطيلات - ما العلاقة بين كل زوج من المستويات الآتية مع تعيين خط التقاطع في حالة تقاطع المستويين



(١) س ، ص

(٢) س ، ع

(٣) ص ، ل

(٤) ع ، ل

الحل

$$\overleftrightarrow{أ ب} = \overleftrightarrow{ع} \cap \overleftrightarrow{س} \quad (٢)$$

$$\overleftrightarrow{ع} \parallel \overleftrightarrow{ل} \quad (٤)$$

$$\overleftrightarrow{س} \parallel \overleftrightarrow{ص} \quad (١)$$

$$\overleftrightarrow{ص} \cap \overleftrightarrow{ل} = \overleftrightarrow{ج} \quad (٣)$$

مثال: من الشكل السابق أكمل :

$$(١) \overleftrightarrow{أ ب} \supset \text{المستوي } \text{---} , \overleftrightarrow{أ ب} \supset \text{المستوي } \text{---}$$

$$(٢) \overleftrightarrow{ج} \parallel \text{كل من المستويين } \text{---} , \text{---} \text{ ويقطع المستوي } \text{---} \text{ في } \text{---}$$

$$(٣) \text{المستوي ص} \cap \text{المستوي } \text{---} = \overleftrightarrow{أ ء} \text{ والمستوي ع} \cap \text{المستوي ل} = \text{---}$$

$$(٤) \overleftrightarrow{أ ء} \text{ --- المستوي س ويقطع المستوي ع في النقطة } \text{---}$$

الحل

$$(١) \text{س} , \text{ع}$$

$$(٢) \text{ع} , \text{ص} , \text{ب ب ج ج}$$

$$(٣) \text{أ ء ء} , \emptyset$$

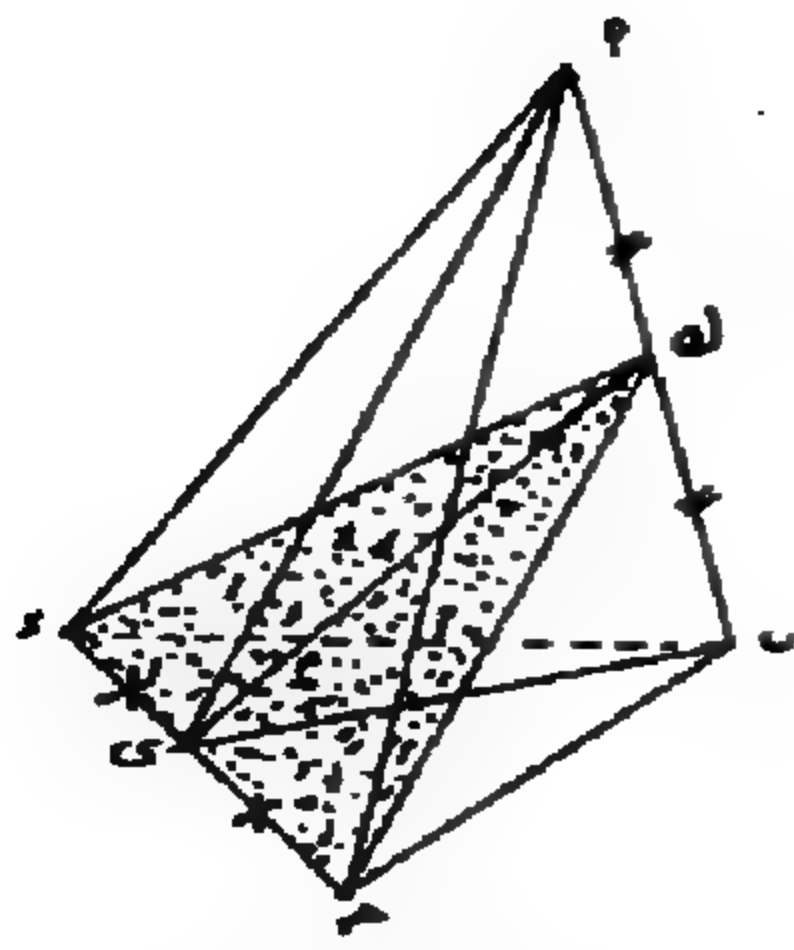
$$(٤) \supset , \{أ\}$$

مثال: أ ب ج ء هرم ثلاثي ، هـ ، ي ، ك منتصفات ب ج ، ج ء ، ب أ على الترتيب عين بالرسم

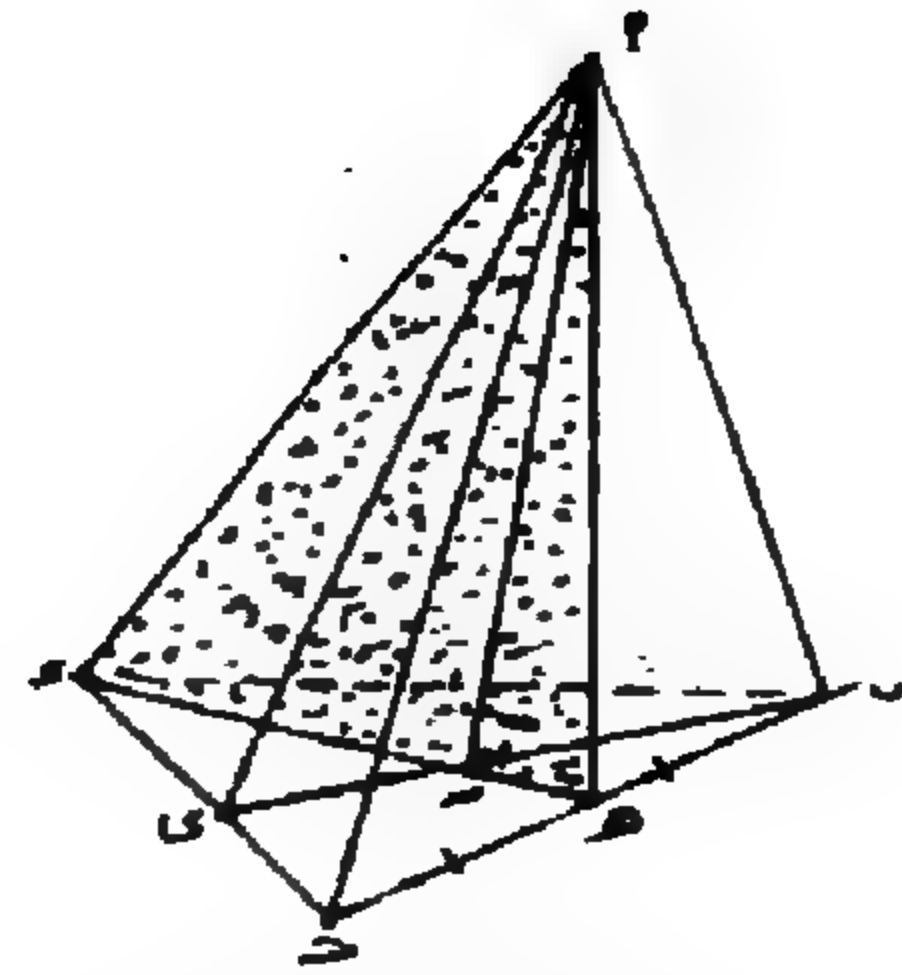
المستقيم الذي يتقاطع فيه كل من :- (أ) المستويين أ ب ي ، أ ء هـ

(ب) المستويين أ ب ي ، ج ء ك

الحل



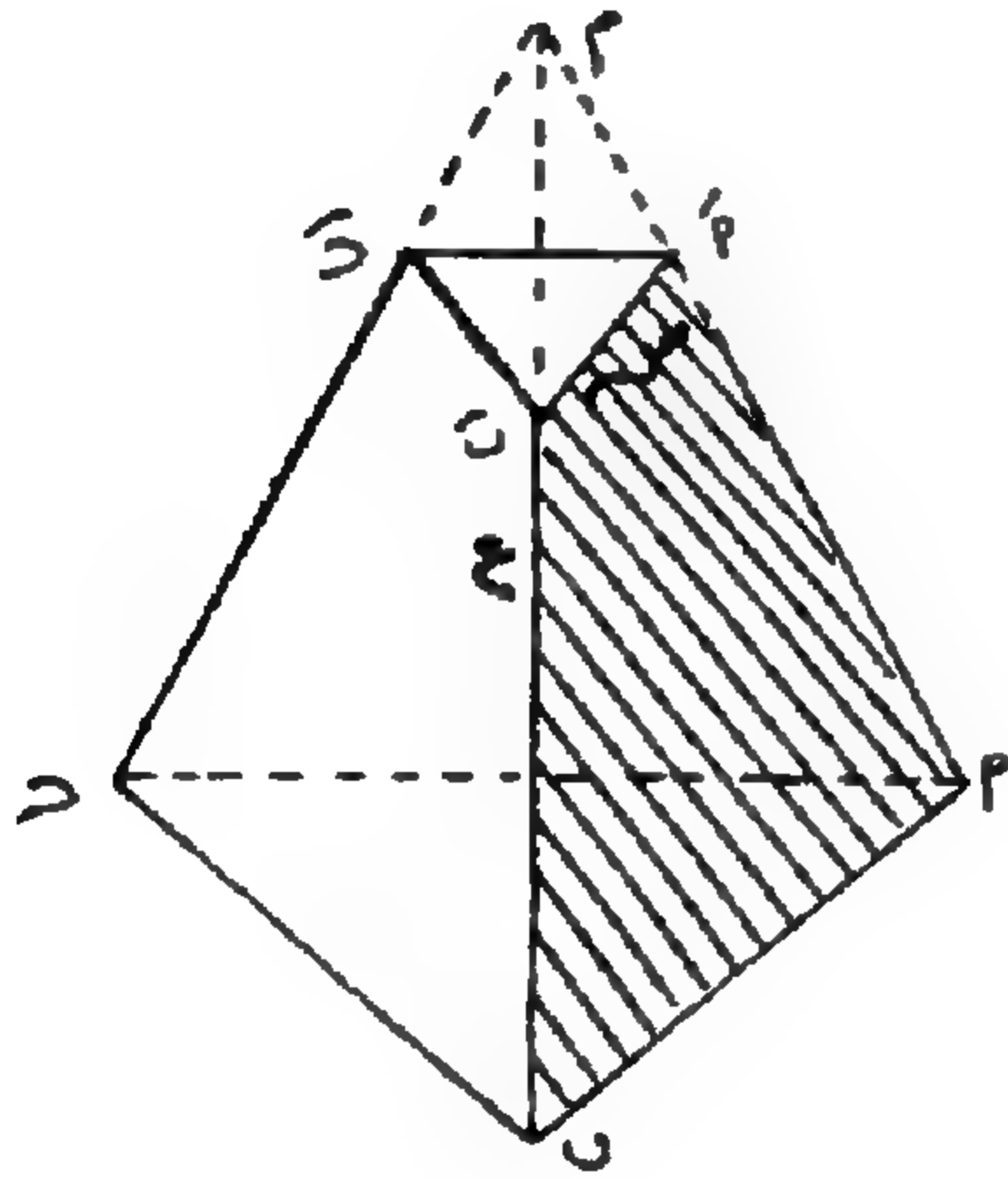
(ب) خط تقاطع المستويين
أ ب ي ، ج ء ك هو ك ي



∴ ن نقطة تلاقي المتوسطات
في Δ ب ج ن
(ا) خط التقاطع هو أ ن

مثال: أ ب ج أ ب ج يسمى هرم ثلاثي ناقص متوازي القاعدتين وقاعدته: أ ب ج ، أ ب ج موازيتان - س ترمز للوجه الجانبي أ ب ب أ ، ص ترمز للوجه ب ج ج ب ، ع ترمز للوجه أ ج ج

أكمل:



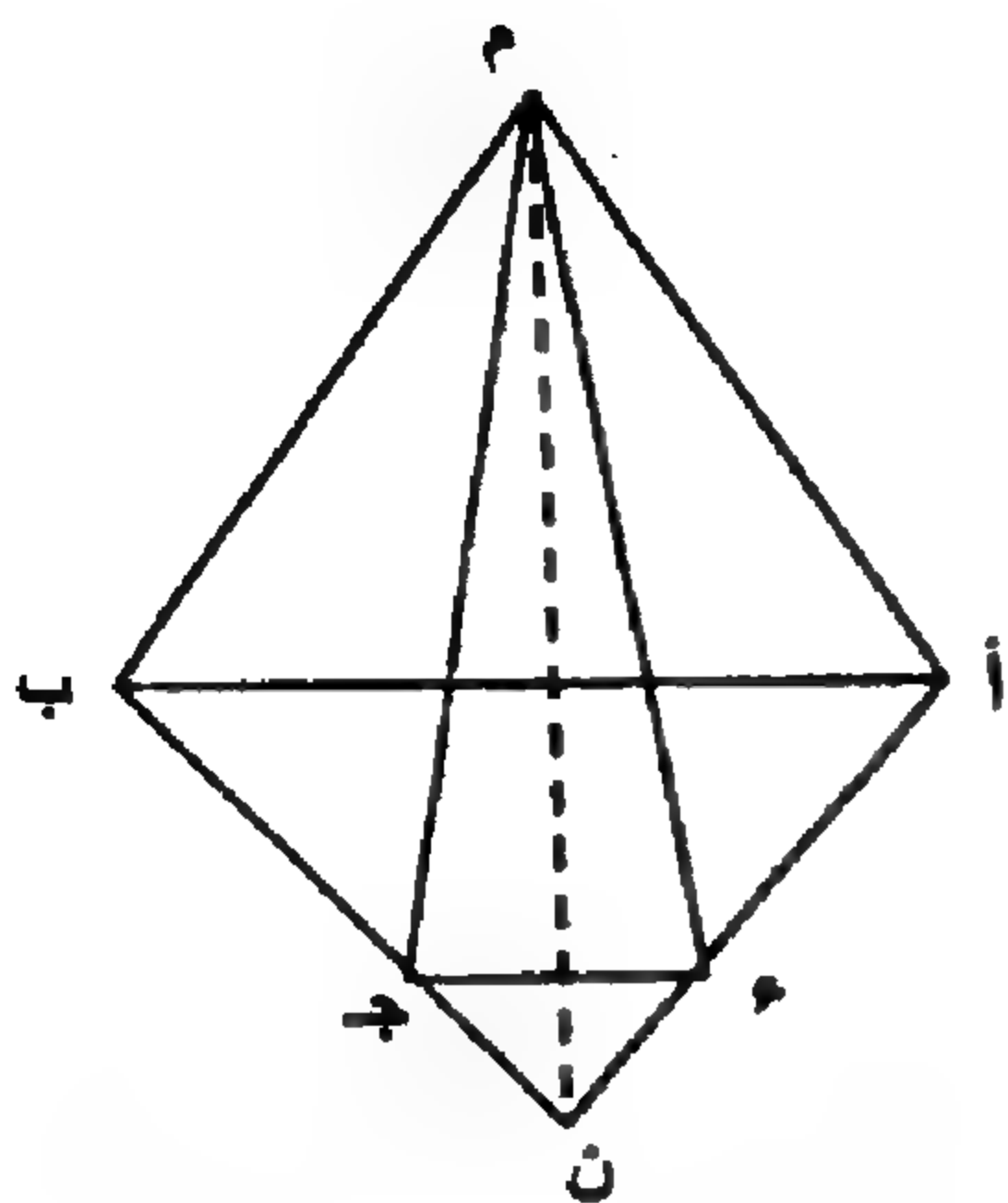
- (أ) س ∩ ع = —
(ب) س ∩ ص = —
(ج) ص ∩ ع = —
(د) س ∩ ص ∩ ع = —
(هـ) س ∩ المستوي أ ب ج = —
(و) أ ب ج ∩ ب ج ج = —
(ز) ص ∩ المستوي أ ب ج = —
(ح) أ ب ج ∩ المستوي أ ب ج = —

الحل

- (أ) أ ب ج (ب) ب ب (ج) ج ج (د) { م }
(هـ) أ ب (و) ∅ (ز) ب ج (ح) ∅

مثال: م أ ب ج د هـ هرم رباعي قاعدته أ ب ج د شبه منحرف فيه $\overline{أ ب} // \overline{هـ ج}$ - أوجد خط تقاطع المستويين م أ هـ ، م ب ج .

الحل

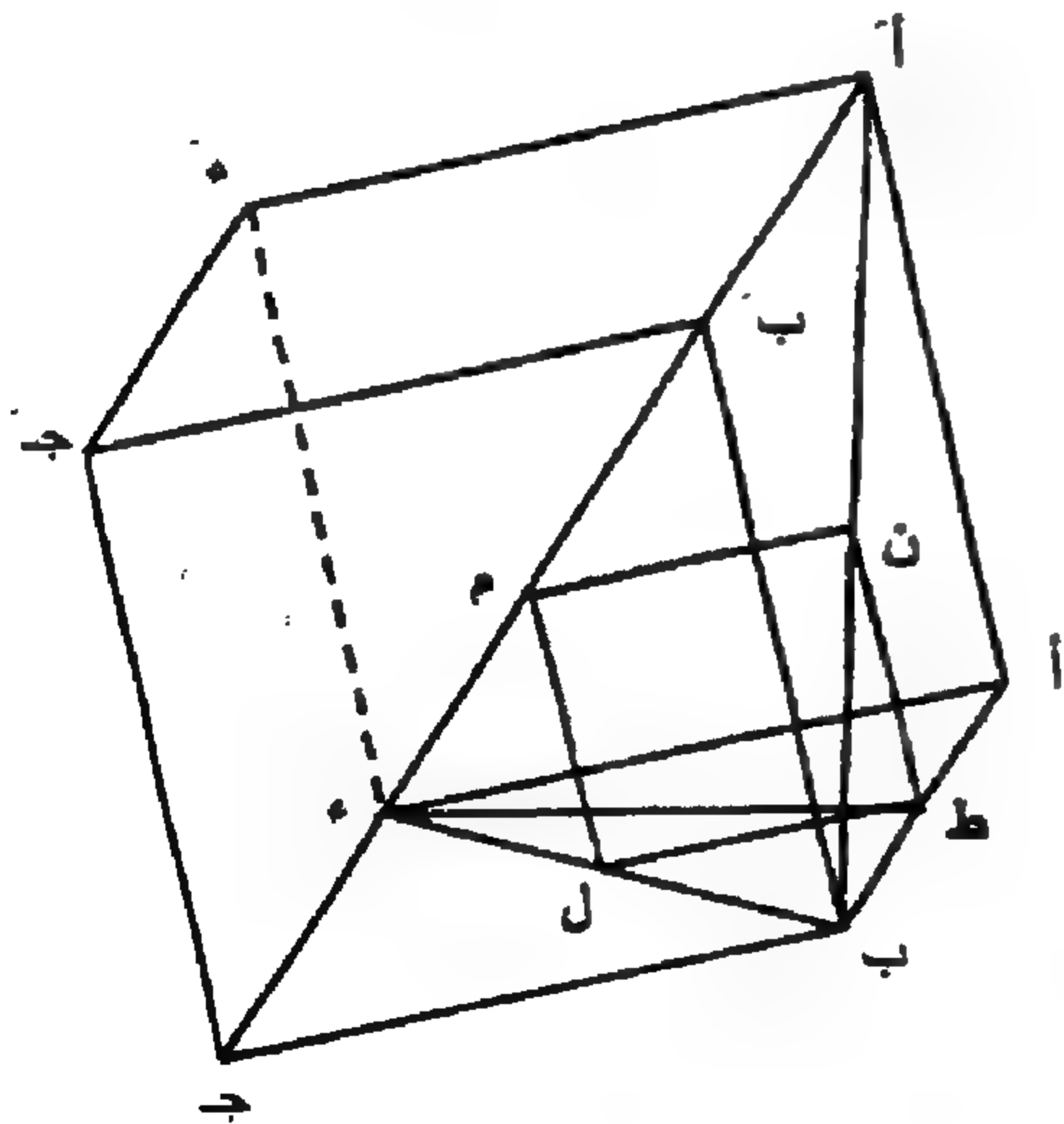


∴ م د لكل من المستويين م أ هـ ، م ب ج
 $\overleftrightarrow{أ هـ} \cap \overleftrightarrow{أ م} = م$
 $\overleftrightarrow{أ هـ} \supset \text{المستوي أ م هـ}$
 $\therefore م د \text{ للمستوي أ م هـ}$
 بالمثل ن د للمستوي م أ هـ ، م ب ج
 $\therefore م ، ن د م أ هـ \cap م ب ج$
 $\therefore \overleftrightarrow{م ن}$ هو خط تقاطع المستويين .

مثال: أ ب ج د هـ أ ب ج د هـ متوازي سطوح م نقطة تقاطع أقطاره ، ط ، ل ، ن منتصفات أ ب ، ب ج ، ج د ، د هـ ، هـ أ ، أثبت أن الشكل ن م ل ط متوازي أضلاع .

الحل

∴ أقطار متوازي السطوح تتقاطع جميعاً في نقطة واحدة هي منتصف كل منها
 $\therefore م$ منتصف ب ج



في $\triangle أ ب ج$
 ن ط واصله بين منتصفى ضلعين
 $\therefore ن ط // أ ب ، ن ط = \frac{1}{2} أ ب$ ---- (١)
 بالمثل في $\triangle ب ج د$
 $\therefore م ل // ب ج ، م ل = \frac{1}{2} ب ج$ ---- (٢)
 $\therefore ن ط // م ل$ ويساويه ---- (٣)

من خواص متوازي السطوح

من (١) ، (٢) ، (٣) ∴ ن ط // م ل ويساويه

∴ الشكل ن م ل ط متوازي أضلاع

مثال: ضع علامة () أمام العبارات الصحيحة ، علامة (x) أمام العبارات الخاطئة:-

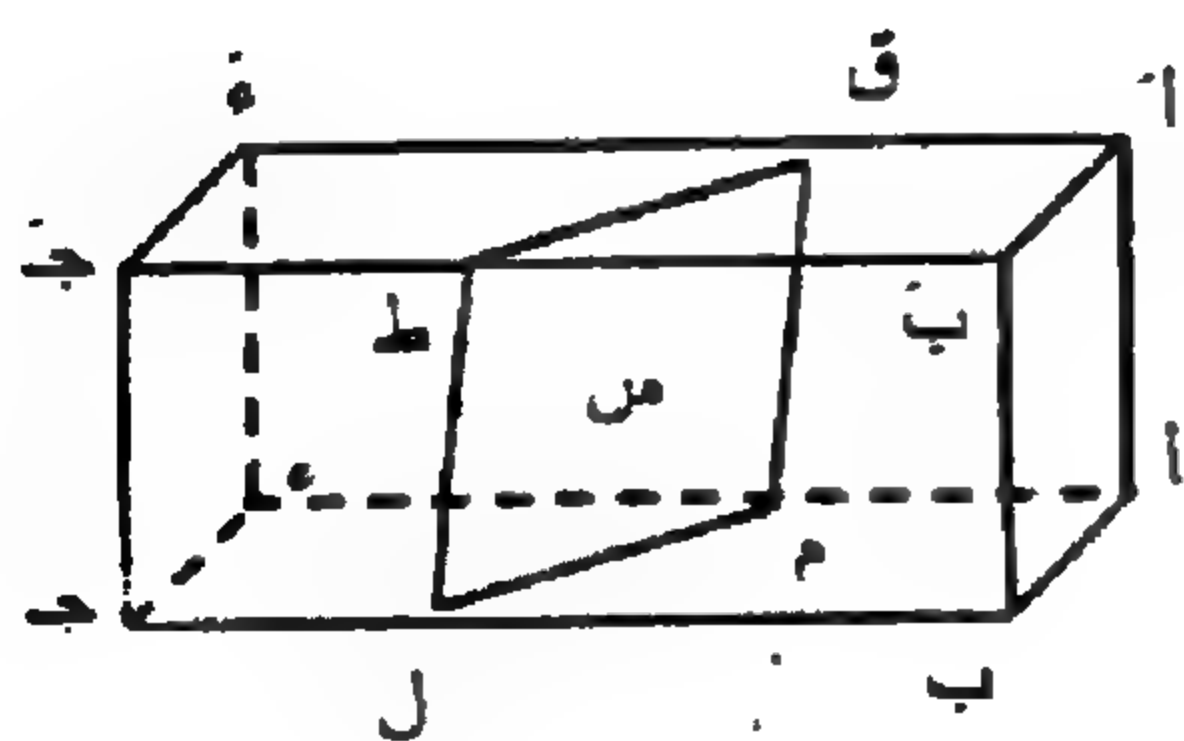
١. قاعدة الهرم الرباعي القائم يمكن أن تكون سطح مستطيل. ()
٢. الهرم المنتظم هو هرم ثلاثي قاعدته سطح Δ متساوي الأضلاع. ()
٣. يتقاطع المستويان في قطع مستقيمة. ()
٤. كل مستقيمين متخالفين في الفراغ يمكن أن يمر بهما مستويان متوازيان. ()
٥. المستويان الموازيان لمستقيم معلوم متوازيان. ()
٦. المستقيمتان التي توازي مستوي واحد تكون متوازية. ()
٧. إذا وازي مستقيم مستوي فإنه يوازي كل مستقيم محتوي في نفس المستوي. ()
٨. إذا توازي مستويان فاي مستقيم في أحدهما يوازي المستوي الآخر. ()

الحل

١. x	٢. x	٣. x	٤. ✓
٥. x	٦. x	٧. x	٨. ✓

مثال: برهن أن مقطع متوازي السطوح بمستو يقطع أربعة أحرف متوازية فيه هو سطح متوازي أضلاع.

البرهان



الوجهين $AA'E$ ، $BB'E$ جـ دـ في

متوازي السطوح متوازيان .

قطعهما المستوي س في ق م ، ط ل

$\therefore \overline{QM} \parallel \overline{PL}$

وبالمثل $\overline{QP} \parallel \overline{ML}$

\therefore الشكل ق ط ل م متوازي أضلاع .

تمرين (٢)

(١) ضع علامة () أمام العبارة الصحيحة وعلامة (x) أمام العبارة الخطأ :-

- أ- إذا كان أ ب ج د هـ هرم ثلاثي فإن ج د أ ب هـ هرم ثلاثي . ()
- ب- إذا كان م أ ب ج د هـ هرم رباعي فإن ج د م أ ب هـ هرم رباعي . ()
- ج- قاعدة المنشور يجب أن تكون سطح مضلع منتظم . ()
- د- المكعب له ثمانية أوجه وستة رؤوس واثنى عشر حرف . ()
- هـ- أقطار متوازي السطوح متساوية في الطول . ()
- و- أقطار متوازي المستطيلات متساوية في الطول . ()
- ز- لا يمكن رسم أربع مستويات كل ثلاثة منها متقاطعة في واحدة . ()

(٢) س ص ع ل شكل رباعي أضلاعه ليست في مستوي واحد (هرم ثلاثي) رسم المستوي σ

يوازي س ع ويوازي ص ل فقطع س ص ، ص ع ، ع ل ، ل س في هـ ، و ، ن ، م ، م علي الترتيب - أثبت أن $\frac{هـ م}{ص ل} + \frac{و ن}{س ع} = 1$

(٣) م س ص ع هرم ثلاثي رسم مستوي يوازي كل من م س ، ص ع ماراً بنقطة ل منتصف س ص

قاطعاً م ص ، م ع ، س ع في ن ، ط ، هـ علي الترتيب - أثبت ان :

- ١- ل ن ط هـ متوازي أضلاعه محيطه م س + ص ع
- ٢- إذا كان م س = ص ع أثبت الشكل ل ن ط هـ معين .

(٤) أثبت أن المربع المنشأ علي أحد أقطار متوازي المستطيلات يكافئ مجموع المربعات المنشأة علي ثلاثة أحرف متلاقية في نقطة .

(٥) م أ ب ج هـ هرم ثلاثي ، المستوي أ ب ج يقطع أحرفه م أ ، م ب ، م ج في النقطة أ ، ب ، ج

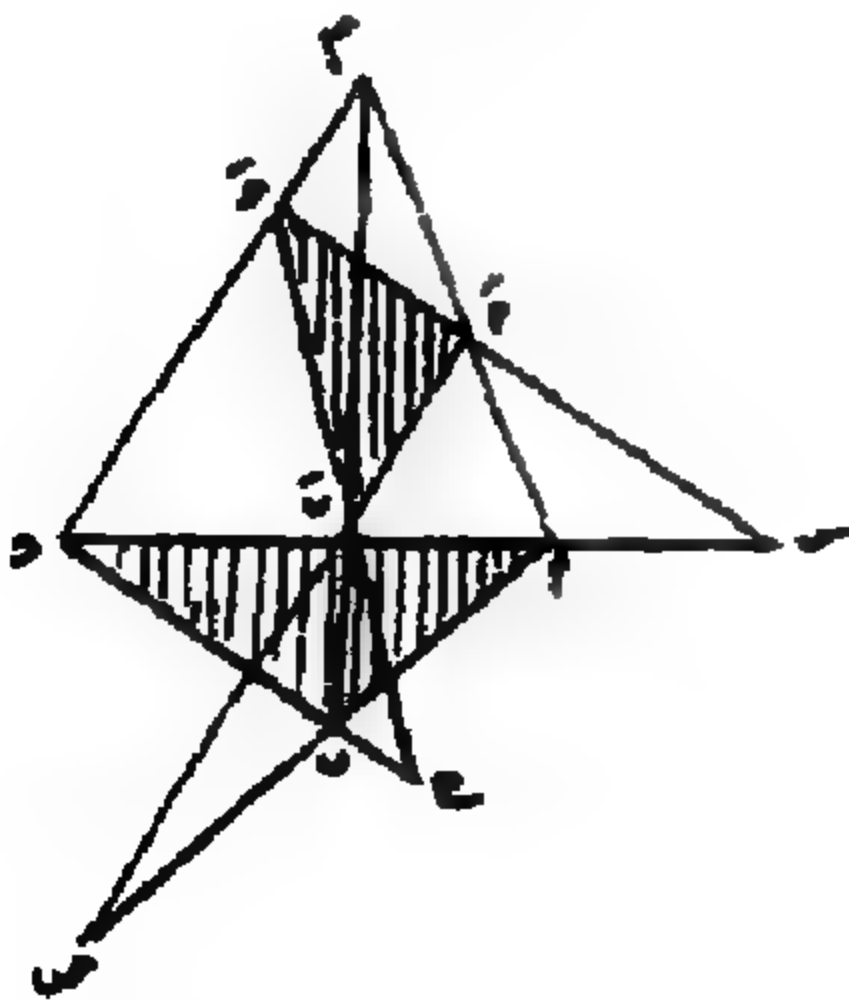
فإذا كان $\vec{أ ج} \cap \vec{أ ب} = \{س\}$ ، $\vec{أ ب} \cap \vec{أ ج} = \{ص\}$ ، $\vec{ج ب} \cap \vec{أ ب} = \{ع\}$

أثبت أن : ١- س ، ص ، ع تنتمي لمستقيم واحد هو خط

تقاطع المستويين أ ب ج ، أ ب ج .

٢- س ص هو خط تقاطع المستويين

أ ب ج ، أ ب ج .



توازي مستقيم ومستو

نظرية (١) :-

إذا وازي مستقيم مستوياً فإتبه يوازي جميع المستقيمت التي تنشأ عن تقاطع هذا المستوي مع المستويات التي تحتوي تلك المستقيم .

المعطيات : $\vec{AB} // \text{المستوي } S$

ص أي مستوي يحتوي AB ويقطع المستوي S في \vec{JH}

المطلوب : $\vec{AB} // \vec{JH}$

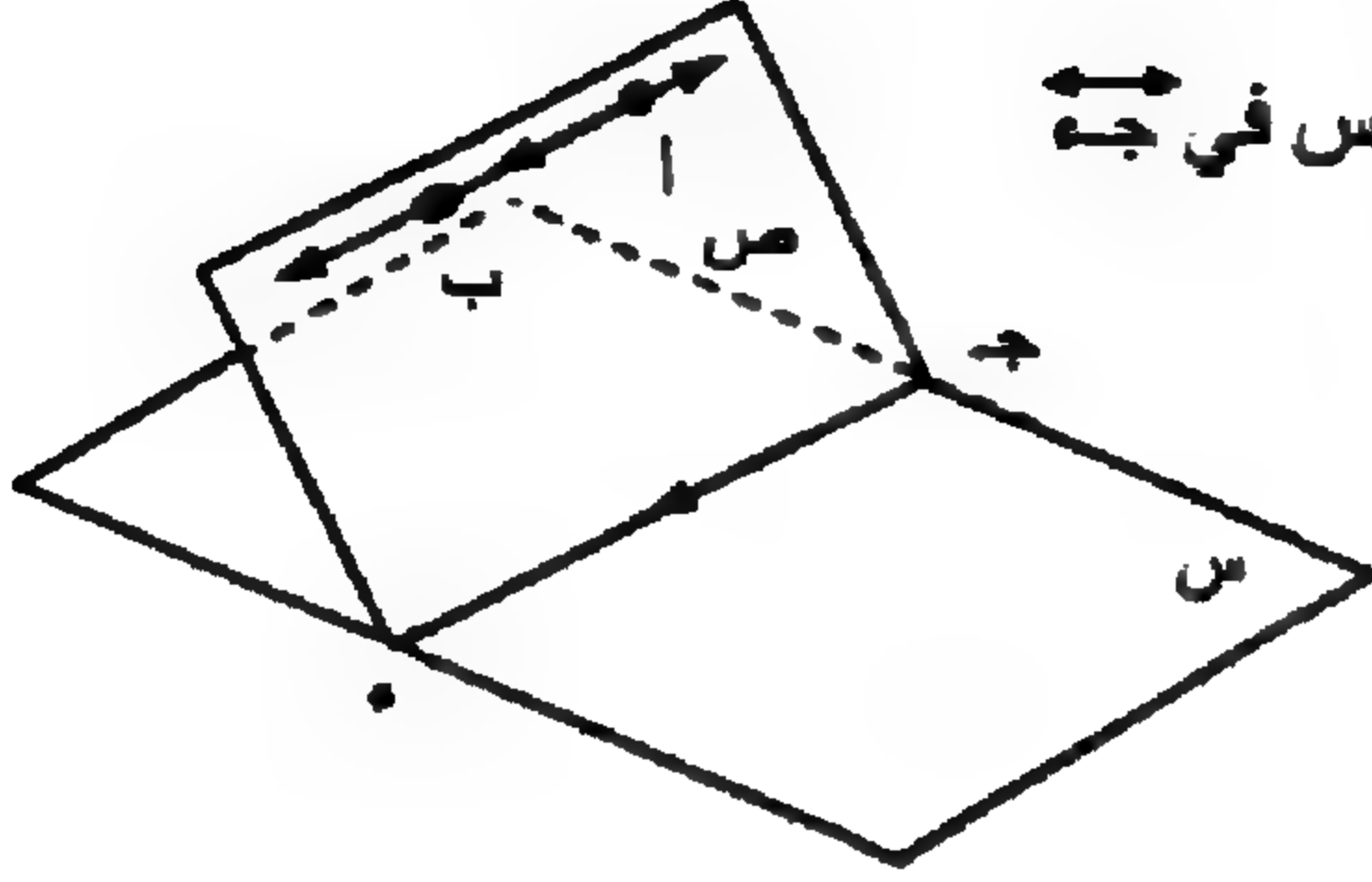
البرهان : $\vec{AB} // \text{المستوي } S$

$$\therefore \vec{AB} \cap S = \emptyset, \therefore \vec{JH} \supset S$$

$$\therefore \vec{AB} \cap \vec{JH} = \emptyset$$

$\therefore \vec{AB}, \vec{JH}$ يقعان في مستوي واحد وهو S

$$\therefore \vec{AB} // \vec{JH}$$

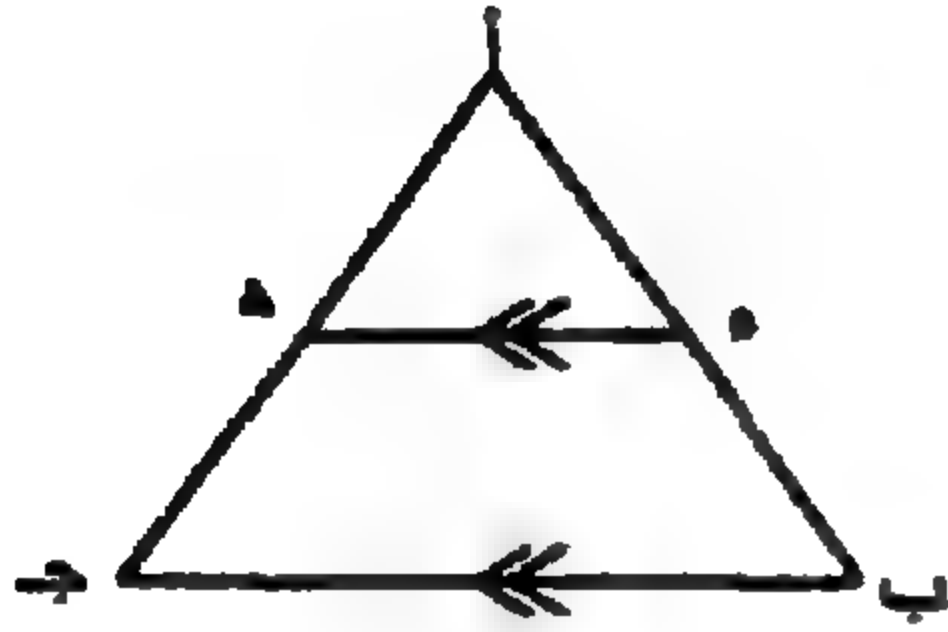


مفاهيم تفيد في حل التمارين :-

١- في ΔABC إذا كان $DE // BC$

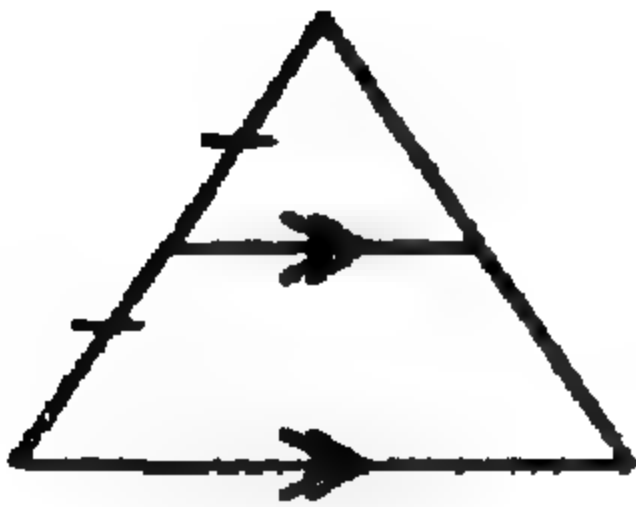
$\therefore \Delta ADE, \Delta ABC$ متشابهان

$$\therefore (١) \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$



$$(ب) \frac{\text{مساحة } \Delta ABC}{\text{مساحة } \Delta ADE} = \left(\frac{AB}{AE}\right)^2 = \left(\frac{AC}{AD}\right)^2 = \left(\frac{BC}{DE}\right)^2$$

$$(ج) \frac{\text{محيط } \Delta ABC}{\text{محيط } \Delta ADE} = \frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AD} = \frac{BC}{DE}$$



٢- القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفى ضلعين

في Δ توازي الضلع الثالث وتساوي نصفه .

٣- المستقيم المرسوم من منتصف ضلع في المثلث موازياً أحد الضلعين الآخرين ينصف الضلع الثالث .



٤- المتوسط الخارج من رأس القائمة إلى منتصف الوتر ينصف الوتر.

من النظرية السابقة لإثبات توازي مستقيمين في الفراغ يجب توافر الشرطين الآتيين معاً :

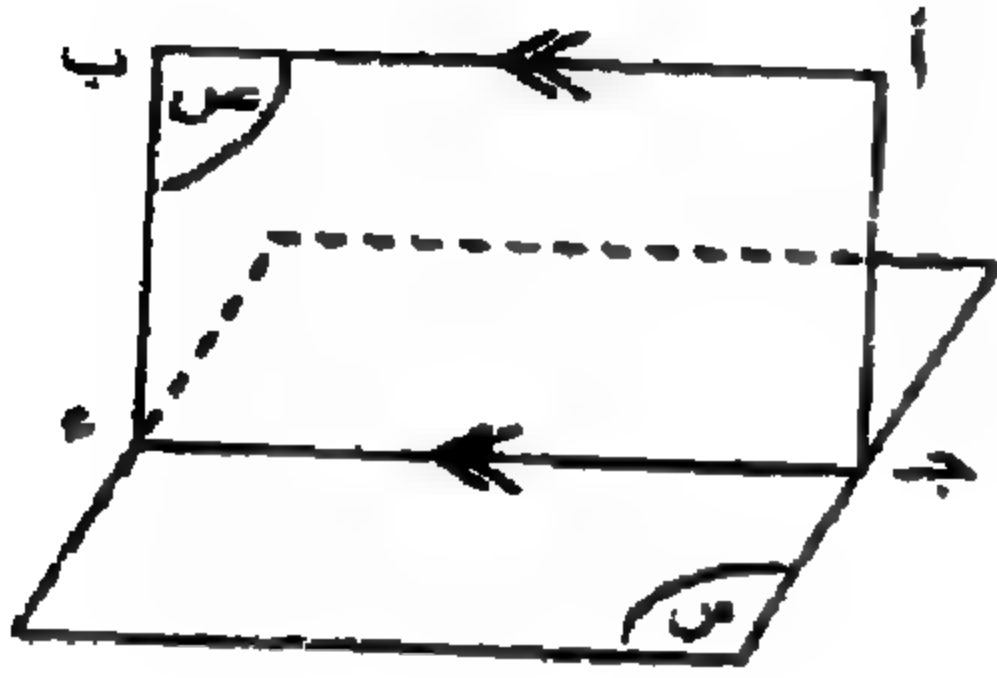
(١) المستقيمان لا يتقاطعان .

(٢) المستقيمان يقعان في مستوى واحد .

حقيقة :-

إذا وازي مستقيم خارج مستوى مستقيماً في المستوى فإنه يوازي ذلك المستوى .

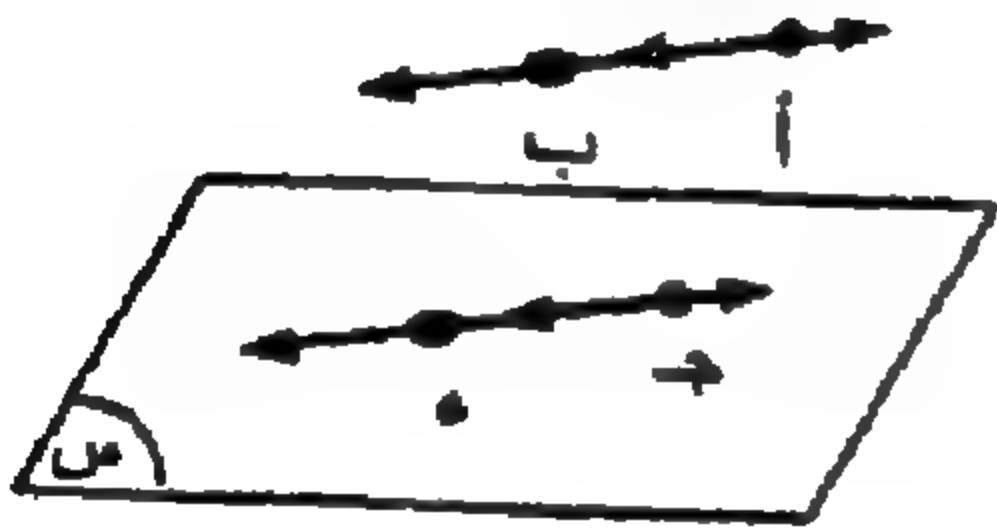
حيث AB خارج المستوى S ويوازي CD الواقع في المستوى S وعلى ذلك فإن:



AB ، CD يحددان مستوى وليكن V فإذا كان المستقيم AB لا يوازي المستقيم CD معنى ذلك أنه لا يلاقيه في نقطة تقاطع على خط تقاطع المستويين S ، V أي على المستقيم CD وهذا مستحيل لأن: $AB \parallel CD$.

نتائج

(١) إذا وازي مستقيم مستوياً فالمستقيم الذي يمر بأي نقطة من نقط المستوى موازياً للمستقيم

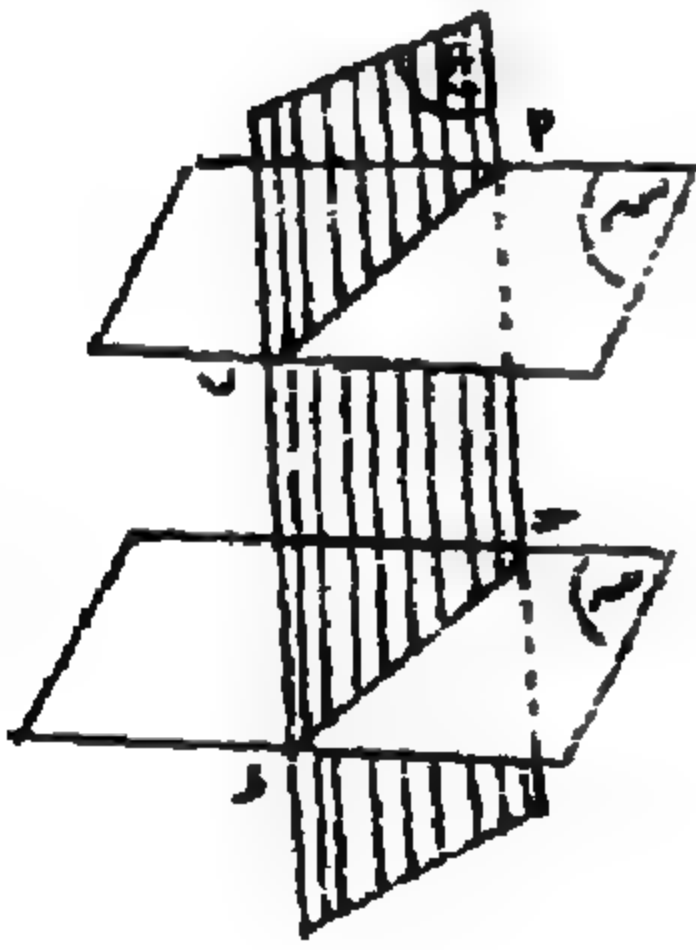


المعلوم يقع في المستوى .

$AB \parallel$ المستوى S

، $CD \parallel$ ورسمنا $CD \parallel AB$

$\therefore CD$ يقع في المستوى S



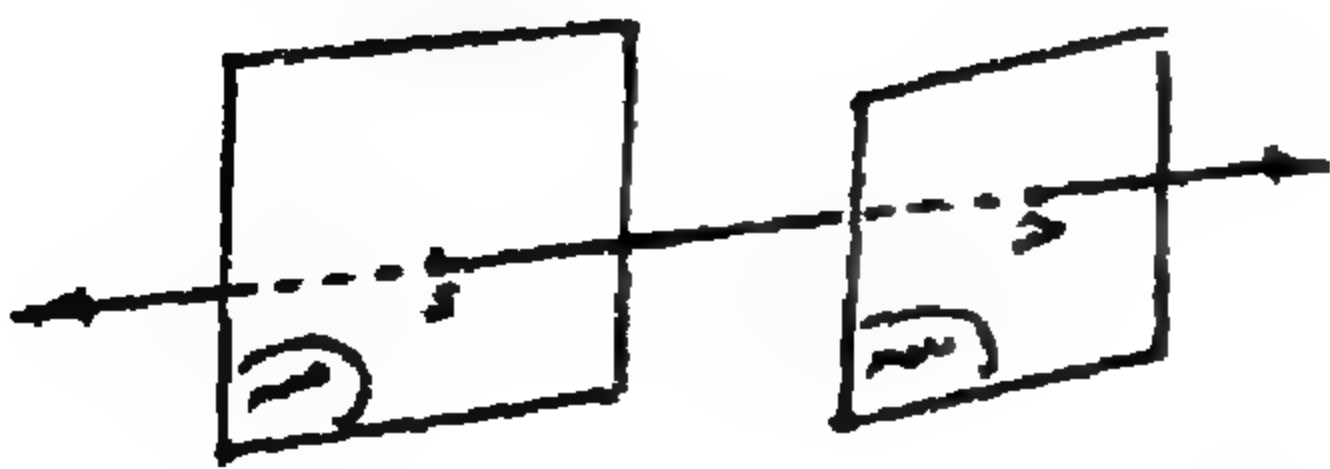
(٢) إذا قطع مستو مستويين متوازيين فخطا تقاطعه

معهما يكونان متوازيين S ، V مستويان متوازيان

قطعهما المستوي E في AB ، CD .

$\therefore AB \parallel CD$

(٣) إذا قطع مستقيم أحد مستويين متوازيين فإنه يقطع الآخر .

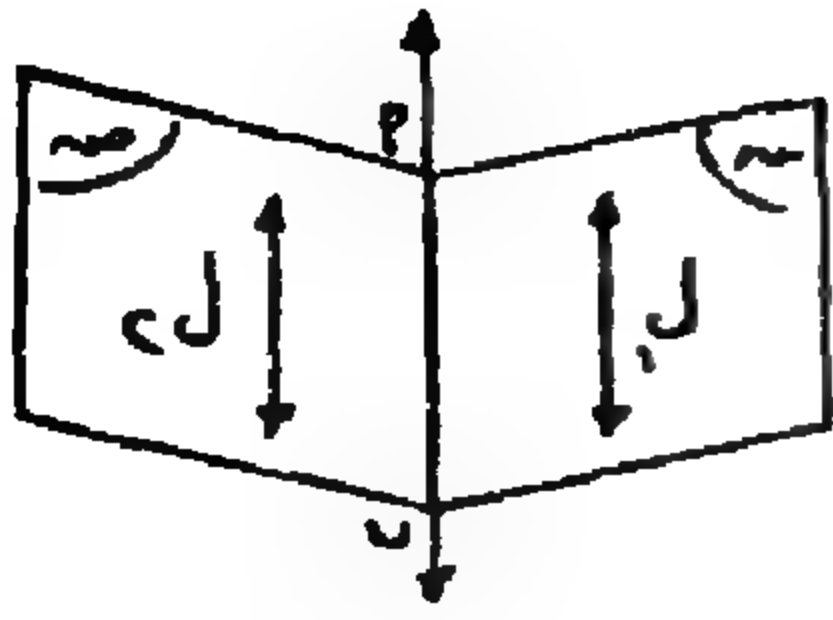


$\therefore S \parallel V$

$AB \cap S = \{CD\}$

$\therefore AB \cap V = \{E\}$

(٤) إذا توازي مستقيمين ومر بكل منهما مستوي وتقاطع المستويان كان خط تقاطعهما موازياً لهذين



المستقيمين : إذا كان $ل // ل$ ، $ل \supset س$ من

$ل \supset س$ وكان المستويان $س$ ، $س$

متقاطعان في $أ ب$ فإن :

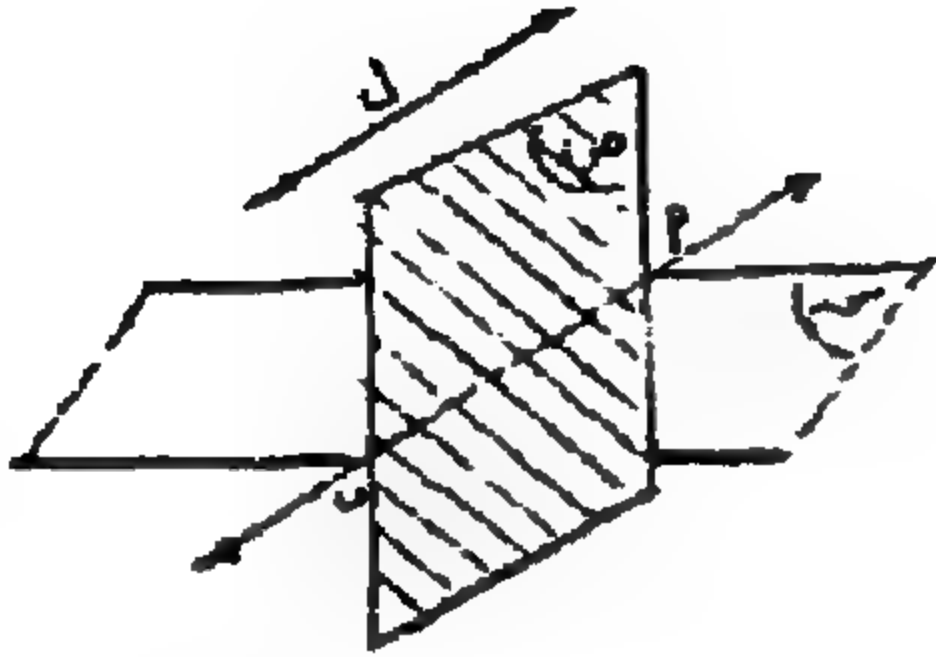
$أ ب // ل$ كلا من $ل$ ، $ل$

(٥) إذا وازي مستقيم كلا من مستويين

متقاطعين فإنه يوازي خط تقاطعهما

إذا كان المستقيم $ل$ يوازي كلا من المستويين

$س$ ، $س$ المتقاطعين في $أ ب$ فإن $ل // أ ب$



مثال: جـ أ ب ، ع أ ب مثلثان في مستويين مختلفين فإذا كانت $س$ ، $س$ ، $م$ ، $ن$ منتصفات جـ أ ،

جـ ب ، ع أ ، ع ب على الترتيب فاثبت أن :

(١) $س س // المستوي ع أ ب$ (٢) الشكل $س س ن م$ متوازي أضلاع.

الحل

في $\Delta أ ب جـ$

$\therefore س$ منتصف جـ أ ، $س$ منتصف جـ ب

$\therefore س س = \frac{1}{2} أ ب$ ، $س س // أ ب$ ---- (١)

، $\therefore أ ب \supset المستوي ع أ ب$

$\therefore س س // المستوي ع أ ب$ أولاً

في $\Delta ع أ ب$

$\therefore م$ منتصف ع أ ، $ن$ منتصف ع ب

$\therefore م ن = \frac{1}{2} أ ب$ ، $م ن // أ ب$ ---- (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن $س س // م ن$ ، $س س = م ن = \frac{1}{2} أ ب$

في الشكل $س س ن م$

$\therefore س س = م ن$ ، $س س // م ن$

\therefore الشكل $س س ن م$ متوازي أضلاع

ثانياً

مثال: س ، ص مستويان متوازيان ، أ ع يقطع المستويين في ب ، جـ على الترتيب بحيث أ ب :

ب جـ : جـ ع = ٣ : ٢ : ١ ، أ و يقطع المستويين س ، ص في النقطتين هـ ، و

، ع ن يقطعهم في م ، ن أثبت أن: $\frac{م جـ}{ن ب} \times \frac{ب هـ}{جـ ع} = \frac{١}{٥}$

البرهان

∴ المستوي أ ب ن يقطع المستويين المتوازيين س ، ص

في م جـ ، ن ب ∴ $\overline{م جـ} \parallel \overline{ن ب}$

$$\therefore \frac{م جـ}{ن ب} = \frac{جـ ع}{ب ع} = \frac{١}{٣} \text{ --- (١)}$$

وبالمثل المستوي أ جـ و يقطع المستويين المتوازيين س ، ص

في ب هـ ، جـ و ∴ $\overline{ب هـ} \parallel \overline{جـ و}$

$$\therefore \frac{ب هـ}{جـ و} = \frac{أ ب}{أ جـ} = \frac{٢}{٥} \text{ --- (٢)}$$

من (١) ، (٢)

$$\therefore \frac{م جـ}{ن ب} \times \frac{ب هـ}{جـ و} = \frac{١}{٣} \times \frac{٢}{٥} = \frac{١}{٥}$$

مثال: أ ، ب ، جـ ، ع أربع نقط ليست في مستو واحد (هرم ثلاثي) نصفت أ ب في س ، ب جـ في

ص ، جـ ع في ع ، أ في ل برهن أن :-

(١) س ص // المستوي أ ع جـ (٢) النقط س ، ص ، ع ، ل في مستو واحد .

الحل

Δ أ ب جـ ∴ س ص واصل بين منتصفي ضلعين

∴ س ص // أ جـ ويساوي نصفه --- (١)

∴ أ جـ ⊂ المستوي أ ع جـ

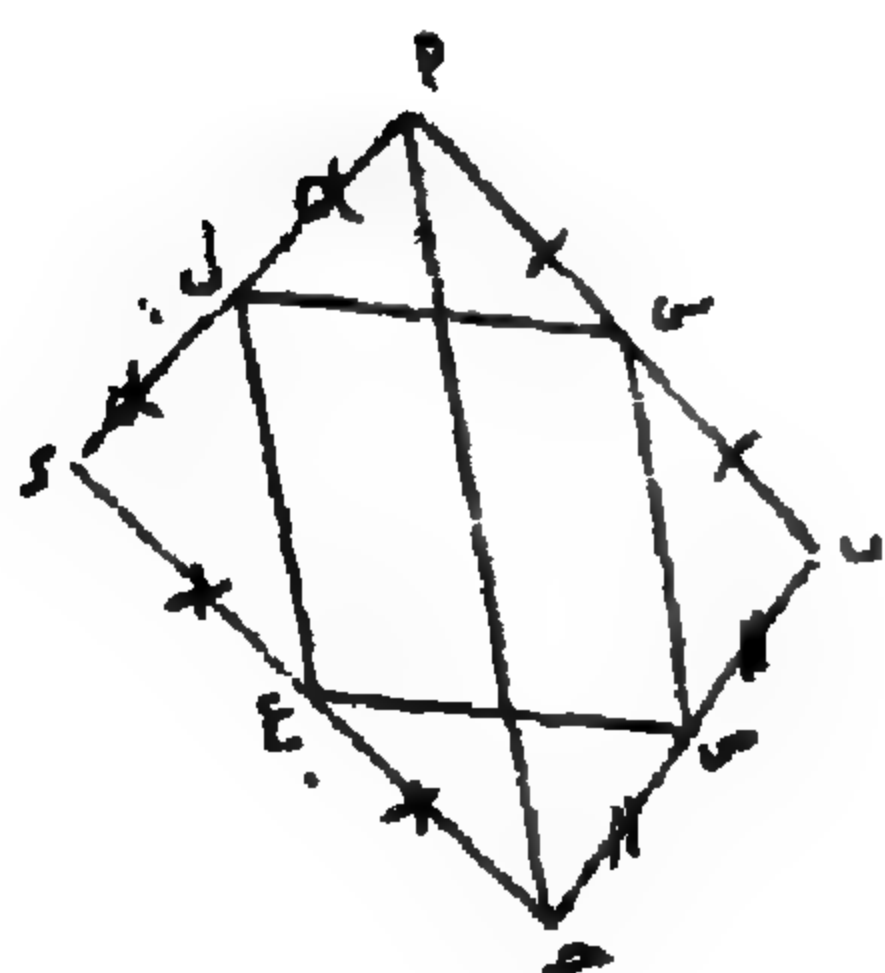
∴ س ص // المستوي أ ع جـ

Δ أ ع جـ ∴ ل ع واصل بين منتصفي ضلعين

∴ ل ع // أ جـ ويساوي نصفه --- (٢)

من (١) ، (٢) ∴ الشكل س ص ع ل □

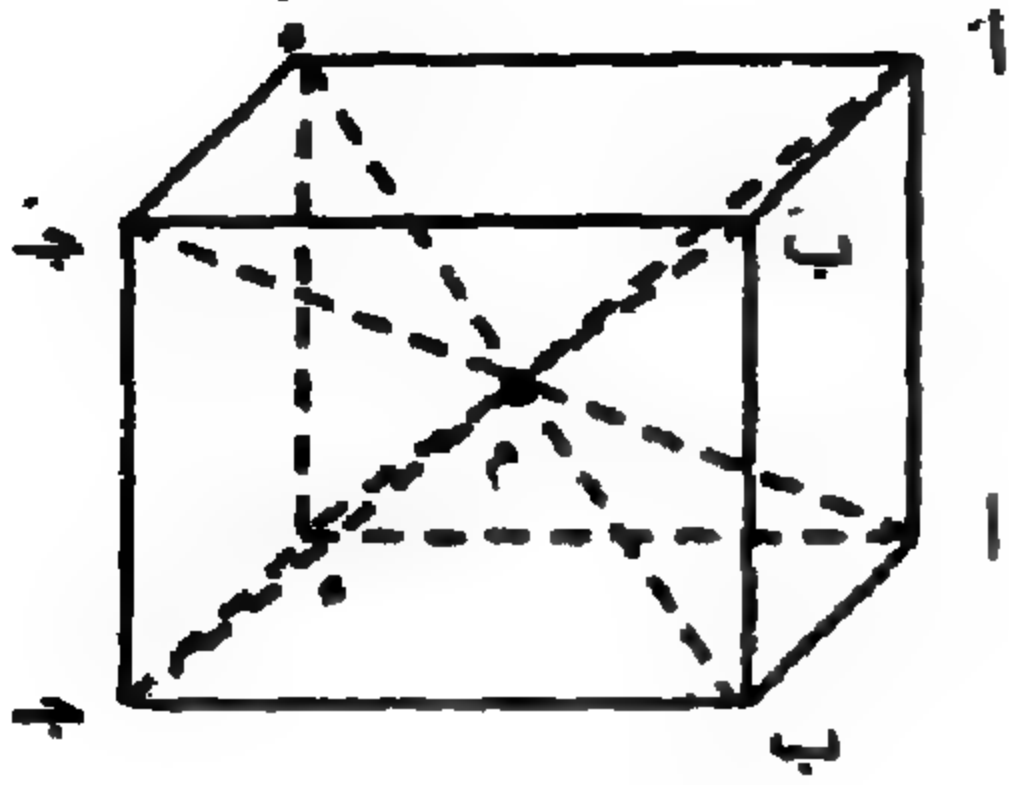
∴ النقط س ، ص ، ع ، ل تقع في مستو واحد وهو متوازي الأضلاع .



مثال: اثبت أن:

أقطار متوازي السطوح تتقاطع في نقطة واحدة هي منتصف كل منها.

- البرهان -



$$\therefore \overline{AA'} // \overline{BB'}, \overline{AA'} = \overline{BB'}$$

\therefore الشكل $ABB'A'$ متوازي أضلاع

\therefore قطرا AB' ، BA' يتقاطعان في نقطة م

منتصف كلا منهما وكذلك $AB // A'B'$ ، $AB = A'B'$

\therefore الشكل $ABA'B'$ متوازي أضلاع

\therefore قطراه AB' ، BA' ينصف كل منهما الآخر

\therefore م منتصف BA' وبالمثل يمكن إثبات أن م منتصف القطر BA'

\therefore الأقطار الأربعة تتقاطع في نقطة واحدة هي منتصف كل منها .

مثال: س ، ص مستويان متوازيان ، م نقطة لا تنتمي لأي منهما رسمت المستقيمت \overleftrightarrow{AM} ، \overleftrightarrow{BM}

م ج د ، م ه و الغير مستوية معا لتقطع المستوي س في النقط أ ، ج ، ه وتقطع

المستوي ص في النقط ب ، د ، و أثبت أن $\triangle AJD$ يشابه $\triangle BDE$.

- البرهان -

المستوي م ب و يقطع المستويين المتوازيين س، ص

في ا ه ، ب و $\therefore AH // BW$

$$\text{في } \triangle MBW \text{ يكون } \frac{AM}{MB} = \frac{AH}{BW} = \frac{AJ}{JD} \quad (1)$$

كذلك المستوي م ب ه يقطع المستويين المتوازيين

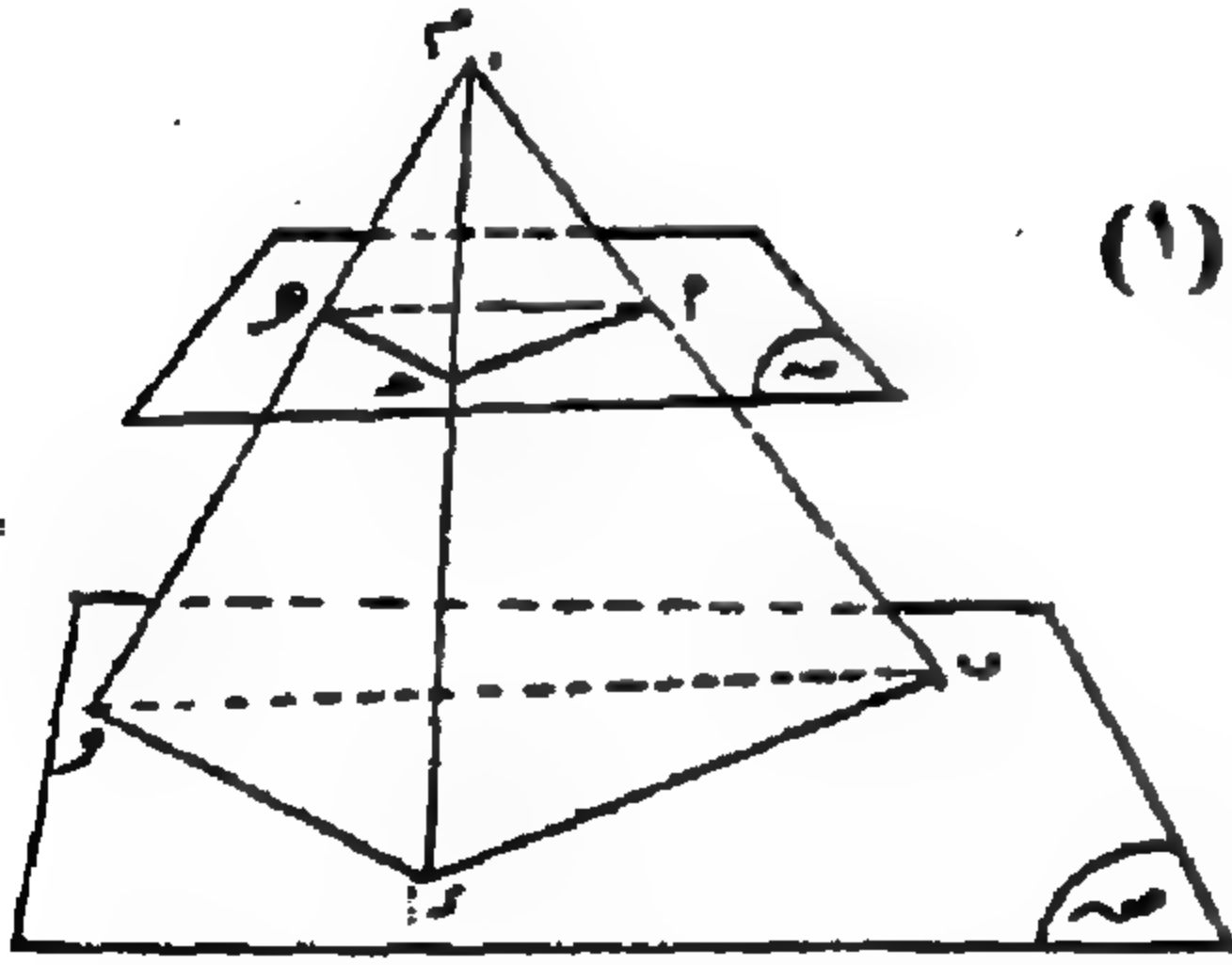
س ، ص في ا ج ، ب ه

$\therefore AJ // BE$

في $\triangle MBH$

$$\text{يكون } \frac{AM}{MB} = \frac{AJ}{BE} = \frac{AJ}{JD} \quad (2)$$

بالمثل ج د ه // و



∴ في $\Delta مءو$

$$\text{يكون } \frac{مء}{بء} = \frac{مء}{وء} = \frac{مء}{جء} \text{ --- (٣)}$$

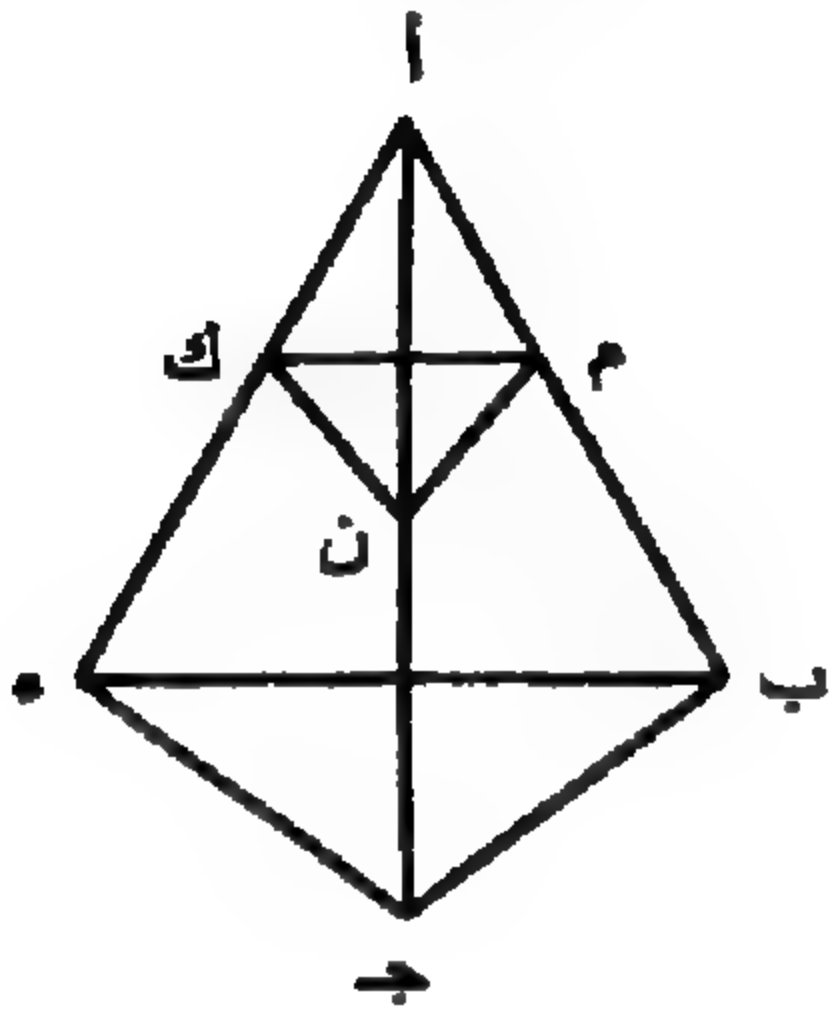
من (١)، (٢)، (٣) ينتج أن

$$\frac{ام}{بء} = \frac{مء}{بء} = \frac{مء}{وء}$$

أي أن الأضلاع المتناظرة في $\Delta \Delta أ ج هـ، ب ء و$ ومتناسبه

∴ $\Delta أ ج هـ$ يشابه $\Delta ب ء و$

مثال: في الشكل المقابل - المستوي م ن ك // المستوي ب ج ء برهن أن :



(١) $\Delta م ن ك$ يشابه $\Delta ب ج ء$

(٢) وإذا كانت أ م : م ب = ١ : ٢ وكانت

مساحة $\Delta ب ج ء = ٢٧٠ \text{ سم}^٢$

أوجد مساحة $\Delta م ن ك$

الحل

∴ المستوي م ن ك // المستوي ب ج ء والمستوي أ ب ج قاطع لهما

∴ م ن // ب ج

∴ في $\Delta أ ب ج$: $\frac{ام}{بء} = \frac{مء}{بء} = \frac{ان}{جء}$ وبالمثل يمكن اثبات أن :

$$\text{في } \Delta أ ج ء : \frac{ان}{جء} = \frac{نك}{جء} = \frac{اك}{أء}$$

، في $\Delta أ ب ء$: $\frac{ام}{بء} = \frac{مك}{بء} = \frac{اك}{أء}$ ومن التناسبات الثلاثة نستنتج أن :

$$\frac{مء}{بء} = \frac{نك}{جء} = \frac{مك}{بء} \text{ ∴ } \Delta \Delta \text{ متشابهين}$$

، ∴ $\Delta \Delta$ متشابهين

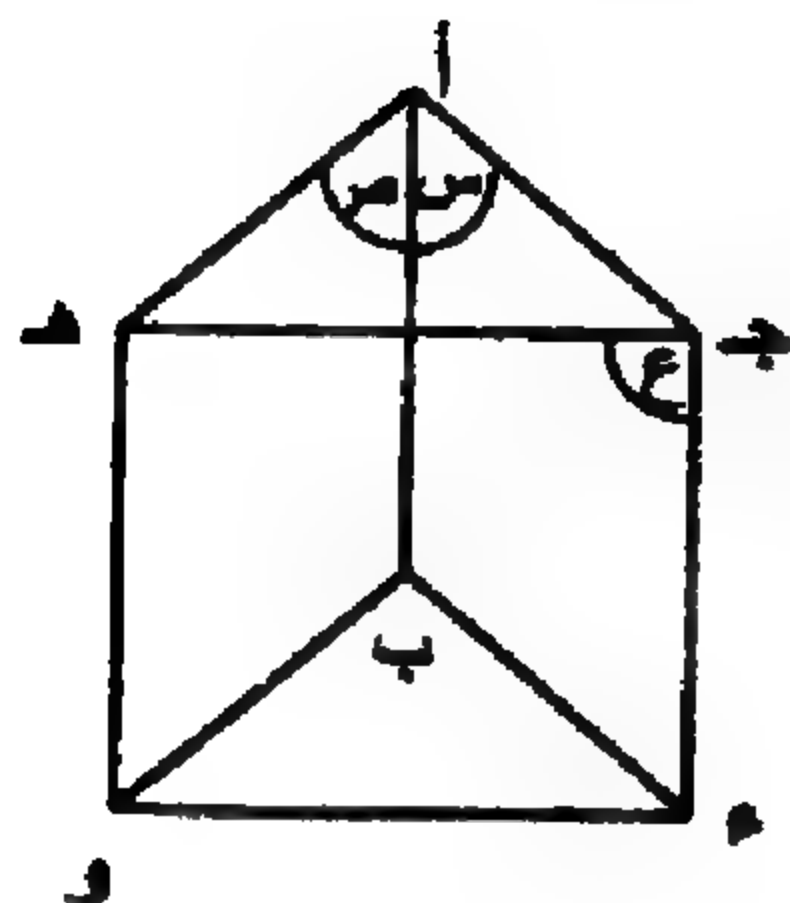
∴ النسبة بين مساحتيهما = مربع النسبة بين أي ضلعين متناظرين فيها.

$$\text{∴ } \frac{\text{مساحة } \Delta م ن ك}{\text{مساحة } \Delta ب ج ء} = \left(\frac{١}{٣}\right)^٢ \text{ ∴ } \frac{١}{٩} = \frac{\text{مساحة } \Delta م ن ك}{٢٧٠}$$

$$\text{∴ مساحة } \Delta م ن ك = \frac{١ \times ٢٧٠}{٩} = ٣٠ \text{ سم}^٢$$

مثال: مستويان س ، ص متقاطعان في \vec{AB} ، المستوي ع يقطعهما في المستقيمين $\vec{J\Gamma}$ ، $\vec{H\Theta}$ ،
 علي الترتيب ، فإذا كان $\vec{J\Gamma} // \vec{H\Theta}$ فاثبت أن : $\vec{AB} // \text{كلا من } \vec{J\Gamma} ، \vec{H\Theta}$

الحل



$$\therefore \vec{J\Gamma} // \vec{H\Theta} ، \therefore \vec{H\Theta} \subset \text{ص}$$

$$\therefore \vec{J\Gamma} // \text{المستوي ص}$$

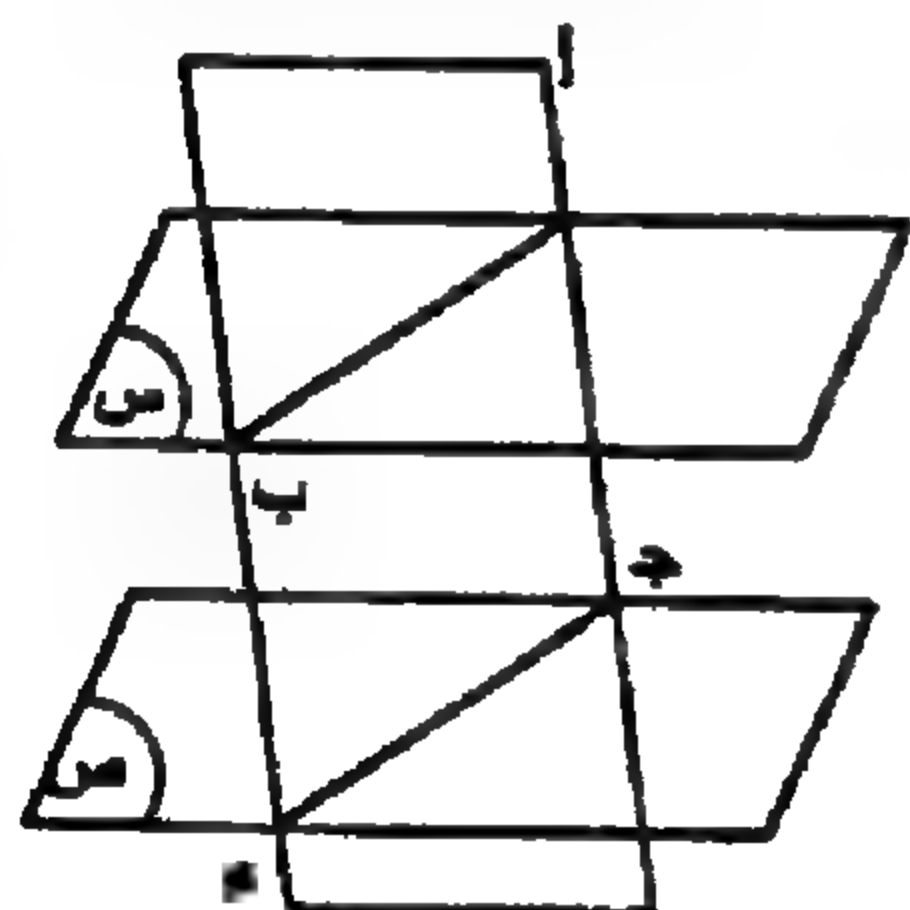
، \therefore المستوي س يمر بالمستقيم $\vec{J\Gamma}$ ويقطع المستوي ص في \vec{AB}

$$\therefore \vec{J\Gamma} // \vec{AB} \text{ ولكن } \vec{J\Gamma} // \vec{H\Theta}$$

$$\therefore \vec{AB} // \vec{J\Gamma} // \vec{H\Theta}$$

تمرين (٣)

١- في الشكل إذا كان س ، ص مستويان قطعهما المستوي ع في \vec{AB} ، $\vec{J\Gamma}$ فأكمل الفراغات



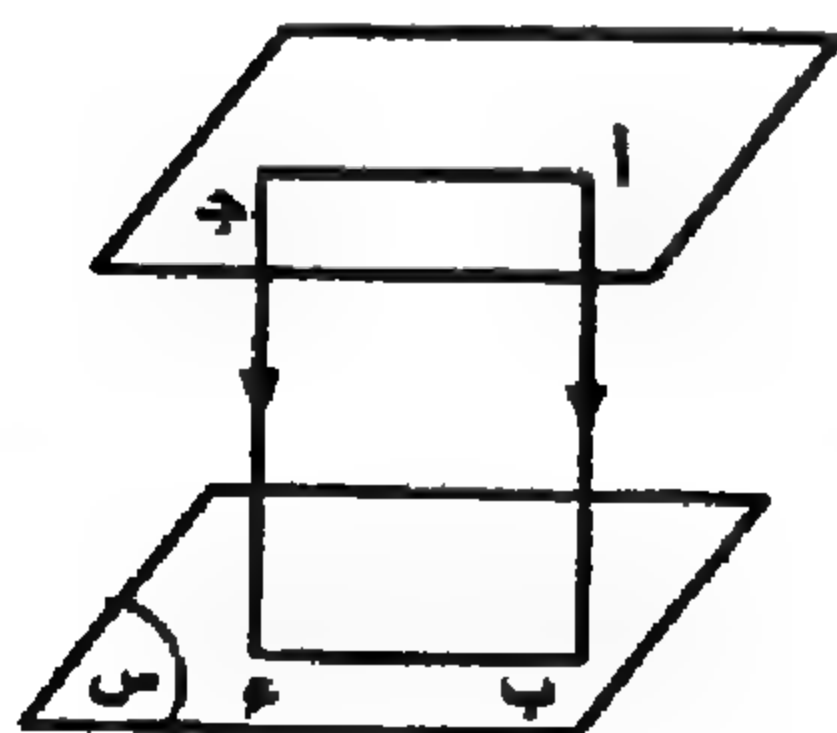
التالية بما يناسبها:

(أ) $\vec{AB} \text{ — } \vec{J\Gamma}$

(ب) إذا كان $\vec{AB} = \vec{J\Gamma}$ كان الشكل $\vec{AB} \text{ — } \vec{J\Gamma}$

(ج) إذا كان $\vec{AB} \neq \vec{J\Gamma}$ فإن الشكل $\vec{AB} \text{ — } \vec{J\Gamma}$

٢- في الشكل المقابل :



إذا كان $\vec{AB} // \vec{J\Gamma}$ وكان المستويان س ، ص

يقطعان المستقيمين \vec{AB} ، $\vec{J\Gamma}$ في النقطة أ ، ج ،

ب ، ع علي الترتيب .

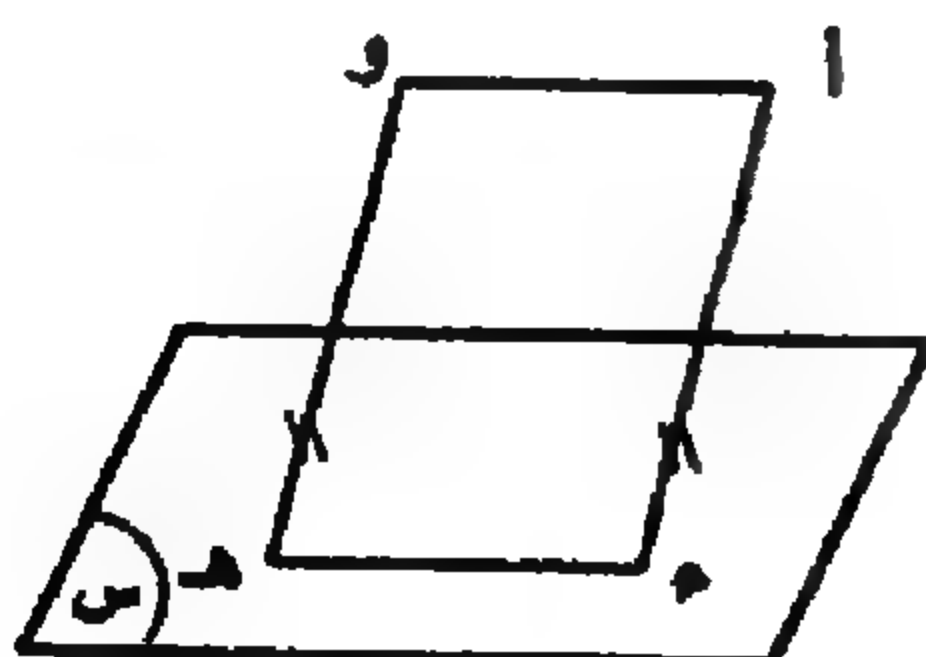
- فاثبت أن : $\vec{AB} = \vec{J\Gamma}$

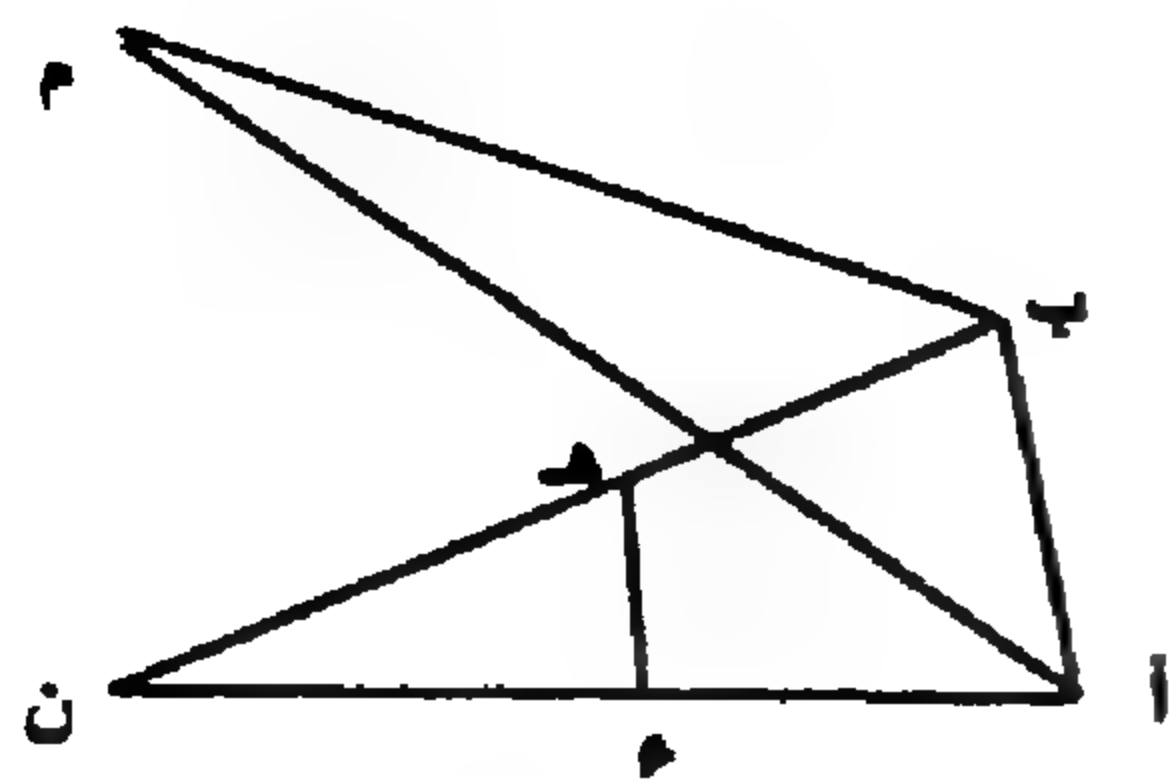
٣- ع ، ه نقطتين في مستوي رسم من النقطتين

ع ، ه المستقيمين المتوازيين ع م ، ه و

بحيث كان ع م = ه و

- اثبت أن م و // المستوي س .

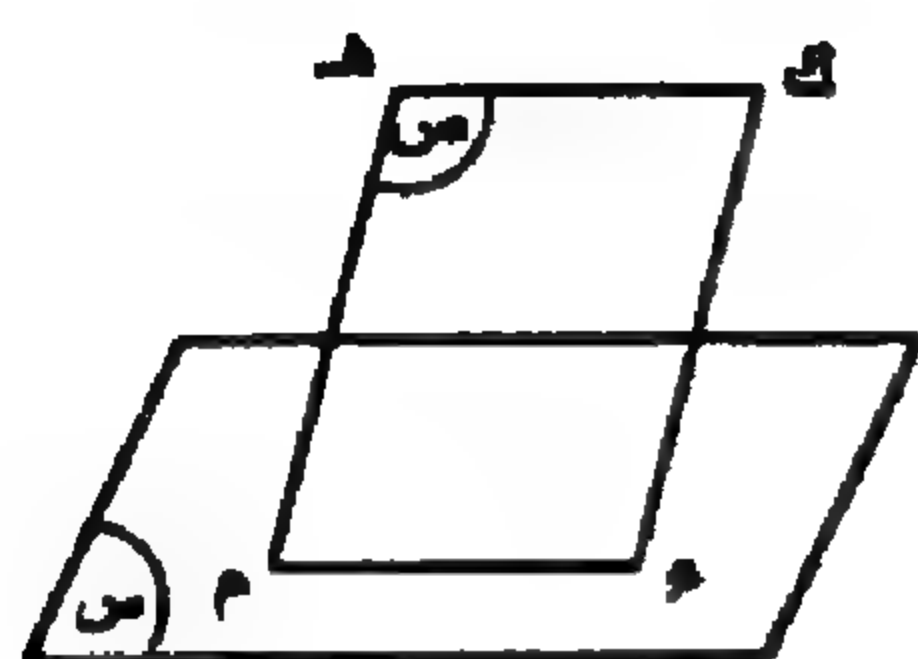




٤- ن ا ب ، م ا ب مثلثان في مستويين مختلفين

نصف المستقيمان ن ا ، ن ب في ه ه

- أثبت أن ه ه يوازي المستوي م ا ب



٥- س مستوي معلوم ، ك ه مستقيم معلوم خارج

المستوي س بحيث كان ك ه يوازي المستوي س

، رسم المستقيمان المتوازيان ك ه ، ه م فقطعا

المستوي س في ه ه م

- أثبت أن الشكل ك ه م ه متوازي أضلاع .

٦- م ا ب ج ه م ثلاثي أخذت النقط ه ه ، و علي الأحرف م ا ، م ب ، م ج علي الترتيب بحيث

كان $\frac{م ا}{م ب} = \frac{م ب}{م ج} = \frac{م ج}{م ه}$ - أثبت أن : المستوي ه ه و // المستوي ا ب ج .

٧- المستقيم ا ب // المستوي س رسم الشعاعان ه ا ، ه ب فقطعا المستوي س في ج ه ، ه علي

الترتيب فإذا كان ا ب = $\frac{٢}{٣}$ ج ه ومساحة سطح المثلث ه ج ه = ٣٦ سم^٢ - أنكر اسم

الشكل ا ج ه ب واوجد مساحة سطحه.

٨- ا ب ، ج ه مستقيمان متخالفان ، م منتصف ب ه - رسم المستوي ل م ن موازياً لكل من ا ب

، ج ه وقاطعا ب ج في ل ، آ ه في ن - أثبت أن :

$$(١) م ن // ا ب \quad (٢) ل م // ج ه \quad (٣) ل ن > \frac{١}{٢} (ا ب + ج ه)$$

٩- ا ب ، ج ه ثلاث نقط تنتمي إلي مستقيم واحد - ل يوازي مستوي مثل س ، م ل ، م ل س

، المستقيمان م ا ، م ب ، م ج تقطع المستوي س في النقط ه ه ، ه ه ، و علي الترتيب .

$$\text{أثبت أن } \frac{ا ب}{ب ج} = \frac{ب ه}{ه و}$$

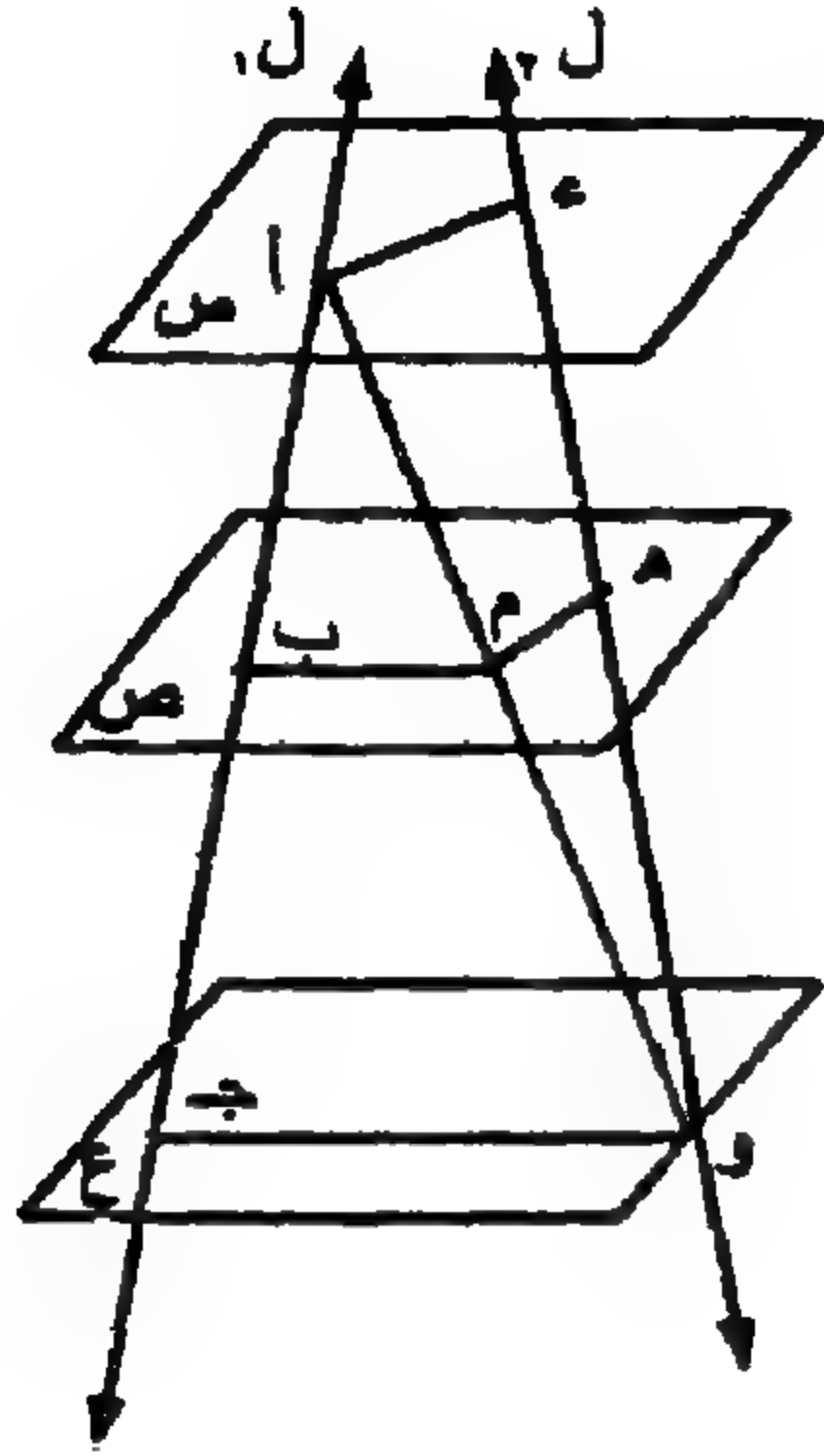
١٠- ا ب ج ه م ثلاثي ، س و ا ب ، ص و آ ج ، ع و آ ه فإذا كان س ص // ب ج وكان س ع

يقطع ب ه في ه ، ص ع يقطع ج ه في ج - أثبت أن ه و // س ص

تمرين مشهور

إذا قطعت عدة مستويات متوازية بمستقيمين فإن أطوال القطع المستقيمة المحصورة بينهما تكون متناسبة.

البرهان



نرسم \overline{AE} فنقطع المستوي α في M ونرسم \overline{AF} في N ونرسم \overline{AB} في P ونرسم \overline{CD} في Q ونرسم \overline{EF} في R .

\therefore المستوي α و β قطع المستويين المتوازيين α و β في E و F

$$\overline{AE} \parallel \overline{BF} \quad \therefore \overline{AE} \parallel \overline{BF} \quad \therefore \overline{AE} \parallel \overline{BF}$$

$$\therefore \frac{AM}{ME} = \frac{AN}{NF} \quad (1)$$

وبالمثل المستوي β و γ قطع المستويين المتوازيين

$$\overline{AE} \parallel \overline{BF} \quad \therefore \overline{AE} \parallel \overline{BF} \quad \therefore \overline{AE} \parallel \overline{BF}$$

$$\therefore \frac{AN}{NF} = \frac{AP}{PF} \quad (2)$$

من (1)، (2) ينتج أن $\frac{AM}{ME} = \frac{AN}{NF}$ وهو المطلوب

ملاحظات :

١- إذا كان $AB = BC$ فإن $AE = EC$

٢- يعرف هذا التمرين باسم نظرية لما ليس في الفراغ.

نظرية :

إذا تقاطع مستقيمان في مستوي وكانا متوازيين لمستقيمين متقاطعين في مستوي آخر كان

مستوي المستقيمين الأولين موازيا لمستوي المستقيمين الآخرين .

تستخدم هذه النظرية في إثبات توازي مستويين حيث :



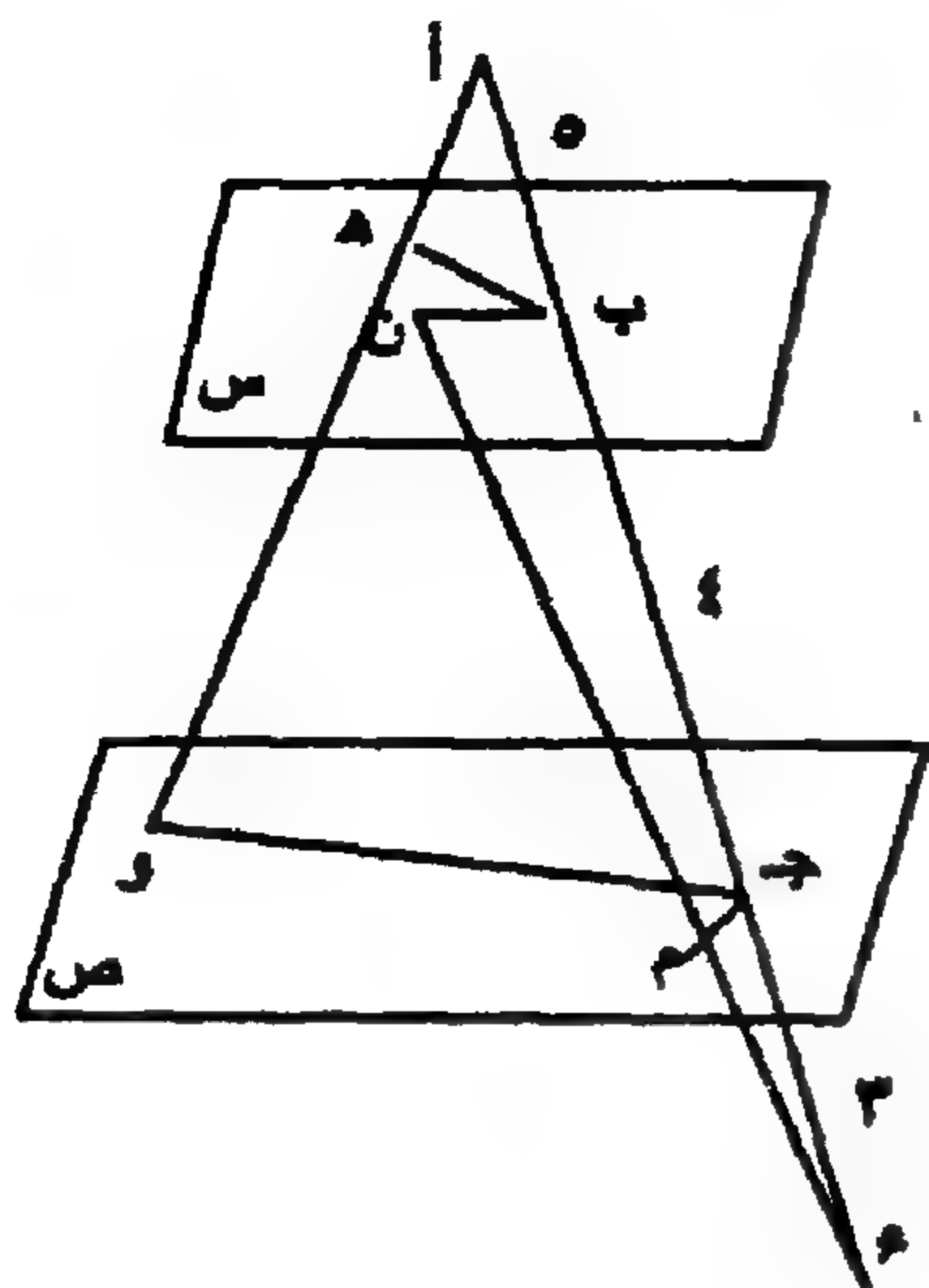
$$l_1 \parallel l_2 \text{ و } l_3 \parallel l_4$$

$$\{M\} = l_1 \cap l_2$$

$$\{N\} = l_3 \cap l_4$$

\therefore المستوي $\alpha \parallel$ المستوي β

مثال : في الشكل س ، ص مستويان متوازيان ، أء قاطع لهما بحيث أ ب : ب ج : ج ء



= ٥ : ٤ : ٣ فإذا كان ء ن قاطع لهما

- برهن أن : $\frac{ب ه}{ج و} \times \frac{ج م}{ب ن} = \frac{٥}{٢١}$

الحل

∵ المستوي س // المستوي ص ، أ ج ، أ و قاطع لهما

$$\frac{ب ه}{ج و} = \frac{أ ب}{أ ج} = \frac{٥}{٩} \quad (١)$$

∵ المستوي ص // المستوي س ، ء أ ، ء ن قاطع لهما

$$\frac{ج م}{ب ن} = \frac{ج ء}{ب ن} = \frac{٢}{٧} \quad (٢)$$

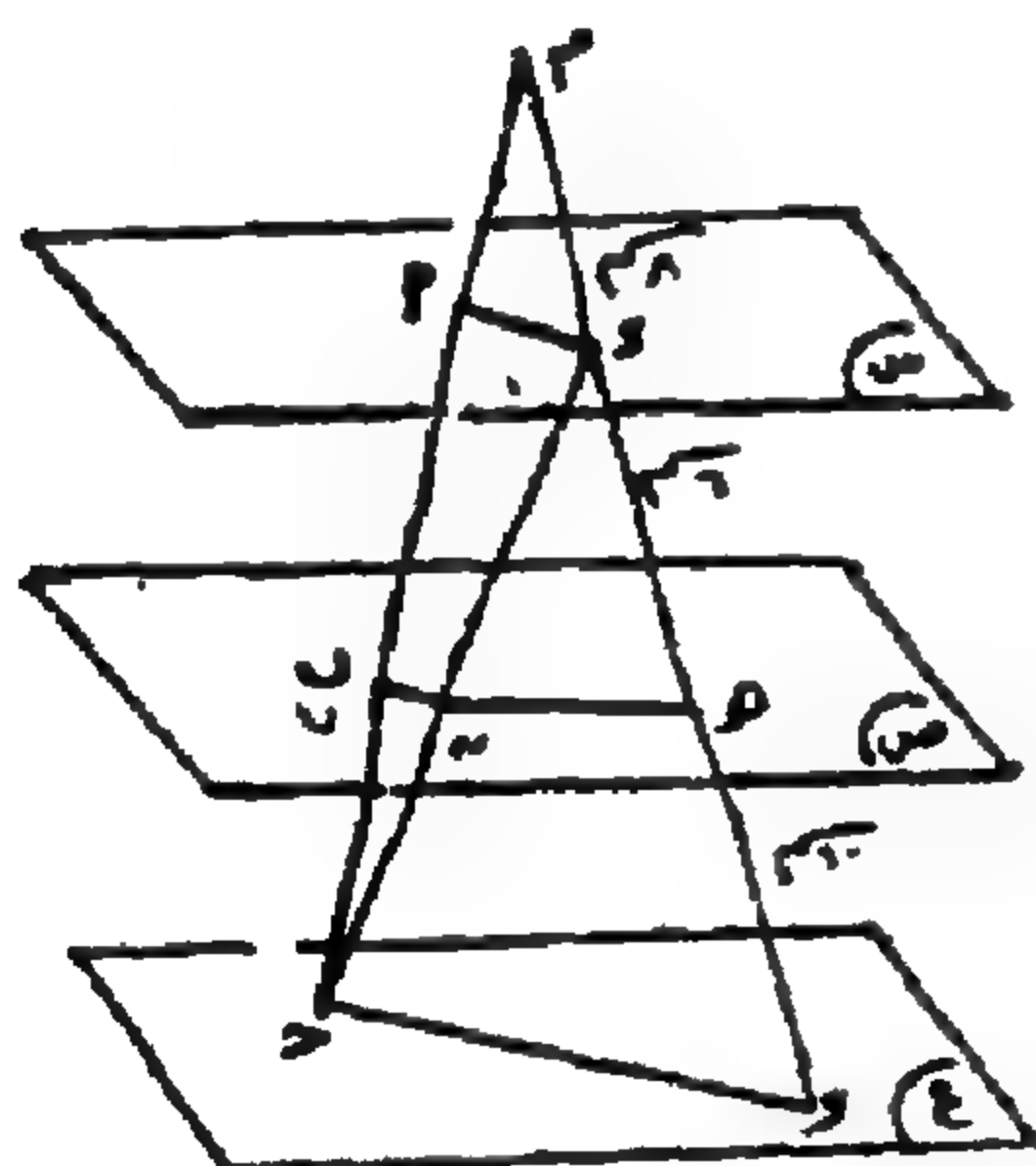
من (١) ، (٢)

$$\therefore \frac{ب ه}{ج و} \times \frac{ج م}{ب ن} = \frac{٢}{٧} \times \frac{٥}{٩} = \frac{١٠}{٦٣}$$

مثال : في الشكل المقابل

س // ص // ع ، ء ه = ٦ سم ، ه و = ١٠ سم ، ج و = ٢٤ سم ، م ء = ٨ سم- برهن أن :

(١) ب ، ن ، ه على استقامة واحدة . (٢) قيمة $\frac{ب ن}{ج ء}$ (٣) احسب طول ب ه



الحل

∵ س // ص ، المستوي م ه ب قاطع ∴ $\overline{ب ن} \parallel \overline{أ ء}$

، ∵ ص // ع والمستوي ء و ج قاطع ∴ $\overline{ه ن} \parallel \overline{أ و}$

، ∵ ع // س والمستوي م و ج قاطع ∴ $\overline{أ ء} \parallel \overline{أ و}$

∴ ه ن ، ن ب // و ج وهما مشتركان في نقطة واحدة

∴ النقط ه ، ن ، ب على استقامة واحدة

$$\Delta \text{ ء و ج : ه ن // و ج } \therefore \frac{ه ن}{و ج} = \frac{ه ء}{ه و} = \frac{٦}{١٠}$$

$$\therefore \frac{ه ن}{و ج} = \frac{ه ء}{ه و} \quad \therefore \frac{ه ن}{٢٤} = \frac{٦}{١٠}$$

$$\therefore ه ن = ٩ \text{ سم}$$

في Δ م و ج :

∴ $\overline{أ ء} \parallel \overline{أ و}$

$$\therefore \frac{أ ء}{٢٤} = \frac{٨}{٢٤}$$

$$\therefore \frac{أ ء}{و ج} = \frac{م ء}{م و}$$

$$\therefore أ ء = ٨ \text{ سم}$$

في Δ جـ ءـ أ :

$\therefore \text{ن ب} // \text{ء أ}$

$$\therefore \frac{\text{ن ب}}{8} = \frac{10}{16}$$

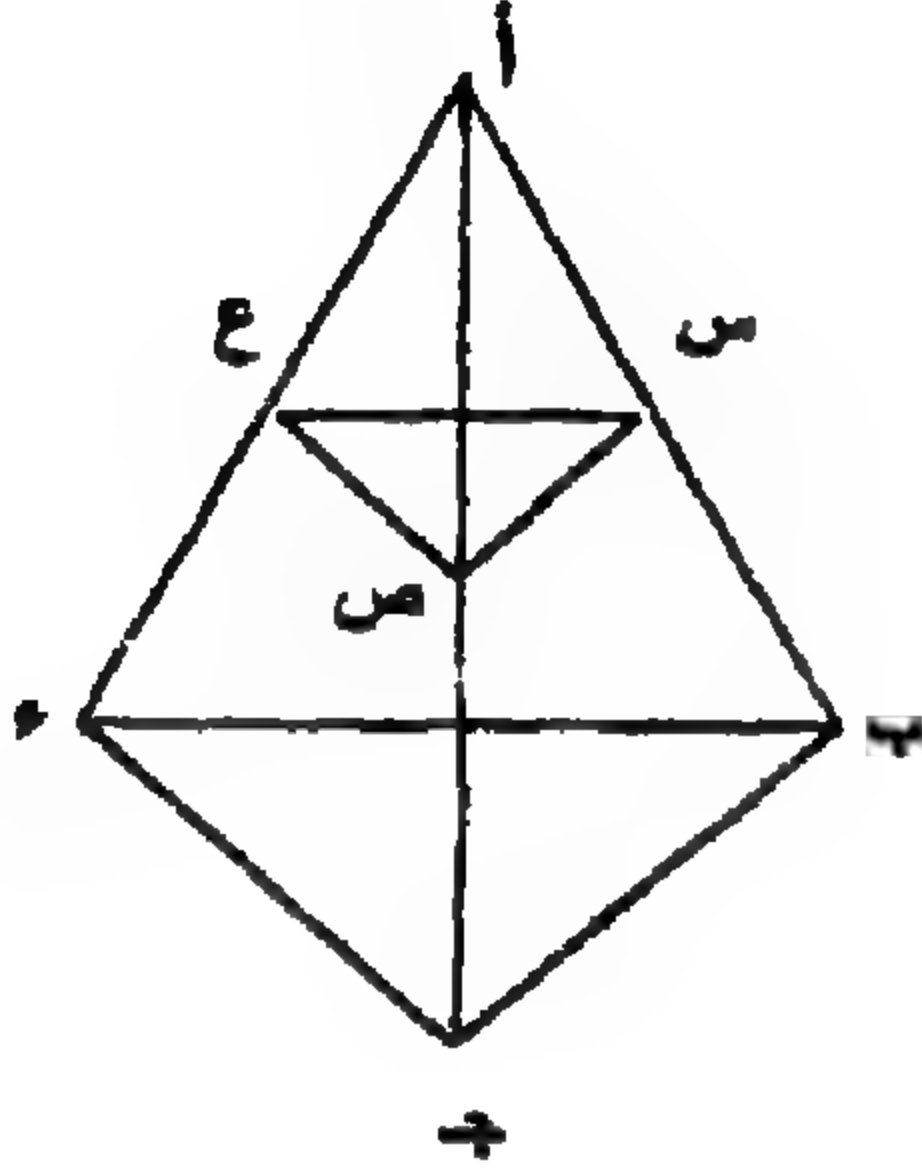
$$\therefore \frac{\text{جـ ن}}{\text{جـ ء}} = \frac{\text{ن ب}}{10}$$

$$\therefore \text{ن ب} = 8 \quad \therefore \text{هـ ب} = \text{هـ ن} + \text{ن ب} = 9 + 5 = 14$$

مثال : ا ب جـ ء هرم ثلاثي فيه س ، ص ، ع منتصفات ا ب ، ا جـ ، اء برهن ان :

- (١) المستوي س ص ع // المستوي ب جـ ء
- (٢) Δ س ص ع يشابه Δ ب جـ ء
- (٣) النسبة بين مساحتيهما .

الحـلـ



\therefore س منتصف ا ب ، ص منتصف ا جـ

\therefore س ص // ب جـ وبالمثل

ص ع // جـ ء ، س ع // ب ء

، \therefore س ص ، س ع متقاطعان في س

، ب جـ ، ب ء متقاطعان في ب

\therefore مستوي س ص ع // مستوي ب جـ ء اولا

، \therefore س ص // ب جـ في Δ ا ب جـ

، ص ع // جـ ء في Δ ا جـ ء

، س ع // ب ء في Δ ا ب ء

$$\therefore \frac{\text{س ص}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{ص ع}}{\text{جـ ء}} = \frac{\text{س ع}}{\text{ب ء}}$$

$\therefore \Delta$ س ص ع يشابه Δ ب جـ ء والنسبة بين مساحتيهما = (س ص) : (ب جـ)

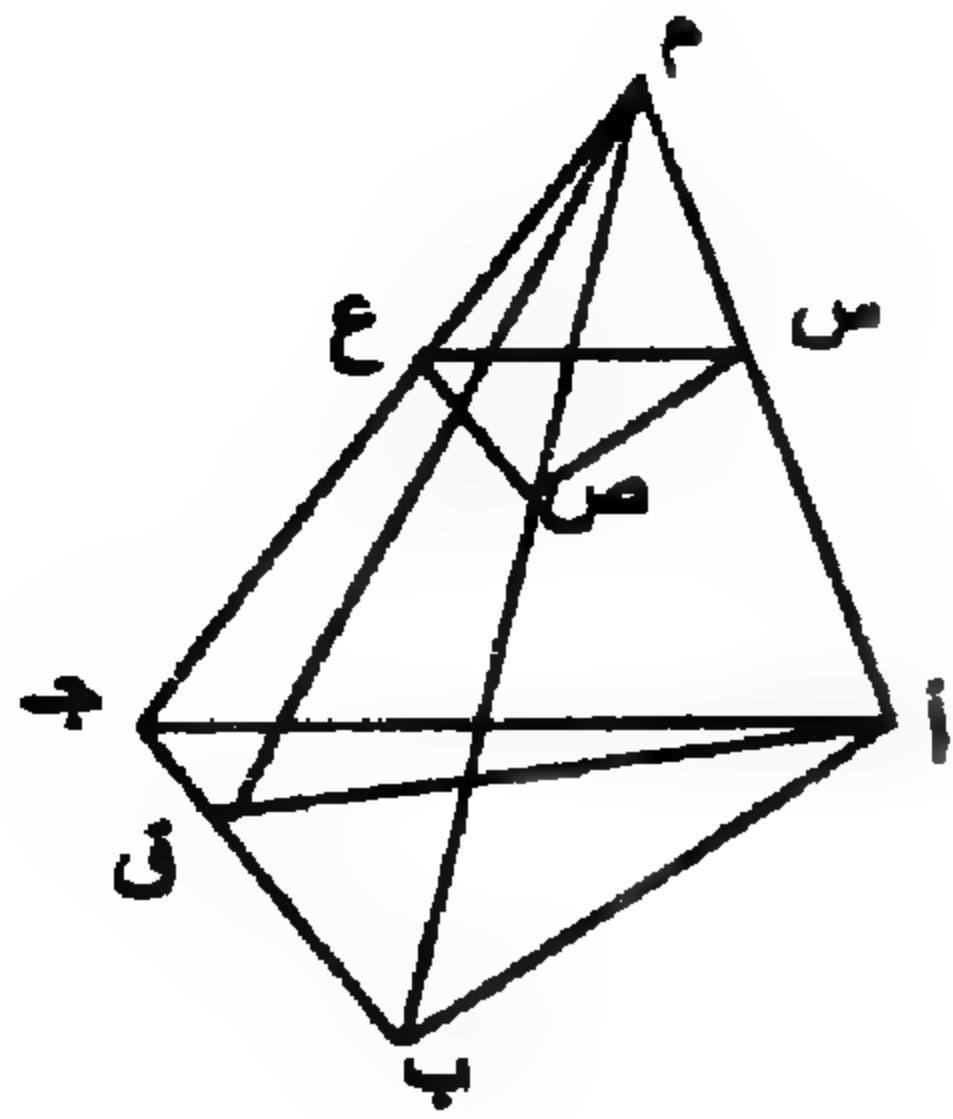
مثال : م ا ب جـ ء هرم ثلاثي اخذت النقطة س ، ص ، ع على م ا ، م ب ، م جـ على الترتيب بحيث

$$\text{كان } \frac{\text{م س}}{\text{م ا}} = \frac{\text{م ص}}{\text{م ب}} = \frac{\text{م ع}}{\text{م جـ}} = \frac{1}{3} \text{ - برهن ان :}$$

(١) المستوي س ص ع // المستوي ا ب جـ

(٢) اذا اخذت نقطة ق و ب جـ ورسم م ق فقطع ص ع في ل برهن ان ا ق = ٤ س ل

الحـلـ



$$\therefore \frac{1}{3} = \frac{م ص}{ص ب} = \frac{م س}{س ا}$$

\therefore س ص // ب أ ، ص ع // ب ج

\therefore المستوى س ص ع // المستوى ا ب ج

\therefore المستوى م ا ق قطع المستويين س ص ع ، ا ب ج

في س ل ، م ق \therefore س ل // ا ق

$$\therefore \frac{1}{4} = \frac{م ص}{ص ب} = \frac{م س}{س ا} \therefore ا ق = س ل$$

تمرين (٤)

(١) م ا ب ج هرم ثلاثي اخذت النقطه ه ، و علي الأحرف م ا ، م ب ، م ج علي الترتيب

$$\text{بحيث كان: } \frac{1}{3} = \frac{م ه}{ه ب} = \frac{م و}{و ج} = \frac{م ه}{ه ب}$$

(ا) اثبت ان المستوى ه و // المستوى ا ب ج

(ب) اذا كان م (ا ه و) = ٩ سم فاوجد مساحة ا ب ج

(٢) م ا ب ج هرم ثلاثي مساحة قاعدته ا ب ج = ١٥٠ سم^٢ اخذت نقطة ه علي م ا بحيث

$$\frac{2}{3} = \frac{م ه}{ه ا} \text{ رسم من ه مستوى يوازي القاعدة ا ب ج فقطع م ب في ه ، م ج في و}$$

(ا) اثبت ان : ا ه و يشابه ا ب ج

(ب) اوجد مساحة ا ه و

(٣) ا ب ج ، ه ب ج مثلثان في مستويين مختلفين ، ه منتصف ا ب ، و منتصف ا ج اثبت ان

ه و يوازي المستوى ه ب ج .

(٤) ا ب ج ، ه ب ج مثلثان في مستويين مختلفين ، س ، ص ، ع ، ل منتصفات ا ب ، ا ج ، ج ه ،

ب ه علي الترتيب - اثبت ان الشكل س ص ع ل اضلاعه في مستوى واحد يوازي كلا من

ب ج ، ا ه

(٥) أ ب ج د أ ب ج منشور ثلاثي ، ن نقطة تقاطع قطري الوجه أ ب ب ، م نقطة تقاطع قطري الوجه ب ب ج ج ، ط ، ق منتصفاً أ ب ، ب ج على الترتيب- أثبت أن الشكل ن م ق ط متوازي أضلاع .

(٦) أ ب ج د مربع ، ن نقطة لا تنتمي إلى مستواه بحيث ن أ = ن ب = ن ج = ن د ، رسم مستوي مار بالضلع أ ب قاطعاً ن ج ، ن د في ه ، و على الترتيب- أثبت أن الشكل اب ه و شبه منحرف متساوي الساقين .

(٧) س ، ص ، ع ثلاث مستويات متوازية قطعها المستقيمان ل ، م فإذا قطعها ل في ا ، ب ، ج وقطعها م في ع ، ه ، و وكان أ ب = ع م ، ب ج = ه م ، ه و = م م فاحسب طول ع ه .

(٨) س ، ص مستويان متوازيان ، أ ع يقطع المستويين في ب ، ج على الترتيب بحيث كان أ ب : ب ج = ج د : د ع = ١ : ٣ : ٥ ، أ و يقطع س ، ص في النقطتين ه ، و ، ع ن يقطع المستوى ص في م والمستوي س في ن - أثبت أن : ٢ م ج د = ٥ ن ب . ب ه

٥- إذا كان مستقيم عمودياً على كل من مستويين فإتبعهما يكونان متوازيان وكذلك إذا كان مستقيم عمودياً على أحد مستويين متوازيين فإتبعه يكون عمودياً على الآخر.

تمرين: أ ب ج د هـ هـم ثلاثي فيه $ا ج = ا هـ$ ، $ب ج = ب هـ$ ، ب و متوسط في $\Delta ب ج د$ رسم

أهـ \perp ب و برهن أن أهـ \perp المستوى ب ج د .

الحل

\therefore وفي منتصف ج د ، $\Delta ب ج د$ متساوي الساقين

$\therefore \overline{ب و} \perp \overline{ج د}$

$\therefore \overline{ج د} \perp \overline{ب و}$ ---- (١)

كذلك $\overline{ا و} \perp \overline{ج د}$

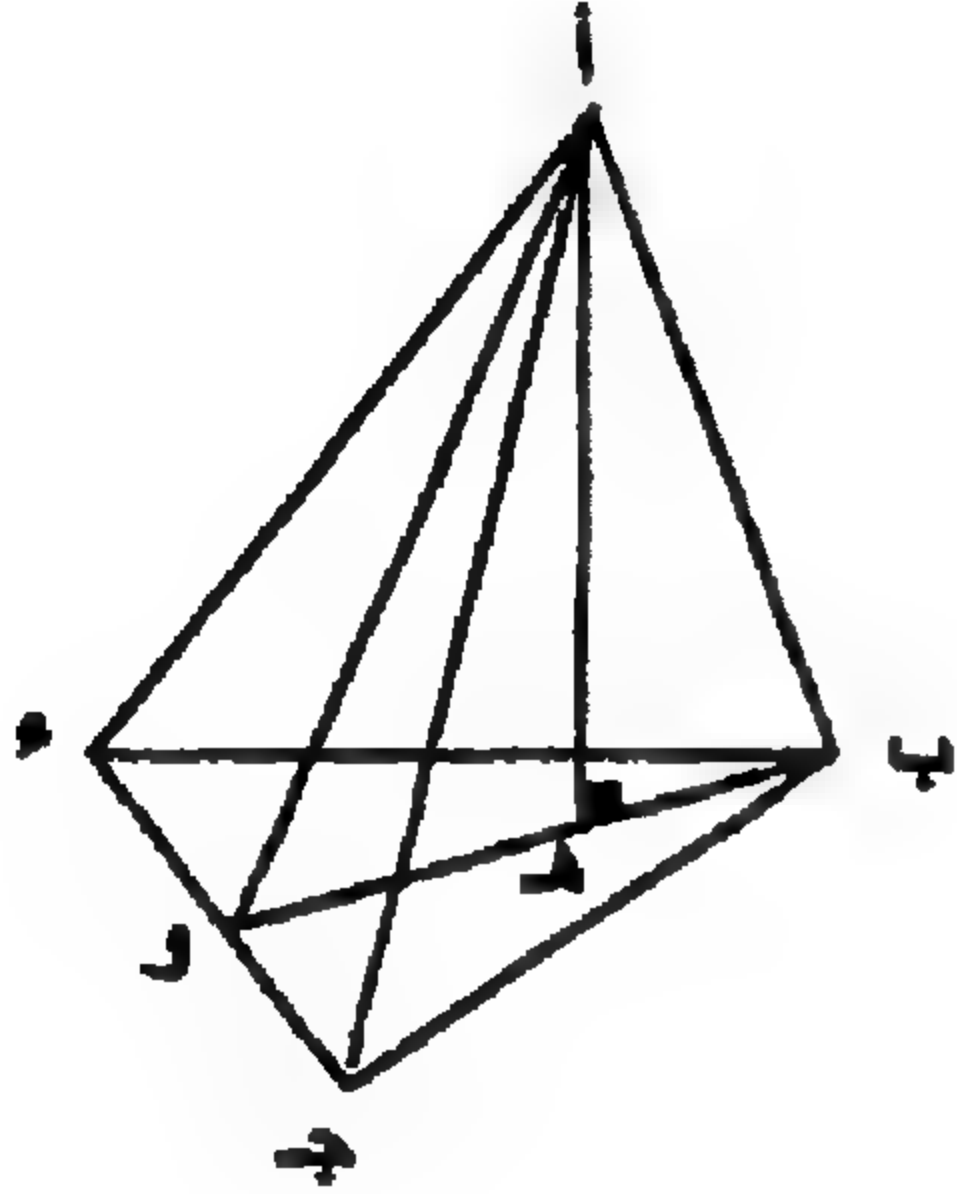
$\therefore \overline{ج د} \perp \overline{ا و}$ ---- (٢)

من (١) ، (٢)

$\therefore \overline{ج د} \perp$ المستوي ب و ا

$\therefore \overline{ج د} \perp \overline{أ هـ}$

$\therefore \overline{أ هـ} \perp$ كلا من $\overline{ج د}$ ، $\overline{ب و}$ $\therefore \overline{أ هـ} \perp$ المستوي ب ج د



مثال: أ ب ج د متوازي أضلاع أقيم من ا ، ب ، ج أعمدة على المستوى أ ب ج د فقايلت مستويا
مرا بالنقطة ع في س ، ص ، ع - أثبت أن: الشكل س ص ع د متوازي أضلاع.

الحل

$\therefore \overline{ج د}$ ، $\overline{ب ص}$ ، $\overline{ا س}$ أعمدة على المستوى أ ب ج د

$\therefore \overline{ج د} \parallel \overline{ب ص} \parallel \overline{ا س}$

$\therefore \overline{ب ص} \parallel \overline{ا س}$ ، $\overline{ب ج} \parallel \overline{ا د}$

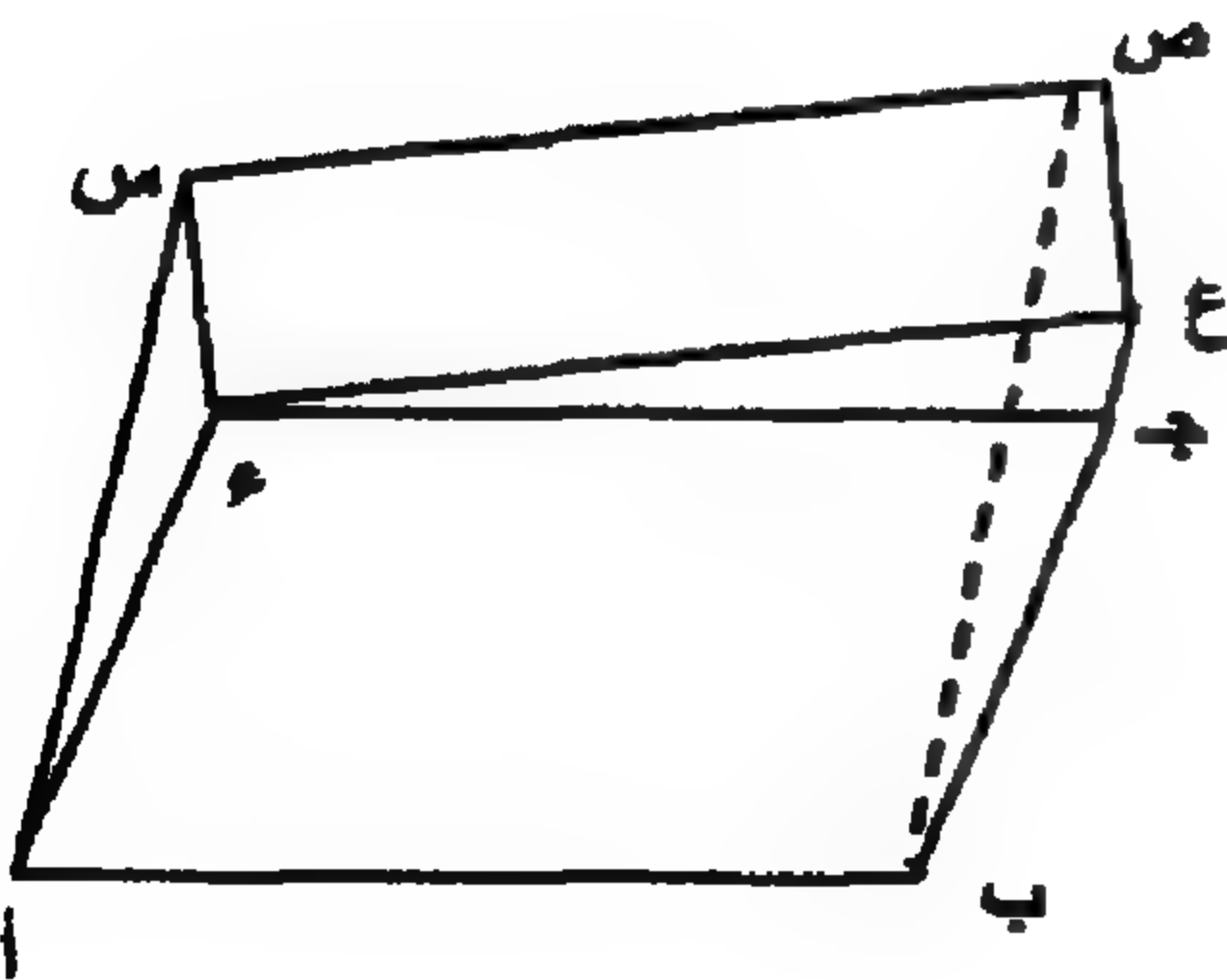
$\overline{ب ص} \cap \overline{ب ج} = \{ب\}$

$\overline{ا س} \cap \overline{ا د} = \{ا\}$

\therefore المستوي ب ص ع ج \parallel المستوي ا س د

\therefore المستوي ع ص س د قاطعاً لهما في ع ص ، س د

$\therefore \overline{ع ص} \parallel \overline{س د}$ ---- (١)



بالمثل $\vec{ع} \parallel \vec{ج} \parallel \vec{ص} \parallel \vec{ب}$ ، $\vec{ج} \parallel \vec{د} \parallel \vec{ب} \parallel \vec{أ}$

∴ المستوي $ع ج د$ // المستوي $ص ب أ$ ، المستوي $ع ص س$ قاطعا لهما

في $ص س$ ، $\vec{ع} \parallel \vec{ص} \parallel \vec{س} \parallel \vec{ع}$ ∴ $ص س \parallel ع ع$ ----- (٢)

من (١) ، (٢) ∴ الشكل $ص ع$ متوازي أضلاع

مثال: $أ ب ج د$ قائم الزاوية في $أ$ والمستقيم $أ ن$ عمودي على مستوي المثلث $ر س ن$ موازيا $أ$
جـ اثبت أن $ن ل \perp ن ب$.

الحل

أن $ل$ المستوي $أ ب ج$

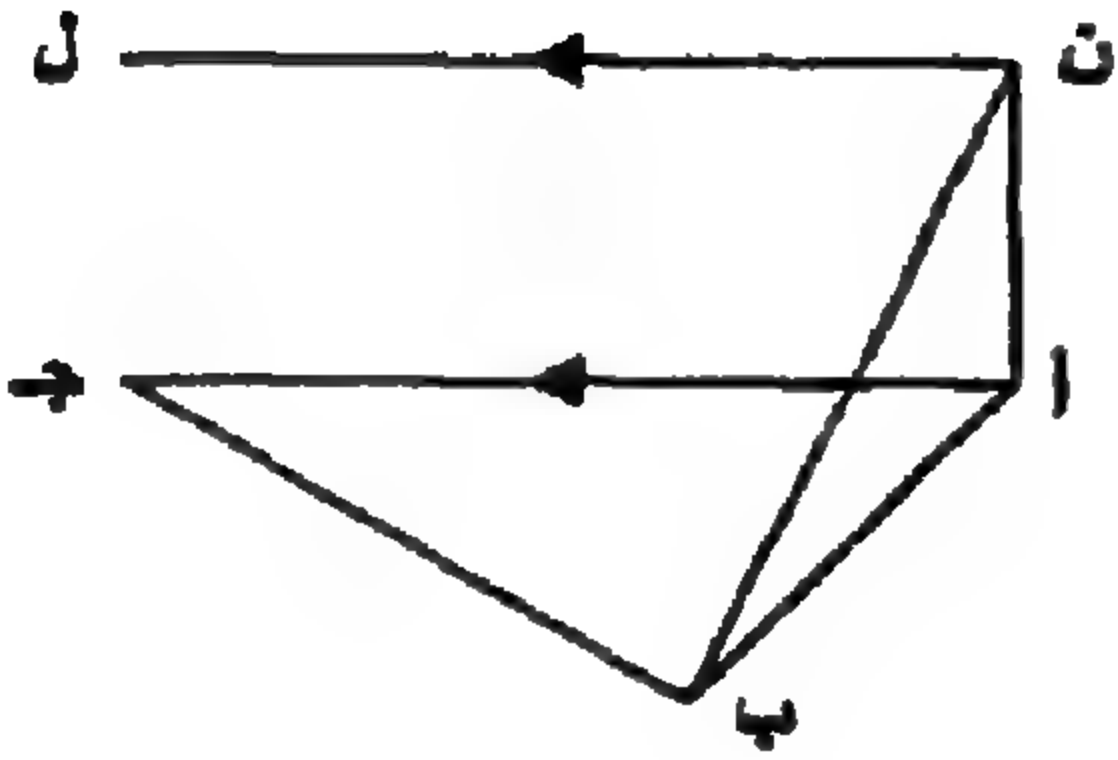
∴ $ن أ \perp أ ج$ ، $أ ج \perp أ ب$ ، $أ ج \perp أ ن$

(لأن $ن أ \perp$ مستوي $أ ب ج$)

∴ $أ ج \perp$ المستوي $ن أ ب$

، ∴ $ن ل \parallel أ ج$ ∴ $ن ل \perp$ المستوي $ن ل ب$

∴ $ن ل \perp ن ب$



مثال: $أ ب ج د$ و $أ ب ج د$ مكعبا.

(١) بين أن $ب ب$ \perp على المستوي $أ ب ج$ واستنتج أن $أ ج$ ، $ب ب$ متعامدان .

(٢) اثبت أن $أ ج$ \perp المستوي $ب ب$ واستنتج أن $أ ج$ ، $ب ب$ متعامدان .

الحل

(١) $ب ب$ والمستوي $أ ب ج$ متعامدان لأن :

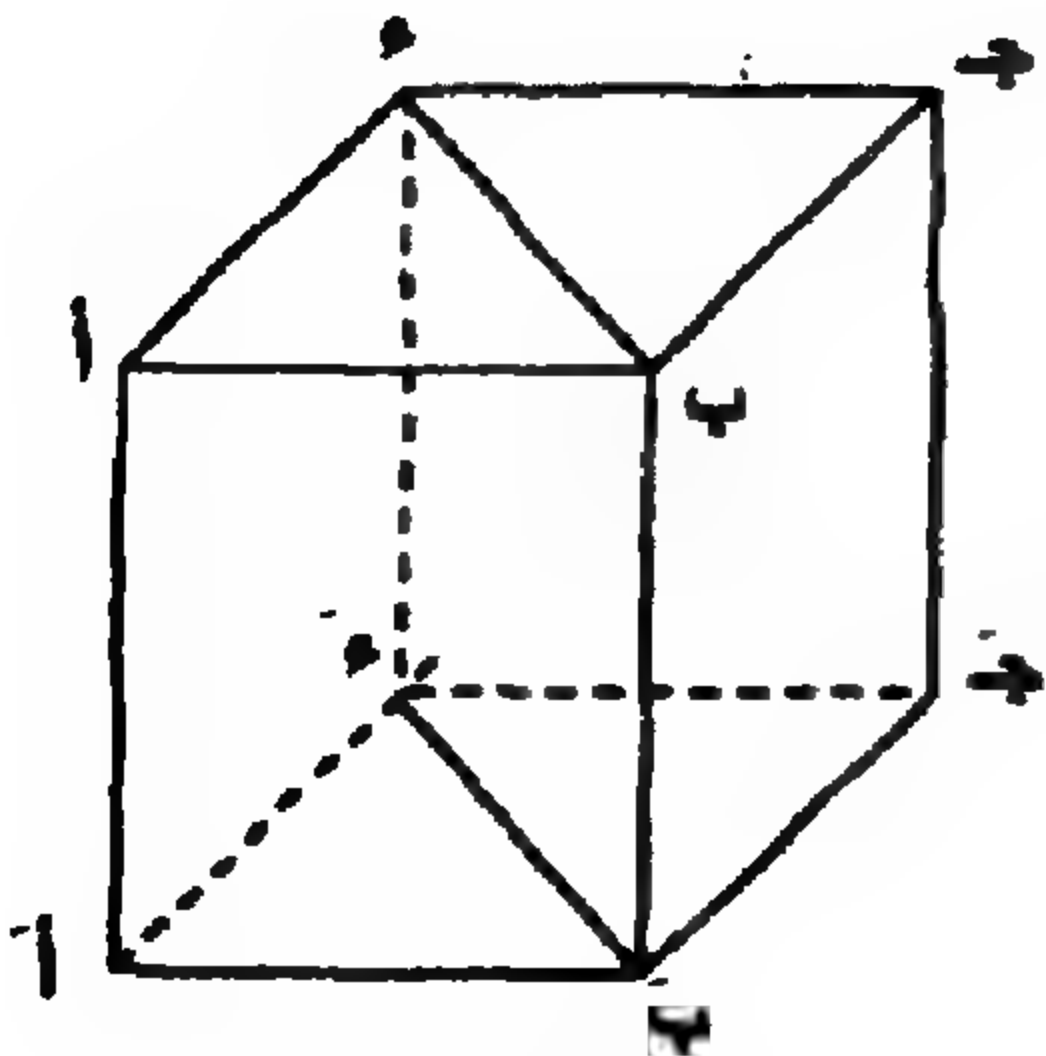
$ب ب \perp ب ب$ ، $ب ب \perp ب ب$

∴ $ب ب \perp$ المستوي $أ ب ج$

∴ $ب ب \perp$ المستوي $أ ب ج$

، $أ ج$ يقع في المستوي $أ ب ج$

∴ المستقيمان $ب ب$ ، $أ ج$ متعامدان



(٢) $\overline{آج}$ والمستوي $ء ب ب'$ متعامدان لأن :

$\overline{آج} \perp ء ب$ (قطر المربع $آ ب ج ء$) ، $\overline{آج} \perp \overline{ب ب'}$

$\therefore \overline{آج} \perp$ المستوي $ء ب ب'$

$\therefore \overline{آج} \perp$ المستوي $ء ب ب'$ ، $ء ب'$ يقع في المستوي $ء ب ب'$

$\therefore \overline{آج}$ ، $ء ب'$ متعامدان .

مثال: $آ ب ج$ مثلث قائم الزاوية في $آ$ ، $ء$ نقطة خارج مستو المثلث بحيث كان $ء آ = ء ب = ء ج$ ،
نصف $ب ج$ في $هـ$ - أثبت أن : $هـ هـ \perp$ المستوي $آ ب ج$.

الحل

الفكرة : محاولة إثبات أن $هـ هـ \perp$ مستقيمين في المستوي

$آ ب ج$ وبذلك يكون $هـ هـ \perp$ المستوي $آ ب ج$

$\therefore ء ج = ء ب$ ، $هـ هـ$ منتصف $ب ج$

$\therefore هـ هـ \perp ب ج$ ---- (١)

نصل $آ هـ$ فيكون $آ هـ = ب هـ$

$\therefore ٢ء ب' = ٢ء هـ + ٢هـ ب = ٢هـ آ + ٢هـ ب = ٢هـ آ$

لكن $ء ب = ء آ$ $\therefore ٢هـ آ + ٢هـ ب = ٢هـ آ$

$\therefore ٢هـ آ = ٢هـ ب$ ، $هـ هـ \perp آ هـ$ ---- (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن $هـ هـ$ عمودي على كل من $ب ج$ ، $آ هـ$ الواقعين في المستوي $آ ب ج$

$\therefore هـ هـ \perp$ المستوي $آ ب ج$

مثال: $آ ب$ عمودي على المستوي $س$ ويلقيه في $ب$ ، $ب ج$ ، $ج ء$ مستقيمان متعامدان في

المستوي $س$ - أثبت أن: $آ ج \perp ج ء$.

الحل

$\therefore آ ب \perp$ المستوي $س$ فهو عمودي على أي مستقيم فيه

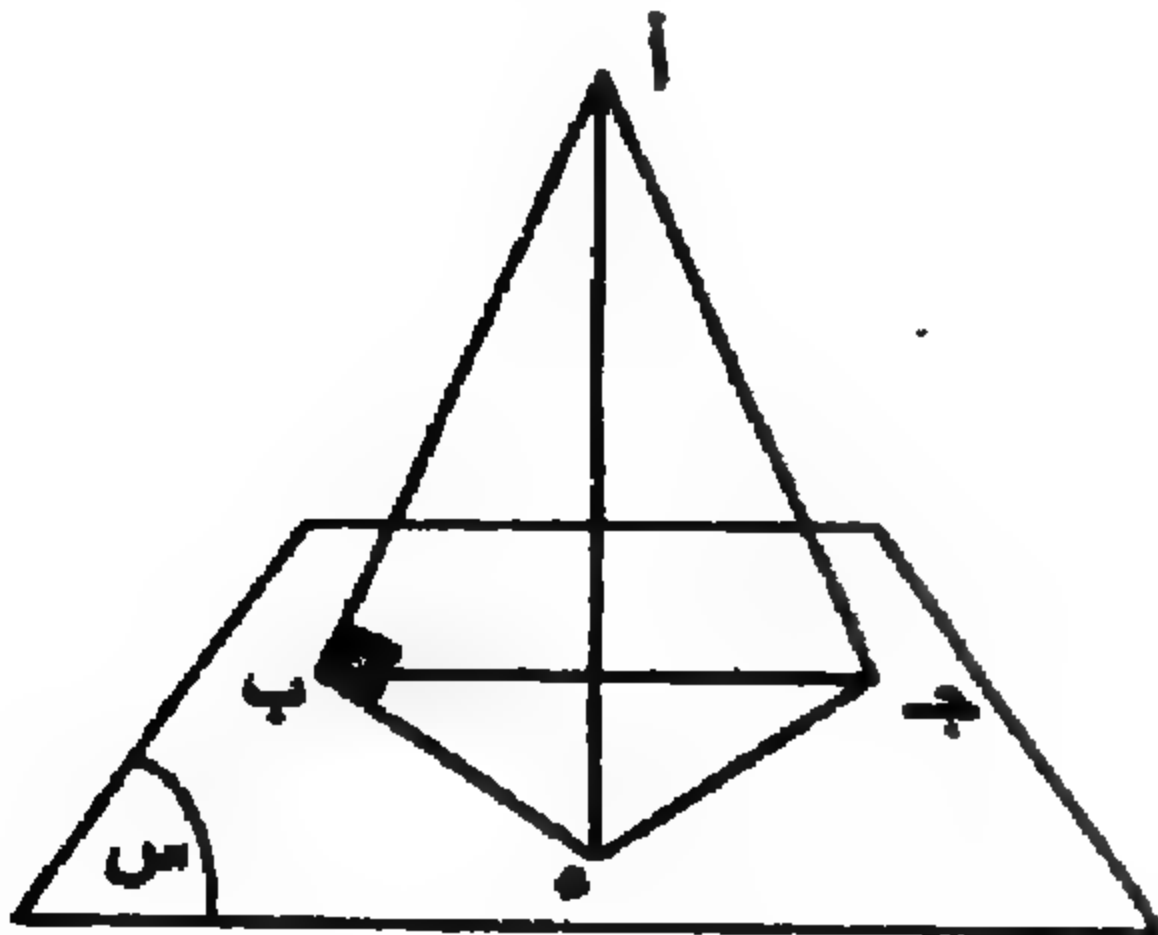
$\therefore آ ب \perp ب ج$ ومن الرسم

$آ ج' = آ ب' + ب ج' = ١$ ---- (١)

$\therefore ب ج \perp ج ء$

$\therefore ب ء' = ج ء' + ج ب' = ٢$ ---- (٢)

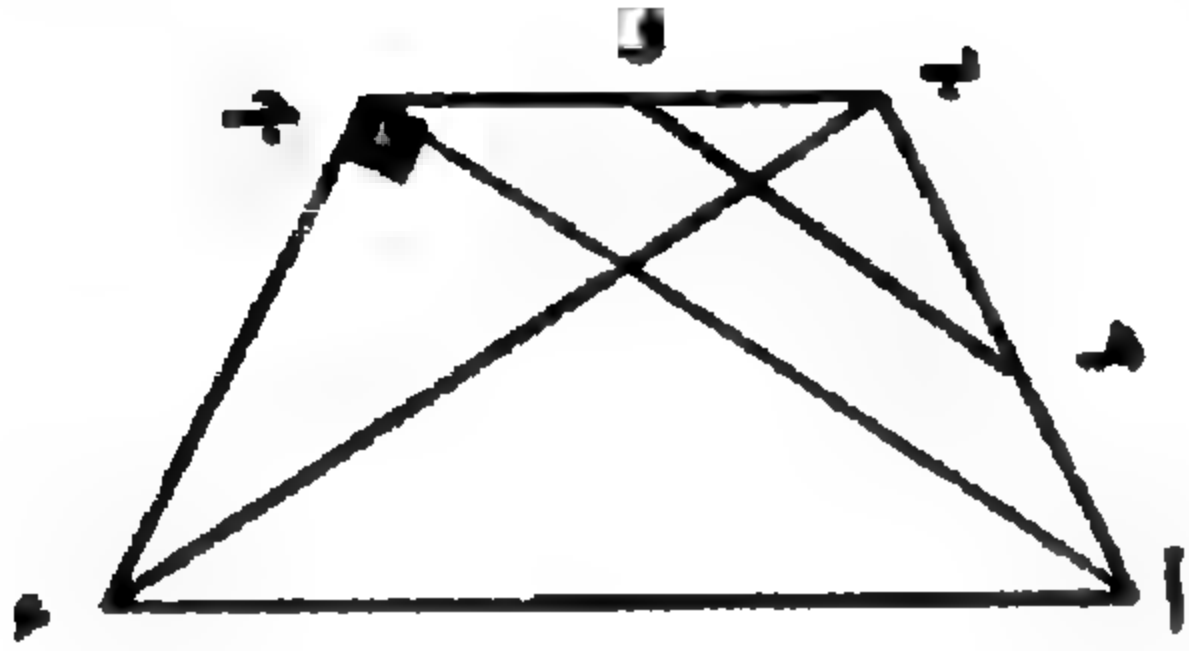
$\therefore آ ب \perp ب ء$ $\therefore آ ء' = آ ب' + ب ء' = ٣$ ---- (٣)



بالتعويض من (٢) في (٣) عن قيمة ب^١ ع^١
 $\therefore \text{ا} \text{ع}^{\text{١}} = \text{ا} \text{ب}^{\text{١}} + \text{ب} \text{ع}^{\text{١}} = \text{ا} \text{ب}^{\text{١}} + \text{ج} \text{ع}^{\text{١}} + \text{ج} \text{ب}^{\text{١}}$
 $= \text{ا} \text{ب}^{\text{١}} + \text{ج} \text{ع}^{\text{١}} + \text{ج} \text{ب}^{\text{١}}$
 $= \text{ا} \text{ج}^{\text{١}} + \text{ج} \text{ب}^{\text{١}}$ من المعادلة رقم (٣)
 $\therefore \text{ا} \text{ج} \text{ع}^{\text{١}} \text{ قائمة} \quad \therefore \text{ا} \text{ج} \perp \text{ج} \text{ع}$

مثال: ا ب ج ع شكل رباعي ليست أضلاعه كلها في مستوى واحد ، ا ج عمودي علي كل من ج ع ، ج د . نصف ا ب في ه ، ب ج في و- أثبت أن ه و \perp المستوي ب ج ع .

الحل



$\therefore \text{ا} \text{ج} \perp \text{ب} \text{ج} \text{ع} \text{، ع} \text{ج}$
 $\therefore \text{ه} \text{و} \parallel \text{ا} \text{ج}$
 $\therefore \text{ه} \text{و} \perp \text{ب} \text{ج} \text{ع} \text{، ع} \text{ج}$
 وحيث إن ب ج ع ، ع ج يعنيان مستوي
 $\therefore \text{ه} \text{و} \perp$ المستوي ب ج ع

مثال: ا ب ج ع ا ب ج ع متوازي سطوح - المستوي من العمودي علي ب ج قطع الأحرف ا ع ، ب ج ، ب ج ، ا ع في س ، ص ، ع ، ل علي الترتيب أثبت أن: المقطع س ص ع ل سطح متوازي أضلاع وإذا رسم ص م \perp ل ع- أثبت أن: ص م \perp المستوي ا ب ج ع .

الحل

\therefore المستوي ا ب ج ع \parallel المستوي ا ب ج ع
 ، المستوي س قاطعا لهما في س ص ، ع ل
 $\therefore \text{س} \text{ص} \parallel \text{ع} \text{ل}$ ---- (١)

بالمثل المستوي ب ب ج ج \parallel المستوي ا ع ا ع
 والمستوي س قاطعا لهما في س ل ، ص ع
 $\therefore \text{س} \text{ل} \parallel \text{ص} \text{ع}$ ---- (٢)

من (١) ، (٢) \therefore الشكل س ص ع ل متوازي أضلاع

، $\therefore \text{ب} \text{ج} \perp$ المستوي س

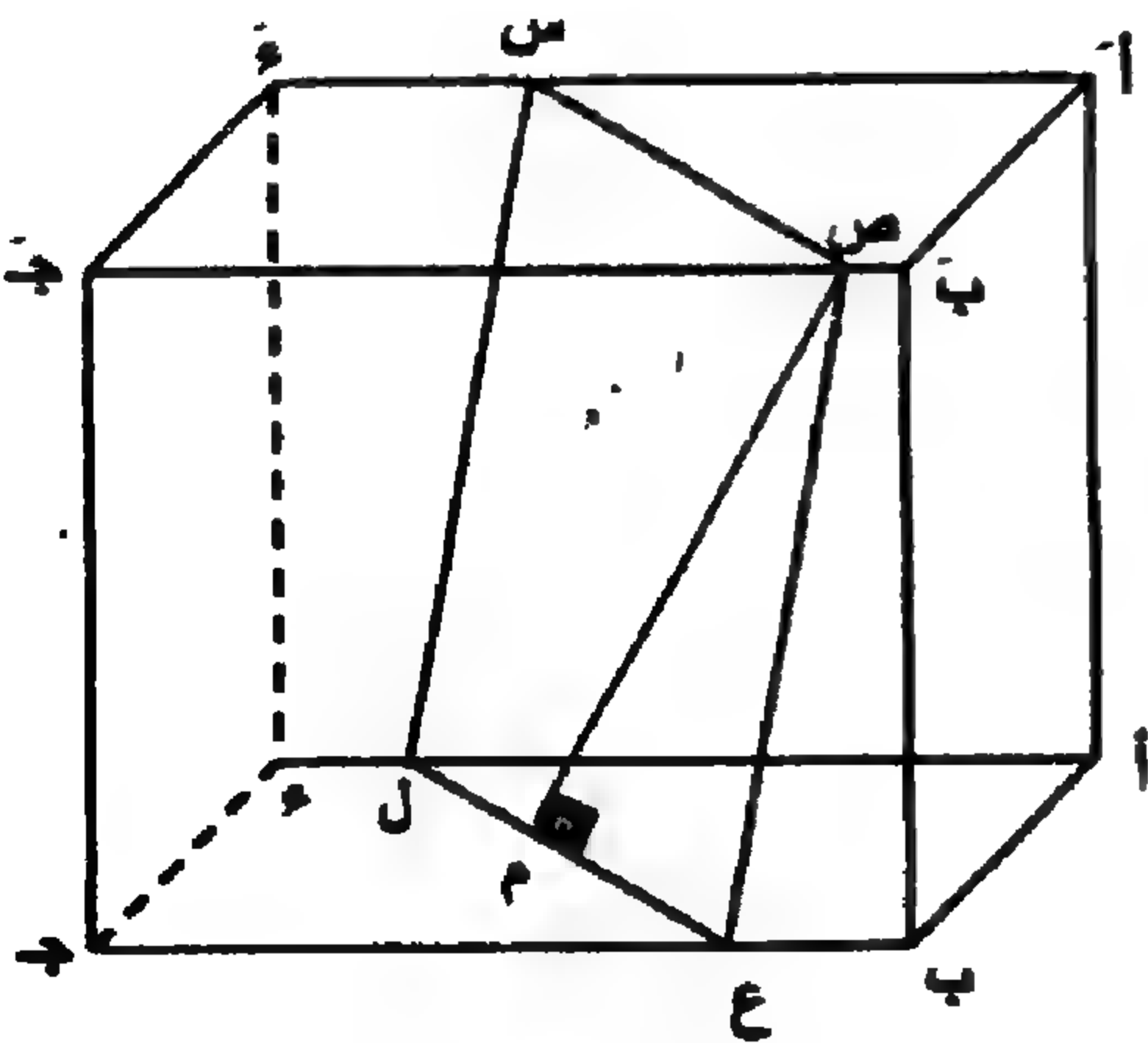
$\therefore \text{ب} \text{ج} \perp \text{ص} \text{م}$ ---- (٣)

$\therefore \text{ص} \text{م} \perp \text{ل} \text{ع}$ فرضاً ---- (٤)

من (٣) ، (٤)

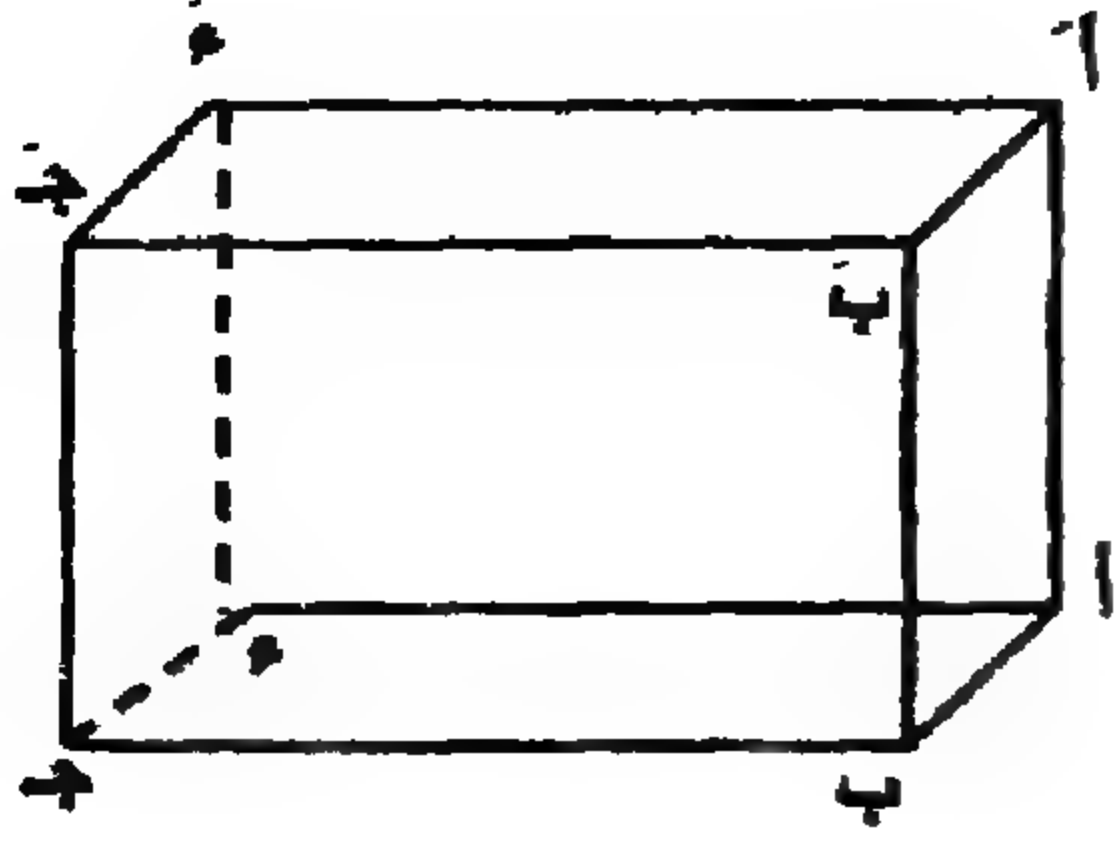
$\therefore \text{ص} \text{م} \perp$ كل من ب ج ، ل ع

$\therefore \text{ص} \text{م} \perp$ المستوي ا ب ج ع



تمرين (٥)

١- في الشكل المقابل :



أ ب ج د أ ب ج د متوازي مستطيلات

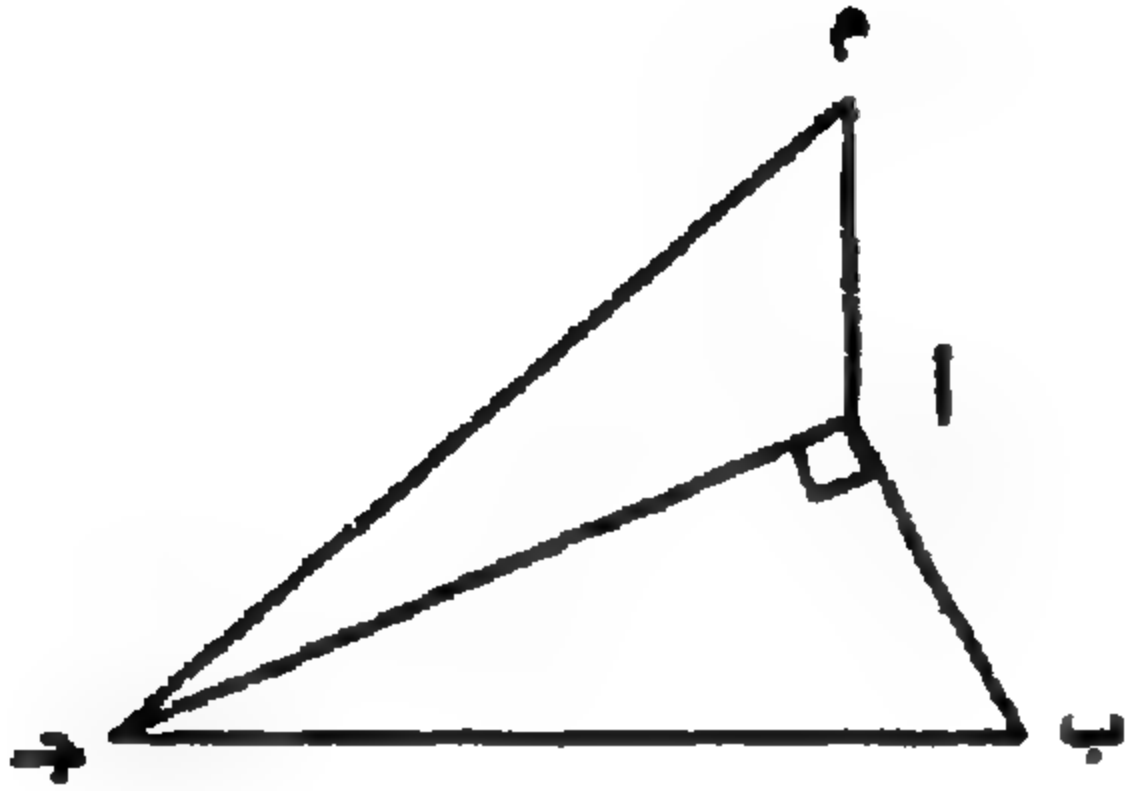
(أ) ما وضع $\overrightarrow{AA'}$ بالنسبة للمستوي أ ب ج د ؟ ولماذا؟

(ب) ما وضع $\overrightarrow{AA'}$ بالنسبة للمستوي أ ب ج د ؟ ولماذا؟

(ج) ما وضع $\overrightarrow{AA'}$ بالنسبة للمستوي أ ب ج د ؟ ولماذا؟

(د) أثبت أن $\overrightarrow{AA'} \perp \overrightarrow{AB}$

٢- في الشكل المقابل:



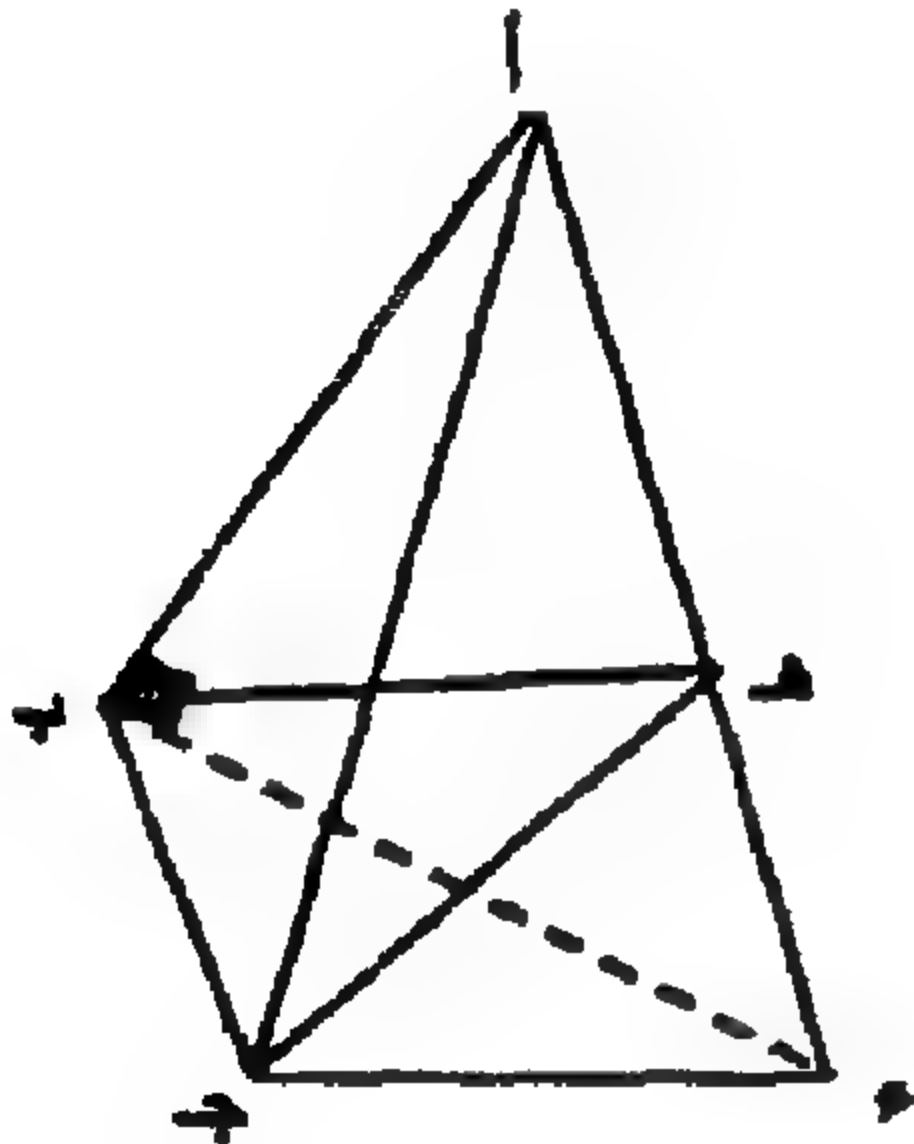
أ ب ج د مثلث قائم الزاوية في أ

، م نقطة لا تنتمي للمثلث أ ب ج

، م أ = أ ب ، م ج = ب ج

- اثبت أن: $\overrightarrow{AJ} \perp$ المستوي م أ ب .

٣- في الشكل المقابل:



إذا كان $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$ ، $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$

فأثبت أن:

(أولاً) $\Delta أ ب ج \equiv \Delta أ ج ب$

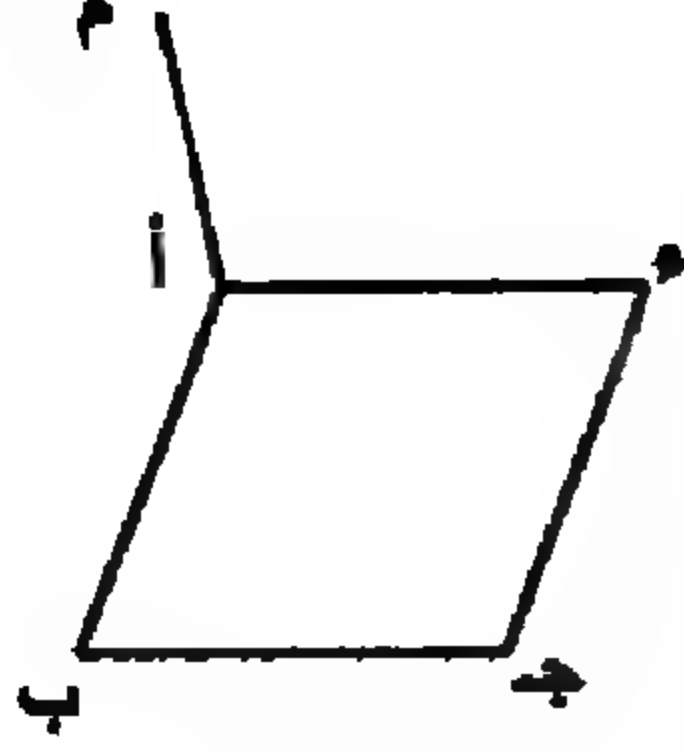
(ثانياً) $\overrightarrow{AD} \perp$ المستوي أ ب ج .

(ثالثاً) $\overrightarrow{AD} \perp$ المستوي ه ب ج حيث ه منتصف أ ج .

٤- النقاط أ ، ب ، ج ، د لا تقع في مستو واحد وكان أ ب = أ ج = أ د ، أ ب \perp المستوي أ ج د

، أ د \perp المستوي ب أ ج - ارسم شكلاً يوضح ذلك : أثبت أن $\Delta ب ج د$ متساوي الأضلاع.

٥- في الشكل المقابل : أ ب ج د مربع ، م نقطة لا تنتمي إلى مستوى المربع بحيث م أ \perp أ ب
أولاً: هل م أ \perp المستوى أ ب ج د ؟ ولماذا؟



ثانياً: أثبت أن ب أ \perp المستوى م أ د .

ثالثاً: هل يوجد مستقيم آخر \perp المستوى م أ د ؟ لماذا ؟

٦- أ ب ج د ه أ ب ج د مكعب طول حرفه = ل

اثبت أن : (أولاً) Δ ه أ ج متساوي الأضلاع واحسب مساحة سطحه بدلالة ل .

(ثانياً) أ ب \perp ب ج د (ثالثاً) أ ج \perp ه ب

(رابعاً) أثبت أن أقطار المكعب متساوية في الطول وطول كلا منها $\sqrt{3}ل$ وتستخدم هذه الخاصية في حل التمارين .

٧- أ ب ج د ه أ ب ج د متوازي مستطيلات أبعاده الثلاثة ب ج = س ، ب أ = ص ، ب ب = ع

أولاً: أثبت أن : ب ج \perp ب أ

ثانياً: أثبت أن : أقطار متوازي المستطيلات متساوية في الطول ومربع طول كلا منها = س^٢ + ص^٢ + ع^٢

ثالثاً: إذا كان س = ٨ سم ، ص = ٦ سم ، ع = ٢٤ سم - فاحسب طول قطر متوازي المستطيلات .

تمارين غير محلولة

- أذكر فقط أي من الجمل الآتية صحيح وأي منها خاطئ :-

١. أي نقطتين يمر بهما مستو واحد فقط .
٢. أي نقطة من الفراغ يمر بها عدد لا نهائي من المستويات .
٣. أي ثلاثة نقط ليست على استقامة واحدة يمر بها مستو واحد على الأقل .
٤. كل مستقيمين متقاطعين يحتويهما مستو واحد فقط .
٥. كل مستويين متقاطعين يشتركان في نقطة واحدة .

٦. أى مستقيم محتوى فى كل مستوى يجزئ هذا المستوى إلى ثلاث مجموعات منفصلة من النقط.

٧. أى مستوى يجزئ الفراغ إلى مجموعتين منفصلتين من النقط.

٨. رؤوس المثلث تعين مستويا.

٩. رؤوس متوازي الأضلاع لا تعين مستويا.

١٠. المستقيمت الرأسية فى الفراغ كلها متوازية.

١١. المستقيمت الأفقية فى الفراغ كلها متوازية.

١٢. المستويان الموازيان لثالث فى الفراغ متوازيان.

١٣. إذا وازى مستقيم كل من مستويين كان هذا المستويان متوازيين.

١٤. إذا توازى مستويان فكل مستقيم فى أحدهما يوازى أى مستقيم فى الآخر.

١٥. إذا كان $\overleftrightarrow{AB} \perp \text{س}$ ، المستوى $\perp \text{س}$ يوازى المستوى ص فإن $\overleftrightarrow{AB} \parallel \text{المستوى ص}$.

١٦. قاعدة المنشور القائم يجب أن تكون سطح مضلع منتظم.

١٧. المنشور القائم أحرفه عمودية على كل من قاعدتيه.

١٨. متوازي السطوح المائل هو منشور مائل جميع أوجهه سطوح متوازيات أضلاع.

١٩. متوازي المستطيلات هو منشور قائم قاعدته سطح مستطيل.

٢٠. المكعب له ثمانية أوجه وستة رؤوس وإثنا عشر حرف.

٢١. أقطار متوازي السطوح متساوية فى الطول.

٢٢. أقطار متوازي المستطيلات متساوية فى الطول.

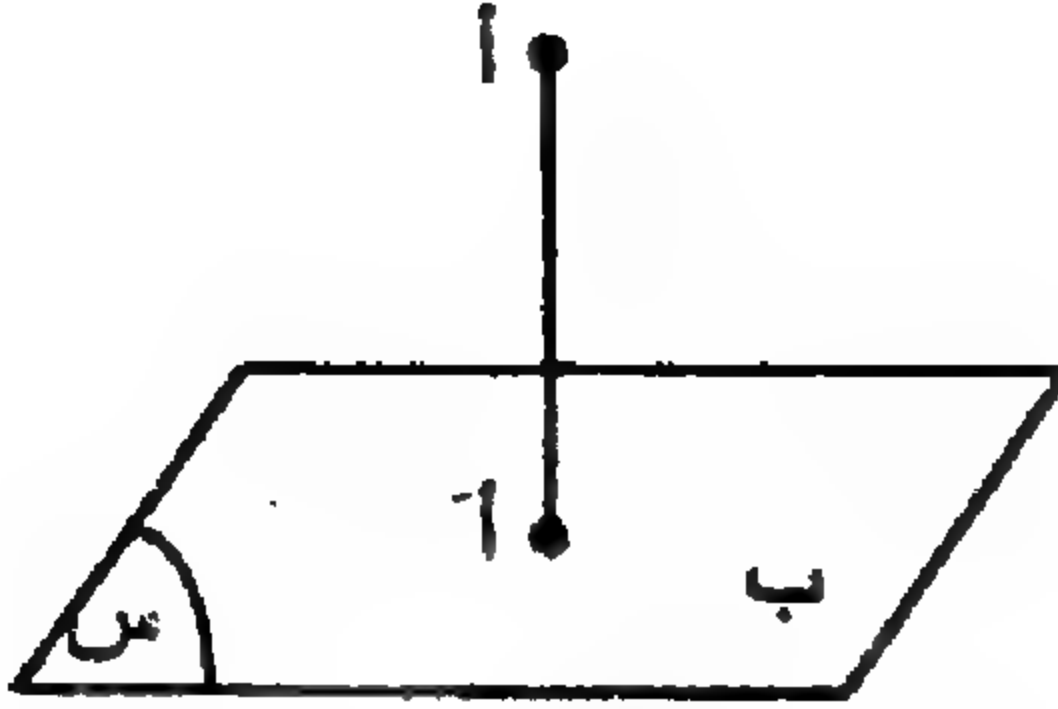
٢٣. لا يمكن رسم أربع مستويات كل ثلاثة منها متقاطعة فى نقطة واحدة.

٢٤. قاعدة الهرم الرباعى القائم يمكن أن تكون سطح معين.

الباب الثاني

الإسقاط العمودي

مسقط نقطة :



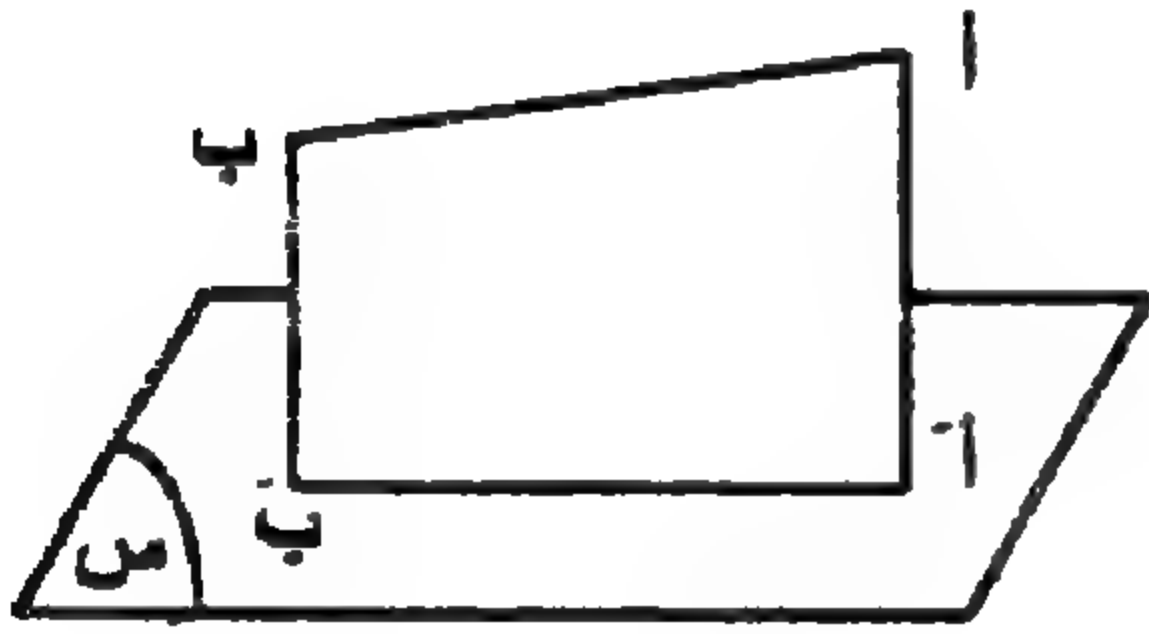
إذا كان A نقطة واقعة خارج المستوى S وكانت النقطة A' هي موقع العمود الساقط من النقطة A على المستوى S فإن النقطة A' هي المسقط العمودي للنقطة A على المستوى S .
 $\therefore A'$ هي مسقط A على المستوى S .

إذا كانت B نقطة \in المستوى S فإن مسقطها على المستوى S هو نفس النقطة B .

تعريف :

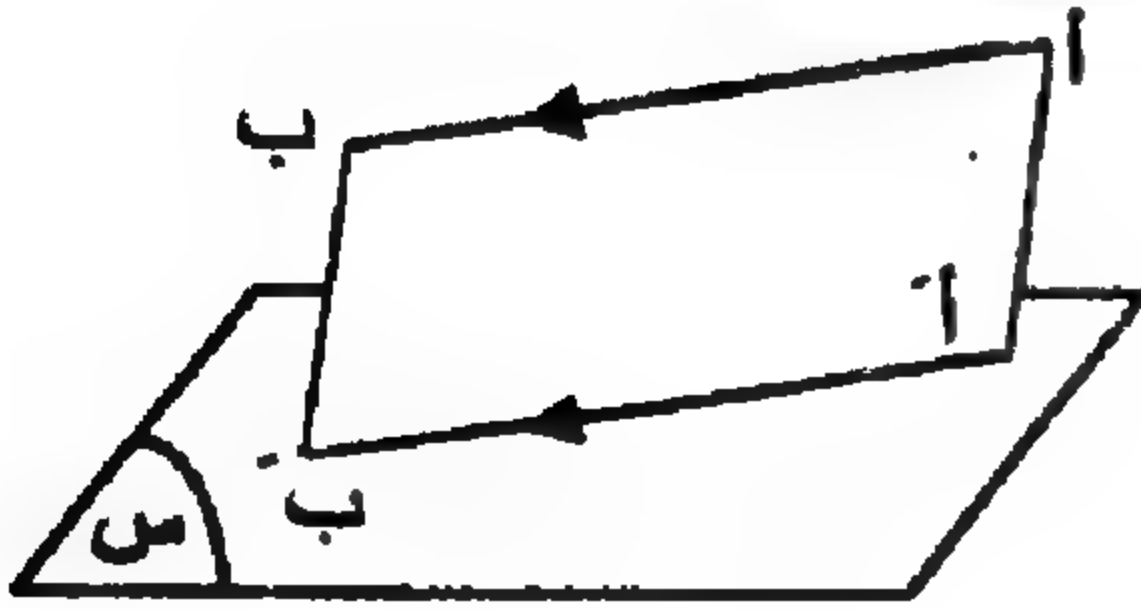
المسقط العمودي لنقطة معلومة على مستوى معلوم هو موقع القطعة المستقيمة العمودية المرسومة من النقطة على ذلك المستوى.

مسقط قطعة مستقيمة على مستوى معلوم :



- إذا كانت AB قطعة مستقيمة ، S مستوى معلوم ، AB لا تقع في المستوى S . وكانت A' مسقط A على المستوى S ، B' مسقط B على المستوى S فإن $A'B'$ تسمى مسقط AB على المستوى S .

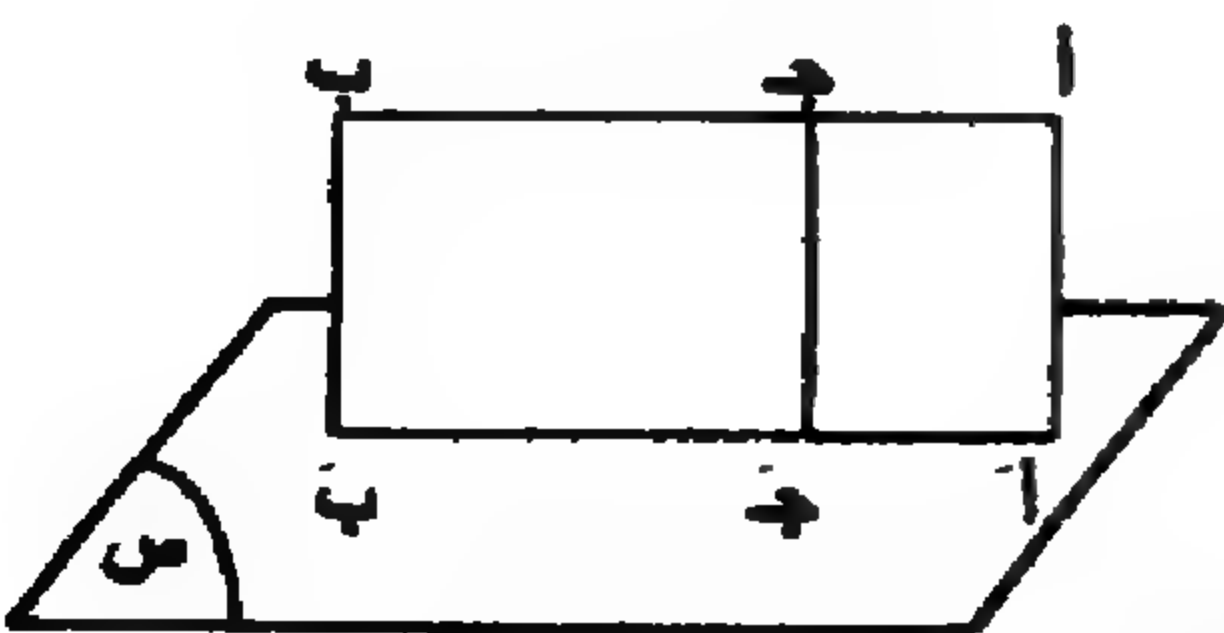
مسقط قطعة مستقيمة على مستوى في أوضاع مختلفة :-



(١) إذا كانت $AB \parallel$ المستوى S

\therefore مسقطها $A'B' \parallel AB$

، $A'B' = AB$

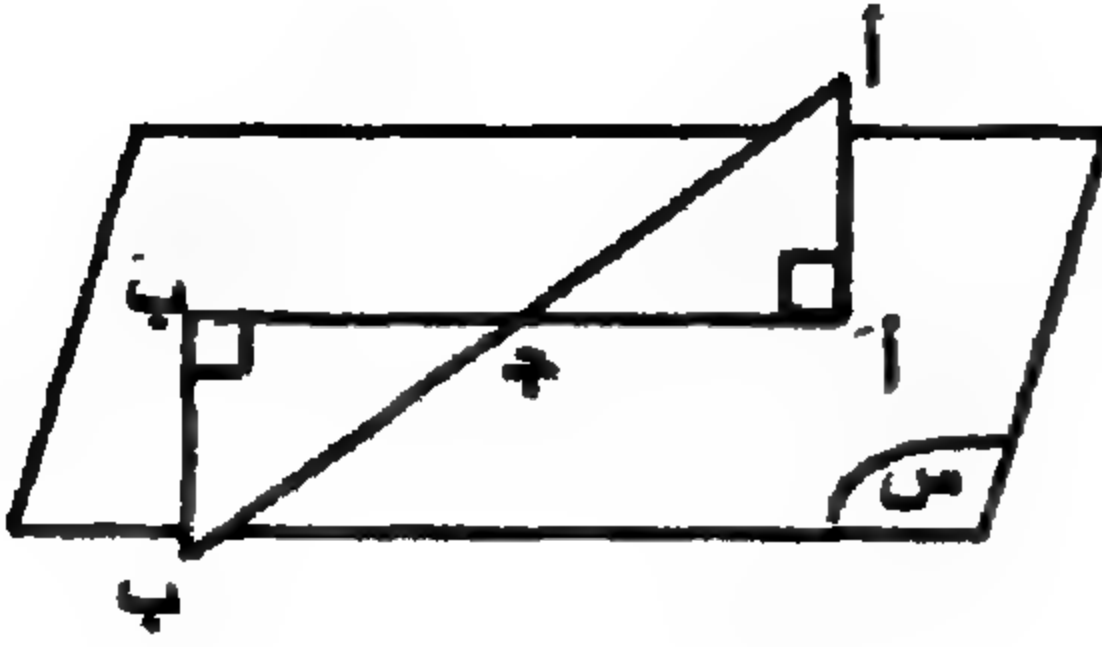


(٢) إذا كانت $AB \perp$ المستوى S ، $A'B'$ هو مسقط AB

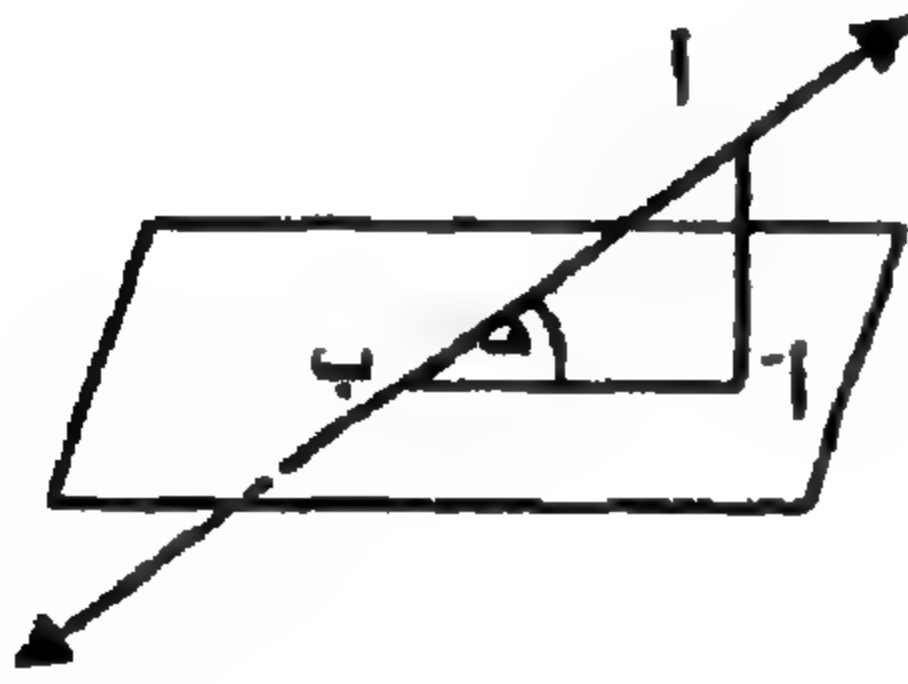
على المستوى S فإن : $A'B'$ مسقط AB على المستوى S



(٣) إذا كانت $\overline{AB} \perp$ المستوي S فإن :
مسقط \overline{AB} على المستوي هو النقطة A'



(٤) إذا كانت $\overline{AB} \cap S = \{ج\}$
فإن A' مسقط \overline{AB} يمر بالنقطة $ج$
حيث $A'ج$ مسقط $Aج$ على S
 $جب$ مسقط $جب$ على S
 $\therefore A'جب$ مسقط $Aجب$ على S



الزاوية بين مستقيم ومستوي :-

هي الزاوية المحصورة بين المستقيمين
ومسقطه على ذلك المستوي .

ويطلق عليها زاوية ميل المستقيم على المستوي .

من الرسم : $A'ب$ مسقط $أب$ على S

- $\angle A'ب$ هي الزاوية المحصورة بين $أب$ ، S حيث $ق (A'ب) = هـ$ تسمى زاوية ميل

المستقيم على المستوي S

$$، جتا هـ = \frac{A'ب}{أب} \leftarrow A'ب = أب جتا هـ$$

\therefore طول المسقط = طول المستقيم \times جتا زاوية ميلها على المستوي .

ملاحظة :

يوجد تناسب عكس بين المستقيم ومسقطه على المستوي حيث تزايد أو تناقص هـ فتنقص أو تزايد

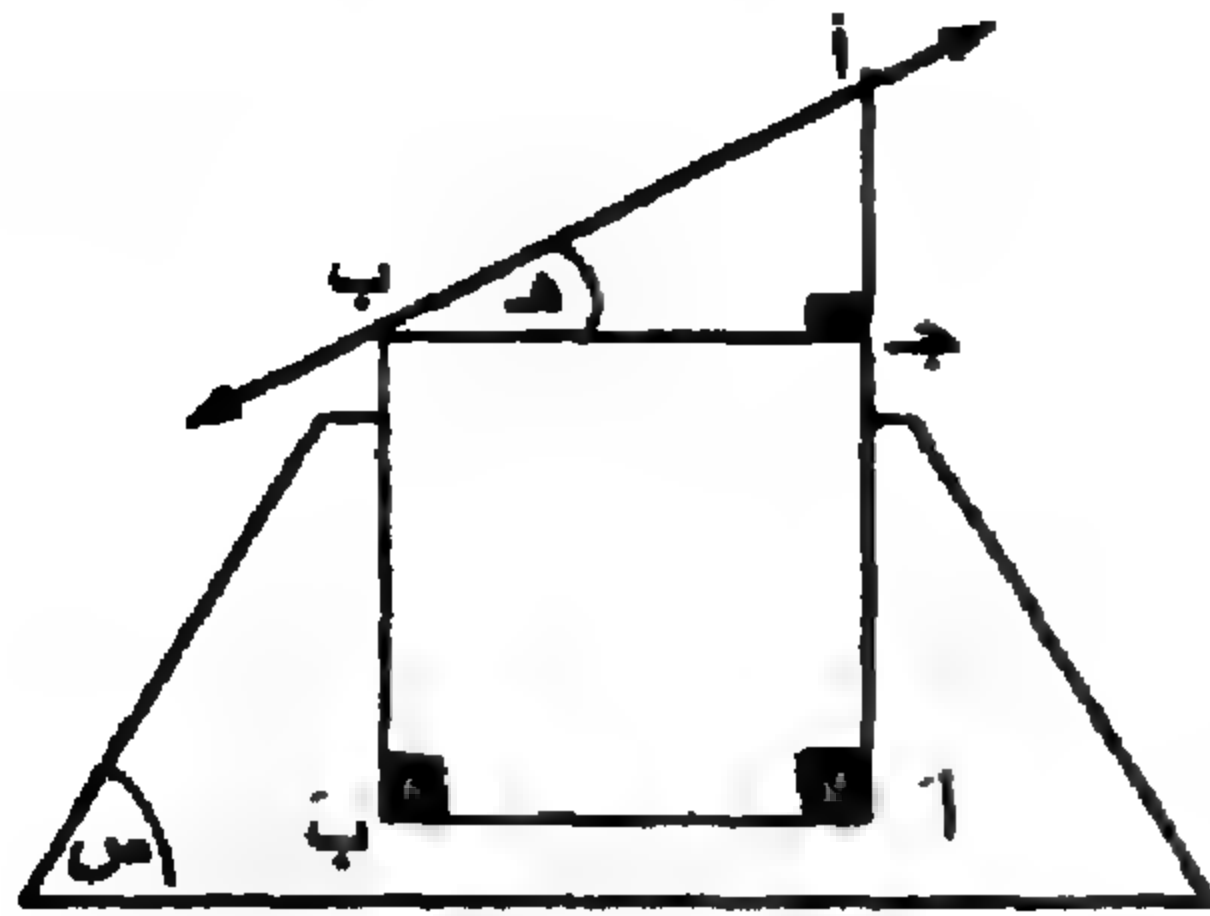
(على الترتيب) طول القطعة التي هي مسقط على S حيث : $هـ \in [0, 90]$

فعندما هـ = صفر $\leftarrow A'ب = أب$ (المستقيم يوازي المستوي)

وعندما هـ = 90 $\leftarrow A'ب = صفر$ (المستقيم عمودي على المستوي)

وعندما 0 < هـ < 90 $\leftarrow A'ب < أب$

∴ طول مسقط القطعة المستقيمة على مستوي يكون أصغر من أو يساوي طول هذه القطعة المستقيمة .



والأشكال الآتية توضح ذلك :-

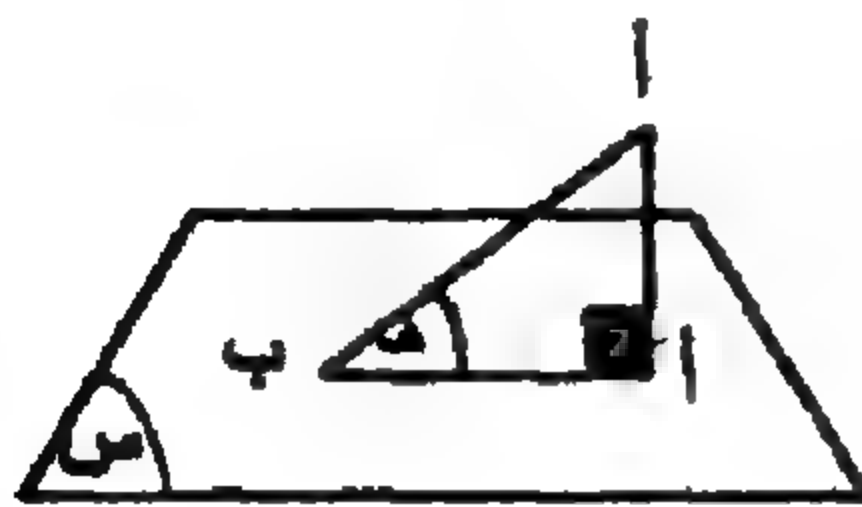
(١) إذا لم تشترك القطعة المستقيمة AB مع

المستوي S في أي نقطة فإن مسقط

AB على المستوي S هو A'B'

، نرسم B'B // A'A ويقطع A'A في جـ ،

∴ B'B = B'A' ، ∠ A'B'B هي زاوية ميل AB على المستوي S ، B'B > B'A'

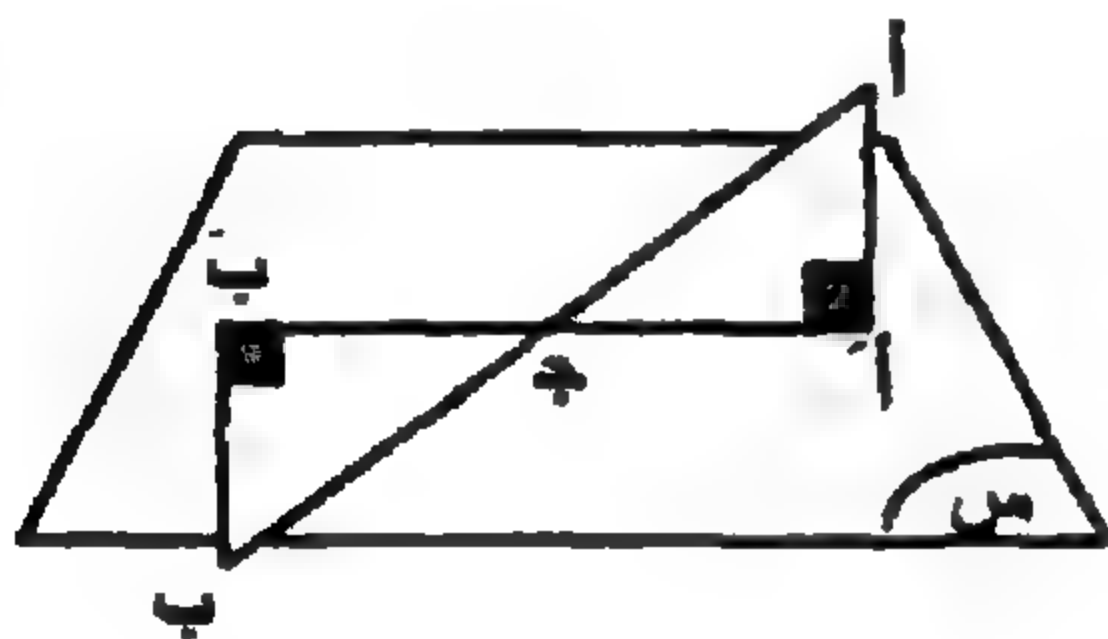


(٢) إذا اشتركت القطعة المستقيمة AB

مع المستوي S في نقطة B .

∴ ∠ A'B'B هي زاوية ميل AB على

المستوي S ، A'B > A'B'



(٣) إذا قطعت القطعة المستقيمة AB المستوي

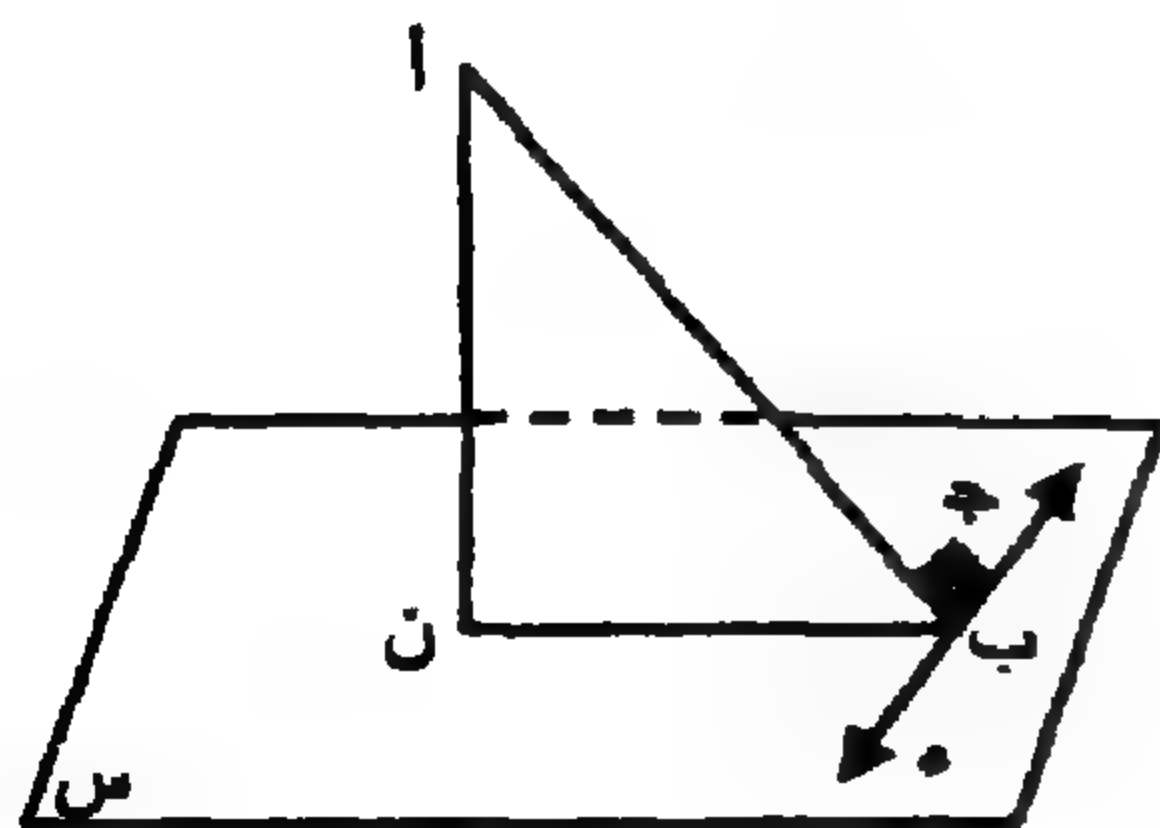
S في نقطة جـ فتكون A'جـ هي زاوية

ميل AB على المستوي S.

نظرية :

«إذا رسم مستقيم مائل على مستو وكان عموديا على مستقيم في المستوي فإن مسقطه على

المستوي يكون عموديا على مستقيم المستوي .



معطيات : AB مائل على S ، AB ⊥ جـ جـ : جـ جـ = S
، AN ⊥ S .

المطلوب : BN مسقط AB على S يكون عموديا على جـ جـ

البرهان : ∵ AN ⊥ S ، AN ⊥ جـ جـ أي جـ جـ ⊥ AN

∴ جـ جـ ⊥ AB ∵ AB ⊥ المستوي ABN

∴ جـ جـ ⊥ BN أي BN مسقط AB ⊥ جـ جـ

المربع بحيث كان م ن = ١٠ سم - أثبت أن ن ه \perp ا ب ، و طول ا ن .

العمل : نرسم م ه

البرهان : \therefore م مركز المربع ، ه منتصف ا ب

\therefore م ه \perp ا ب

\therefore ن ه مائلة على المستوي ا ب ج ه مسقطها م ه \perp ا ب

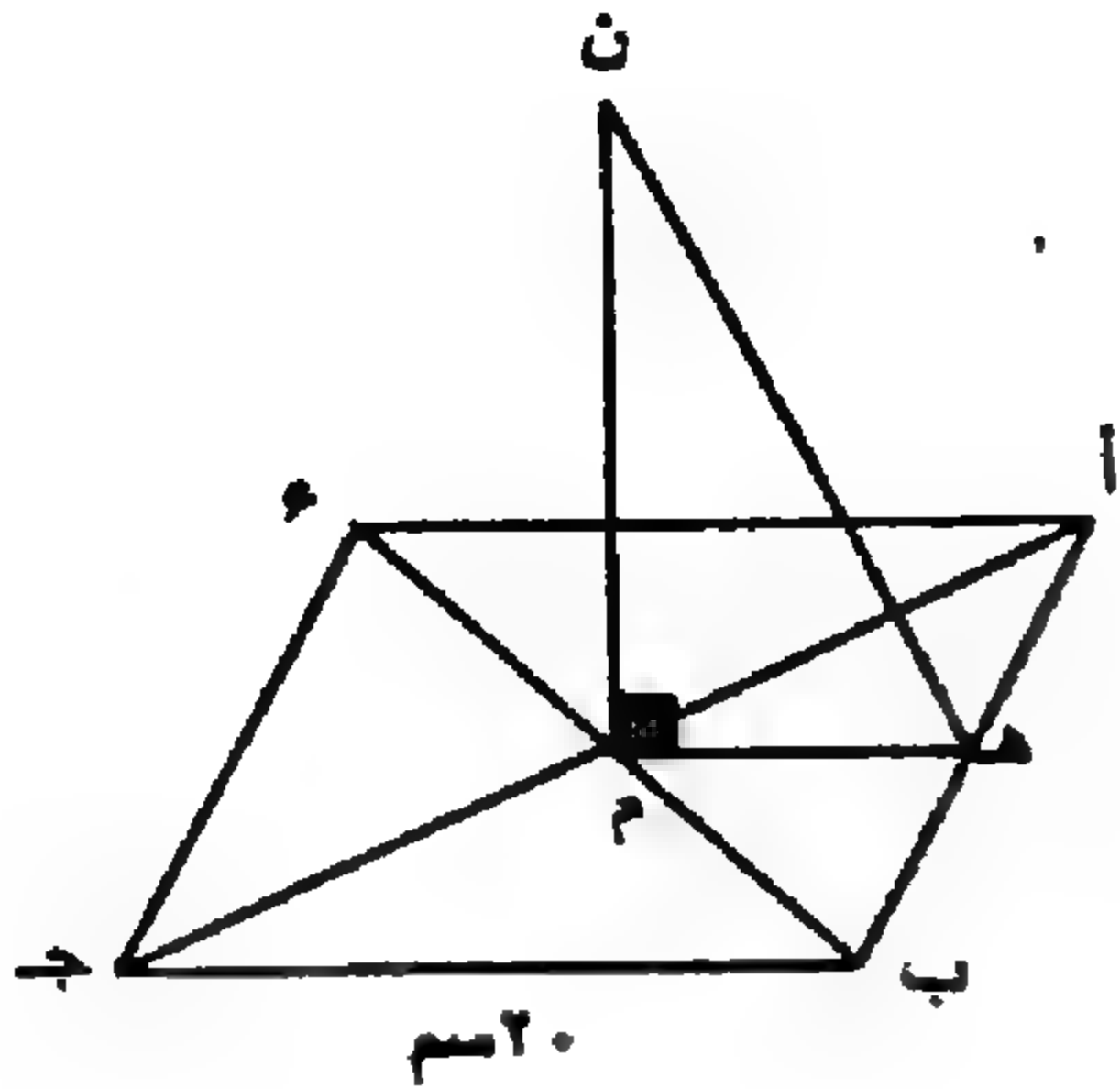
\therefore ن ه \perp ا ب (عكس نظرية ٤)

\therefore (ا ج) = (ا ب) + (ب ج) \therefore ا ج = $2\sqrt{2}$ سم

\therefore ا م = $\frac{1}{2}$ ا ج = $\sqrt{2}$ سم

\therefore ن م \perp ا م

\therefore ن ا = ٢٠ سم



مثال: ا ب ج مثلث قائم الزاوية في ا ، ا ب = ٣ سم ، ا ج = ٤ سم - رسم ا ه \perp المستوي ا ب

ج حيث ا ه = ١ سم ثم فرضت ه د ب ج حيث ب ه = ١,٨ سم - أثبت أن ه د \perp ب ج

واحسب طول ا ه .

العمل : نرسم ا ه

البرهان : \therefore ق (ب ا ج) = 90° ، \therefore ب ج = ٥ سم

\therefore ب ه \times ب ج = ٥ \times ١,٨ = ٩ ، (ا ب) = ٩

\therefore (ا ب) = ب ه - ب ج

\therefore $\frac{ا ب}{ب ه} = \frac{ب ج}{ا ب}$ ، > ب مشتركة

\therefore Δ ب ا ج \approx Δ ب ه ا

\therefore ق (> ب ه ا) = ق (ب ا ج)

\therefore ه ه مائلة على المستوي ا ب ج

\therefore مسقطها ا ه \perp ب ج

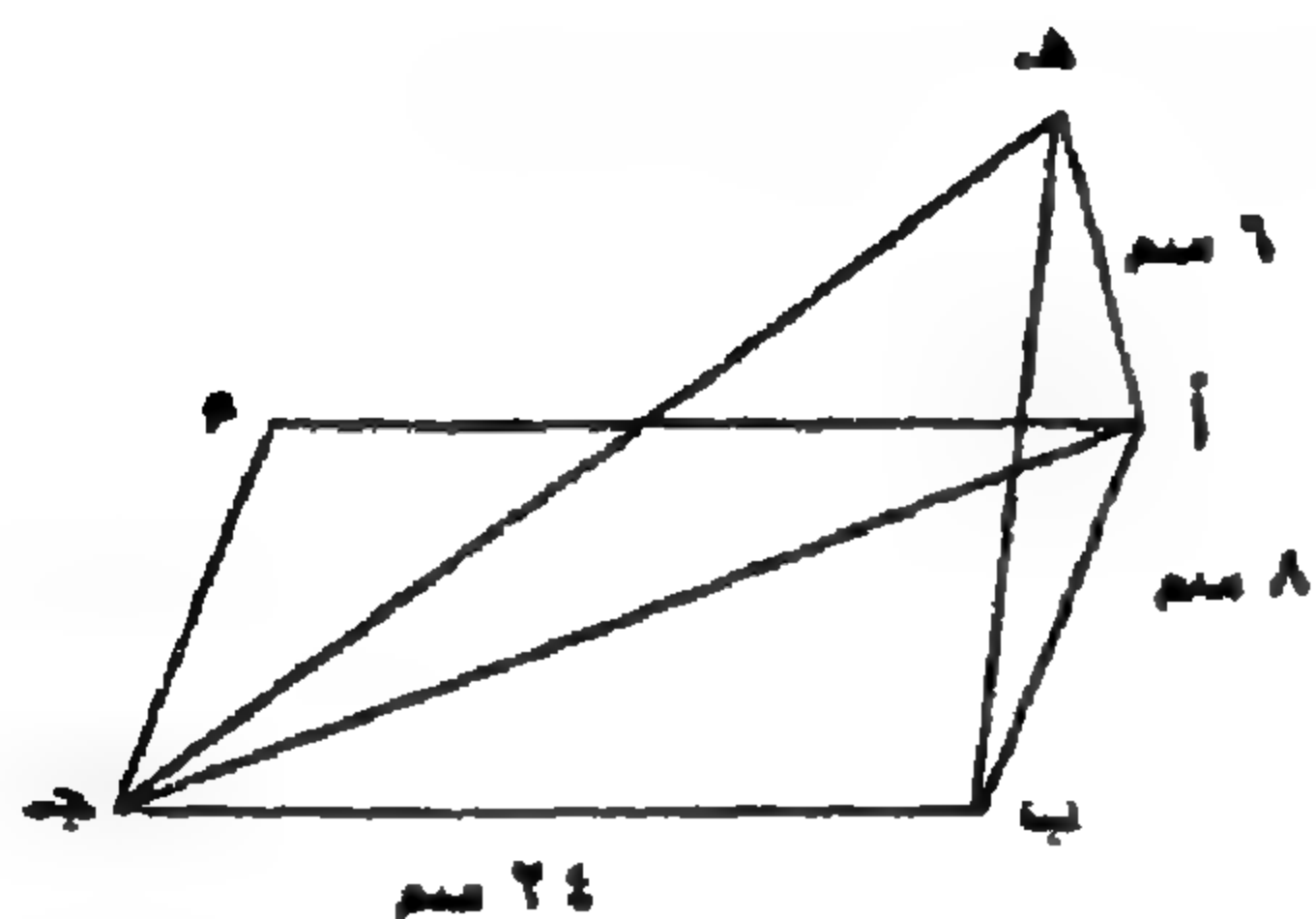
\therefore ه د \perp ب ج ، ج ه = ٢,٢ سم ، ا ه = ٢,٤ سم ، ه ه = ٢,٦ سم

مثال: ا ب ج ه مستطيل فيه ا ب = ٨ سم ، ب ج = ٢٤ سم رسم من ا العمود ا ه على

مستوي المستطيل بحيث $أه = ٦$ سم. احسب أولاً : مساحة سطح $\Delta ج ه ب$ ثانياً : طول $ه ج$

البرهان

$\overleftrightarrow{ه ب}$ مائل على المستوي $أ ب ج ه$ ، مسقطه $\overleftrightarrow{أ ب} \perp \overleftrightarrow{ب ج}$ الواقع في المستوي $أ ب ج ه$.
 \therefore المائل $\overleftrightarrow{ه ب} \perp \overleftrightarrow{ب ج}$ أي أن $ق (> ه ب ج) = ٩٠^\circ$



$\therefore \Delta أ ب ه$ قائم الزاوية في $أ$

$$\therefore (ب ه) = (أ ب) + (أ ه) = ٦٤ + ٣٦ = ١٠٠$$

$$\therefore ب ه = ١٠ \text{ سم}$$

$\therefore \Delta ج ه ب$ قائم الزاوية في $ب$

$$\therefore \text{مساحة سطح } \Delta ج ه ب = \frac{١}{٢} ب ج \times ه ب$$

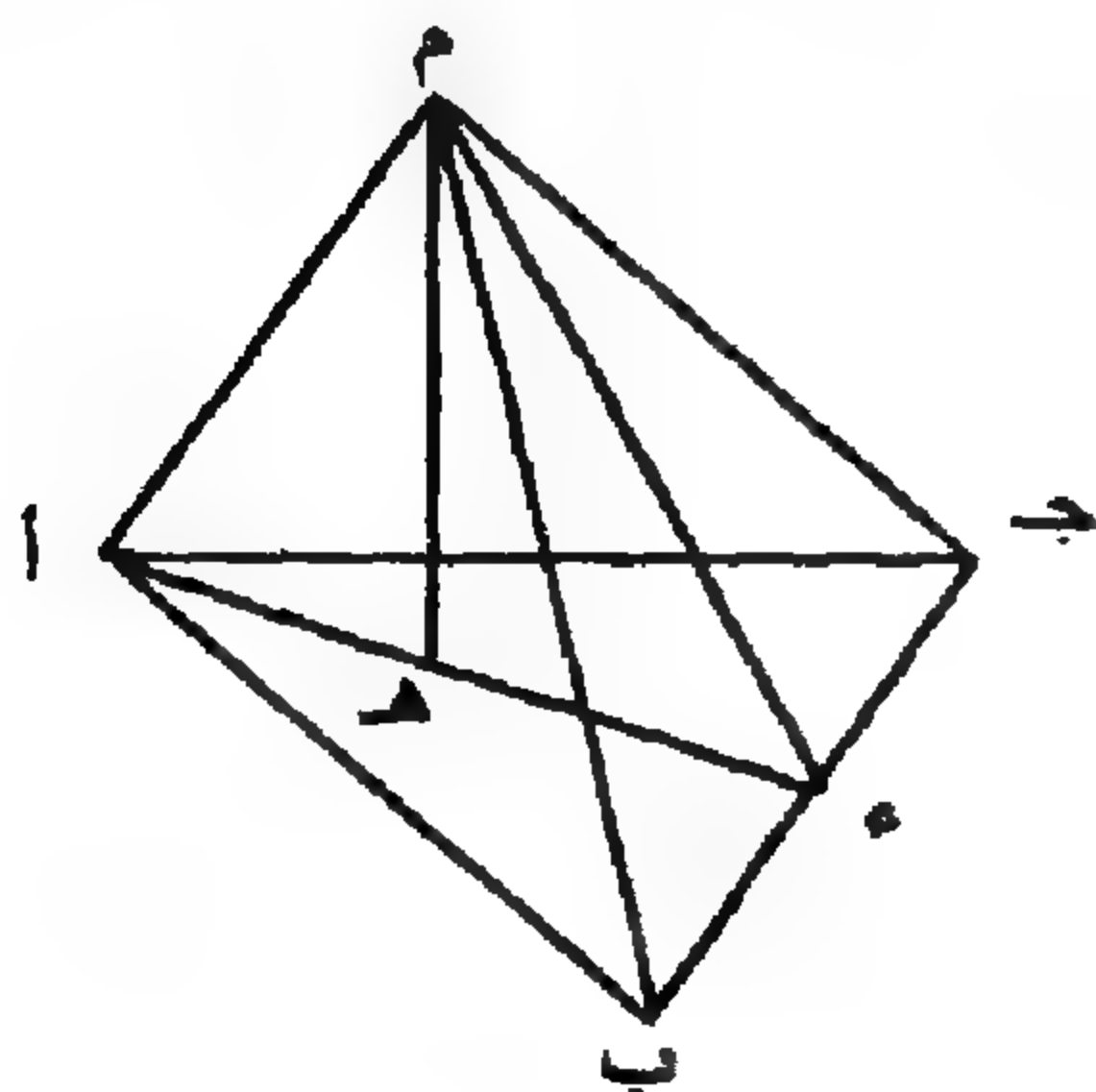
$$= \frac{١}{٢} \times ٢٤ \times ١٠ = ١٢٠ \text{ سم}^2$$

$$\therefore (ه ج) = (ه ب) + (ب ج) = ١٠٠ + ٥٧٦ = ٦٧٦$$

$$\therefore ه ج = ٢٦ \text{ سم}$$

مثال: $\overline{م أ}$ ، $\overline{م ب}$ ، $\overline{م ج}$ ثلاث قطع مستقيمة غير مستوية ومتعامدة متشعبة من $م$ رسمت $\overline{م ه} \perp$ المستوي $أ ب ج$ تقابله في $ه$ فإذا قطع $\overline{أ ه}$ الضلع $\overline{ب ج}$ في $ه$ - أثبت أن $\overline{م أ} \perp$ المستوي $م ب ج$ وأن $\overline{م ه} \perp \overline{ب ج}$ ثم أثبت أن $(م ه) = (أ ه) = (ه ب)$

البرهان



$$\therefore \overline{م أ} \perp \text{كل من } \overline{م ب} ، \overline{م ج}$$

$$\therefore \overline{م أ} \perp \text{المستوي } م ب ج$$

$$\therefore \overline{م أ} \perp \text{أي مستقيم في المستوي } م ب ج$$

$$\therefore \overline{م أ} \perp \overline{ب ج}$$

$$\therefore \overline{م أ} \perp \overline{م ه} \quad \therefore \overline{م ه} \perp \text{المستوي } أ ب ج$$

$$\therefore \overline{م ه} \perp \overline{ب ج}$$

∴ $\overline{ب ج} \perp$ المستوى م أ هـ

∴ $\overline{ب ج} \perp \overline{أ هـ}$

∴ $\overline{ب ج} \perp$ كل من م أ ، م هـ

∴ $\overline{ب ج} \perp \overline{أ هـ}$

∴ $\overline{ب ج}$ عمودي على كل من م أ ، م هـ

∴ $\overline{ب ج} \perp$ المستوى م أ هـ فيكون عموديا على مستقيم فيه

∴ $\overline{ب ج} \perp \overline{م هـ}$

∴ $\overline{م هـ} \perp$ المستوى ا ب ج

∴ $\overline{م هـ} \perp \overline{م هـ}$

حيث أن Δ م أ هـ فيه $\angle (م أ هـ) = 90^\circ$ ، $\overline{م هـ} \perp \overline{أ هـ}$

∴ $\angle (م هـ) = \angle (أ هـ) = 90^\circ$

مثال : من مستوى ، م نقطة ل ، رسمت م ن عمودية على المستوى من وتقابله في ن ثم

رسم المستقيمان ن ل ، ل ع في المستوى من بحيث $\angle (ن ل ع) = 90^\circ$ ثم رسم م ل ،

ل ع فإذا كان م ن = ٣ سم ، ن ل = ٤ سم ، ل ع = ١٢ سم فاحسب طول م ع .

الحل

∴ م ن \perp المستوى من

∴ ن ل هو مسقط م ل على من مستقيمان ن ل \perp ل ع

∴ م ل \perp ل ع

في Δ م ن ل :

$$م ل = \sqrt{١٦ + ٩} = ٥ \text{ سم}$$

في Δ م ل ع : $\angle (م ل ع) + \angle (ل م ع) = \angle (ل ع م)$

$$\angle (م ل ع) = \angle (ل ع م) - \angle (ل م ع) = 90^\circ - \angle (ل م ع)$$

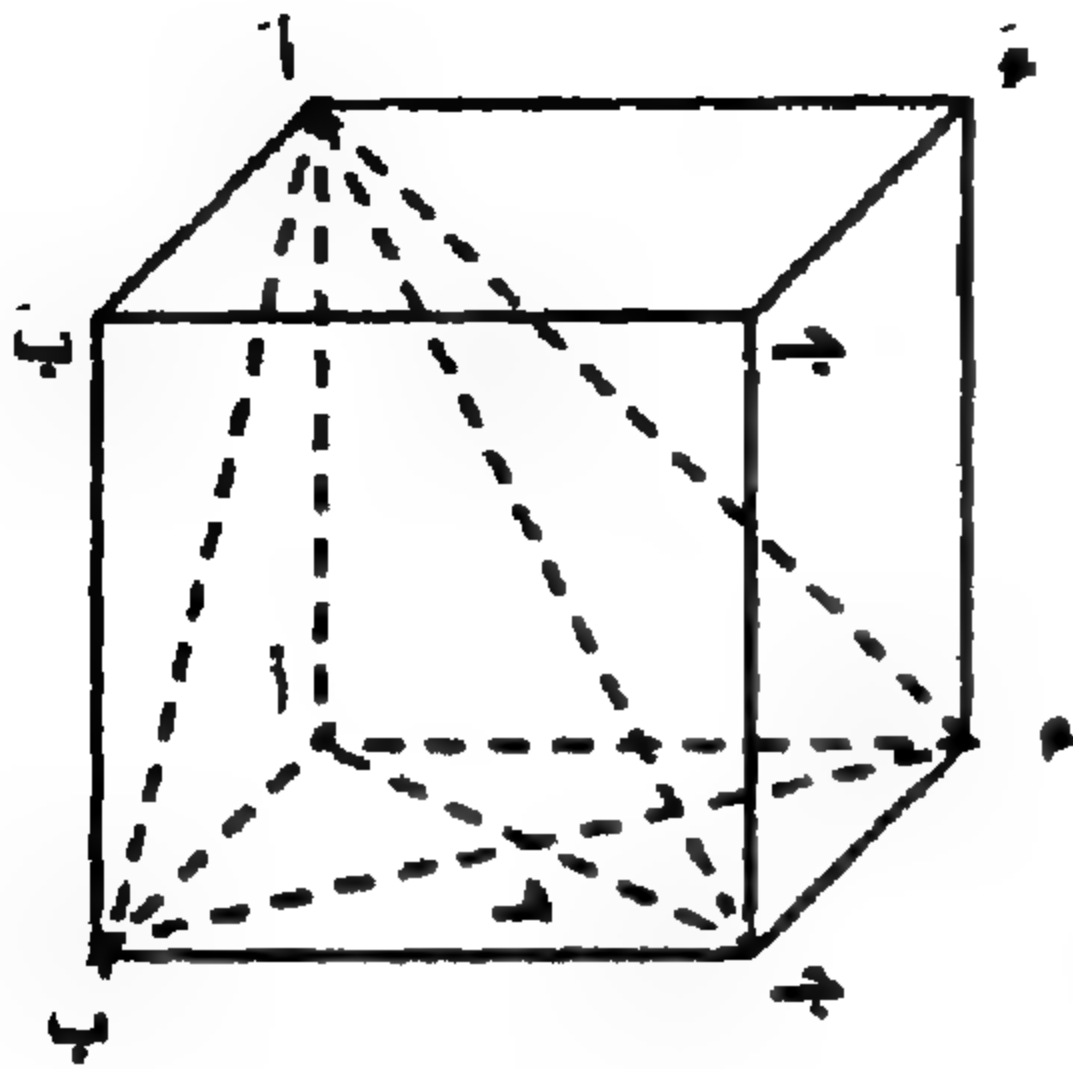
:

مثال : ا ب ج د أ ب ج د مكعب رسمت أ ب ، أ ج ، أ د - أثبت أن :

(١) كل من Δ أ ب ج ، Δ أ ج د قائم الزاوية وأنهما متطابقان .

(٢) $\overline{أ ج} \perp \overline{ب د}$

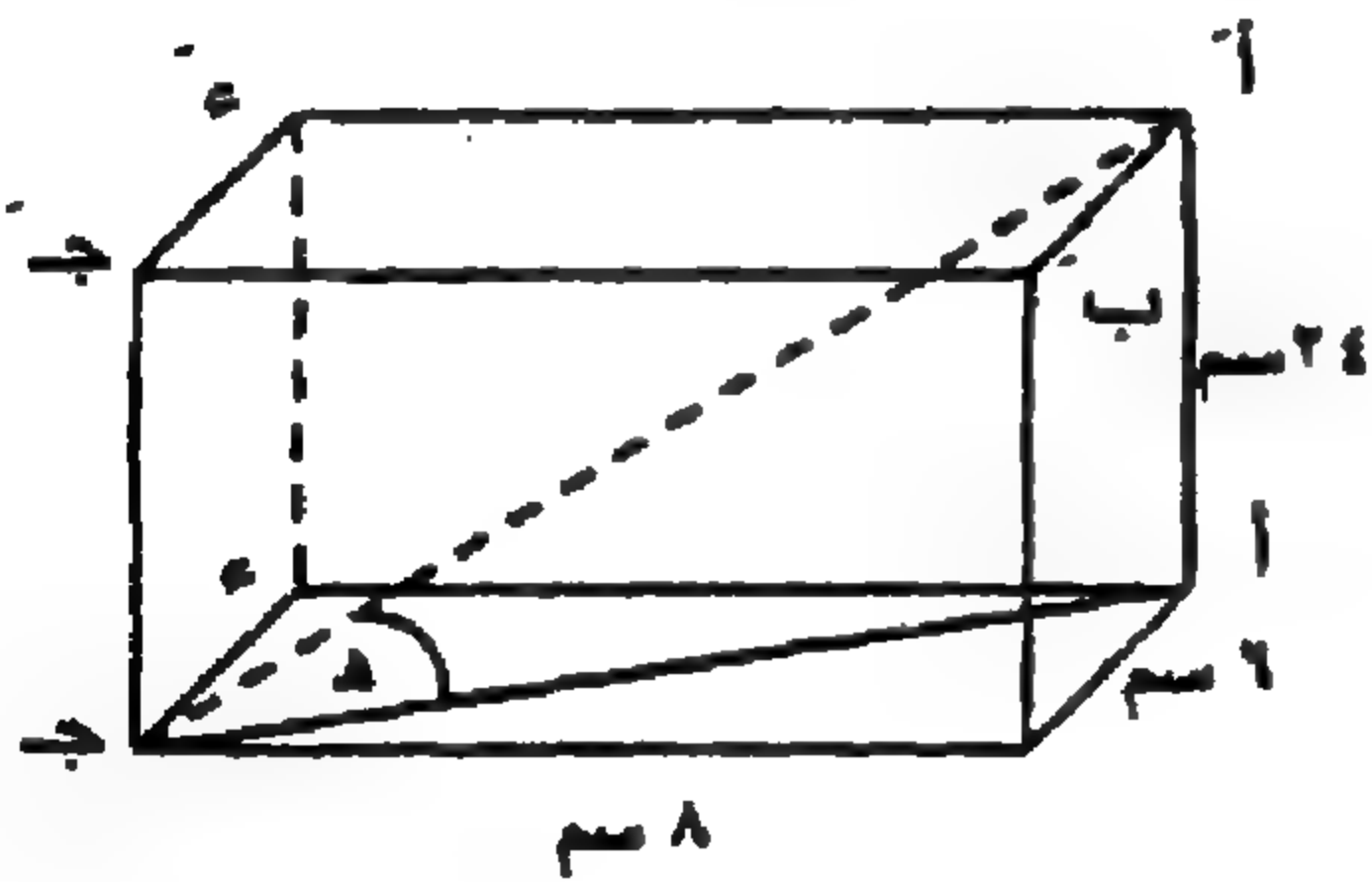
الحل



$\therefore \vec{AA'} \perp$ مستوي المربع $ABCD$
 $\therefore AB$ مسقط AA' على المستوي $ABCD$
 $\therefore AB \perp BC$ $\therefore \vec{AB} \perp \vec{BC}$
 $\therefore \Delta ABC$ قائم الزاوية في B
 بالمثل : AA' مسقط AA' على المستوي $ABCD$
 $AA' \perp AD$ $\therefore \vec{AA'} \perp \vec{AD}$
 $\therefore AA'$ قائم الزاوية في A ، $\Delta A'AD \equiv \Delta ABC$
 $\therefore \vec{AA'} \perp$ المستوي $ABCD$ ، AA' مسقط AA' عليه
 $\therefore AC \perp AB$ (قطران في المربع $ABCD$)
 $\therefore \vec{AC} \perp \vec{AB}$

مثال: $ABCD$ متوازي مستطيلات فيه $AB = 6$ سم ، $BC = 8$ سم ، $AA' = 24$ سم
 - احسب طول القطر AC ثم اوجد قياس زاوية ميل AA' على المستوي $ABCD$.

الحل



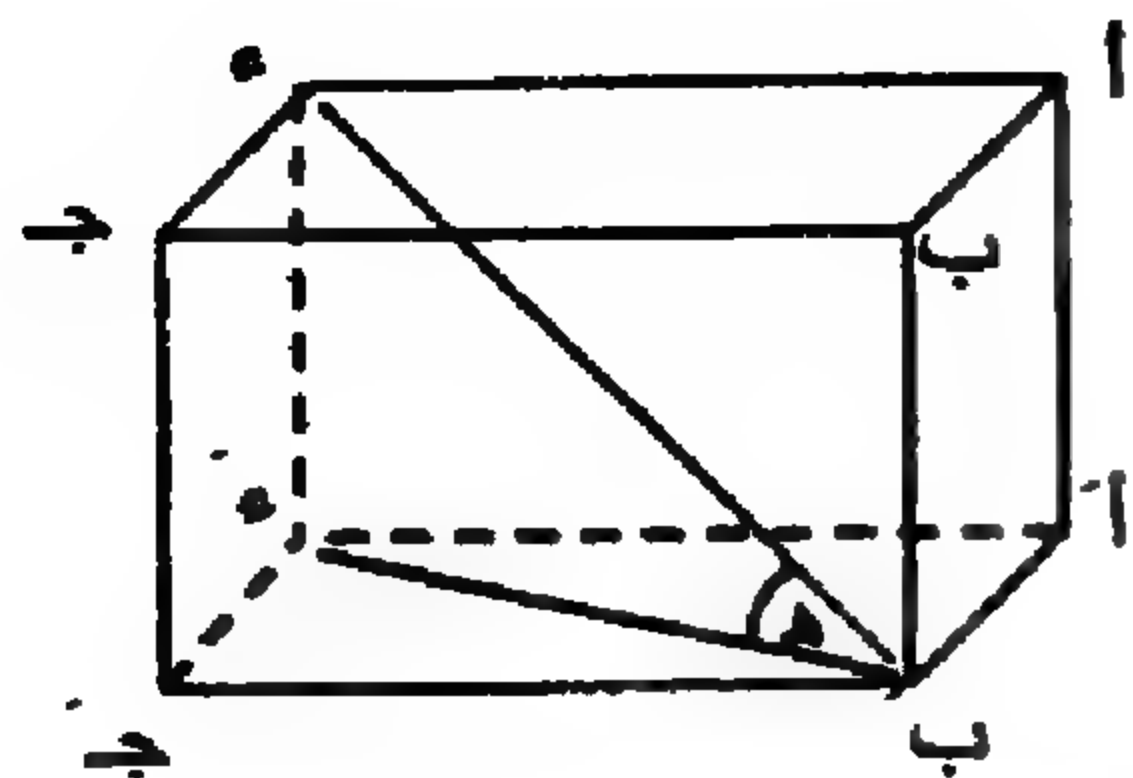
AA' هي مسقط AA' على المستوي $ABCD$
 $\therefore \vec{AA'} \perp$ المستوي $ABCD$ \therefore مسقط AA' هو C
 $\therefore AC$ هو مسقط AA' على المستوي $ABCD$
 في ΔABC $\therefore \angle C = 90^\circ$
 $\therefore AC^2 = AB^2 + BC^2 = 6^2 + 8^2 = 100$
 $\therefore AC = 10$ سم ، $AA' \perp AC$
 $\therefore \angle A'AC = 90^\circ$
 $\therefore \angle A'AC = 90^\circ = \angle A'AC + \angle CAC = 90^\circ + \angle CAC$
 $\therefore \angle CAC = 0^\circ$
 $\therefore \angle CAC = 0^\circ$

$$\frac{10}{26} = \frac{AC}{AA'}$$

$\therefore \angle CAC$ هي زاوية ميل AA' على المستوي $ABCD$
 في $\Delta A'AC$ $\therefore \angle CAC = 90^\circ$ $\therefore \angle CAC = 90^\circ$
 $\therefore \angle CAC = 90^\circ$

مثال: أ ب ج د ع أ ب ج د ع مكعب طول ضلعه ل . برهن أن جيب تمام الزاوية التي يميل بها قطر المكعب على الوجه الذي تقع فيه $\frac{\sqrt{6}}{3}$

الحل



المطلوب : إثبات أن جتا هـ $\frac{\sqrt{6}}{3}$

∴ Δ هـ ب قائم الزاوية في هـ

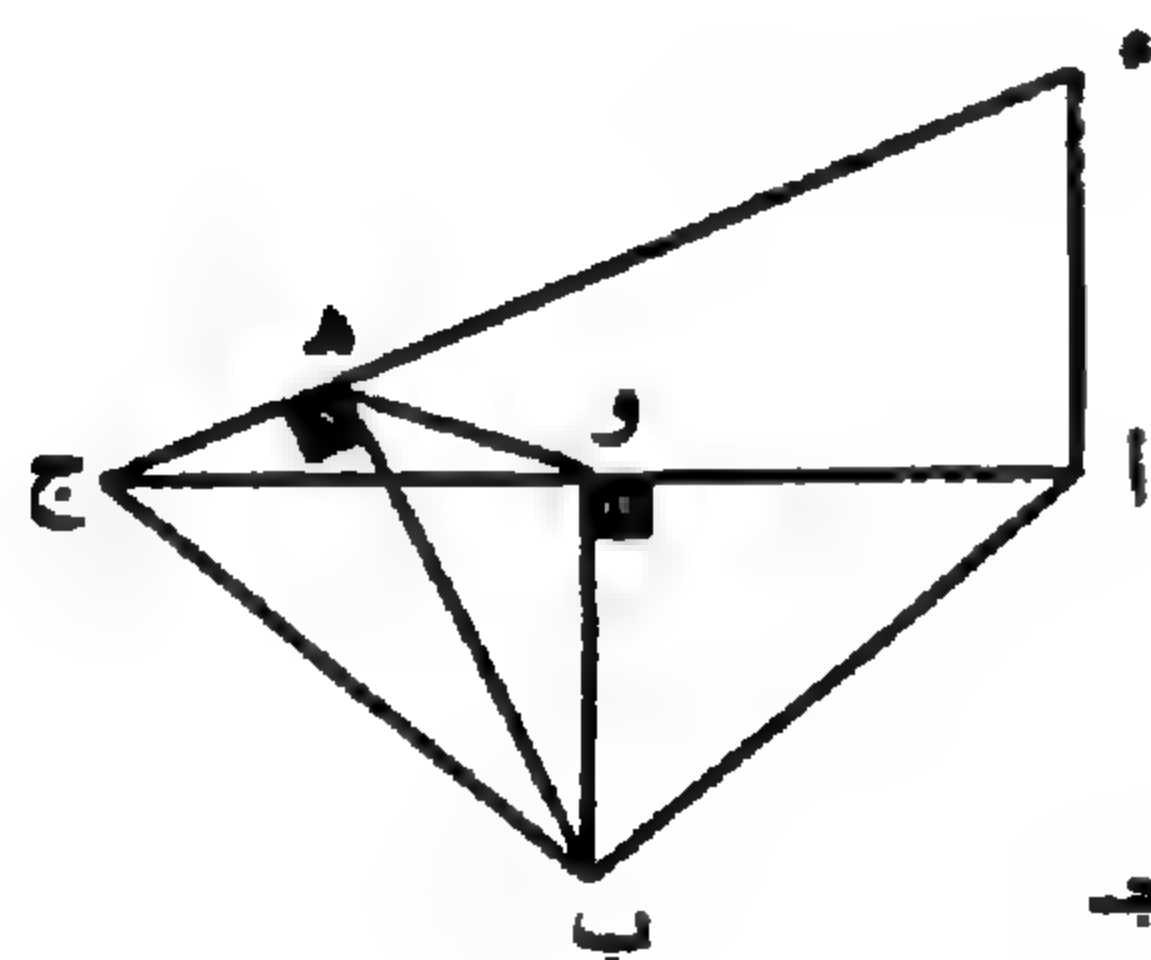
∴ زاوية ميل القطر هـ ب على القاعدة هي هـ

$$\therefore \text{جتا هـ} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ ب}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

مثال: أ ب ج د متساوي الأضلاع . رسم أ هـ ⊥ على مستو المثلث . ثم رسم ب و ⊥ أ ج ،

ب هـ ⊥ ع ج برهن أن : (١) ب و ⊥ لمستوي أ ع ج (٢) وهـ ⊥ ع ج

الحل



∴ أ هـ ⊥ المستوي أ ب ج

∴ أ هـ عمودي على أي مستقيم فيه

∴ أ هـ ⊥ ب و ولكن ب و ⊥ أ ج

∴ ب و ⊥ كلا من أ هـ ، أ ج

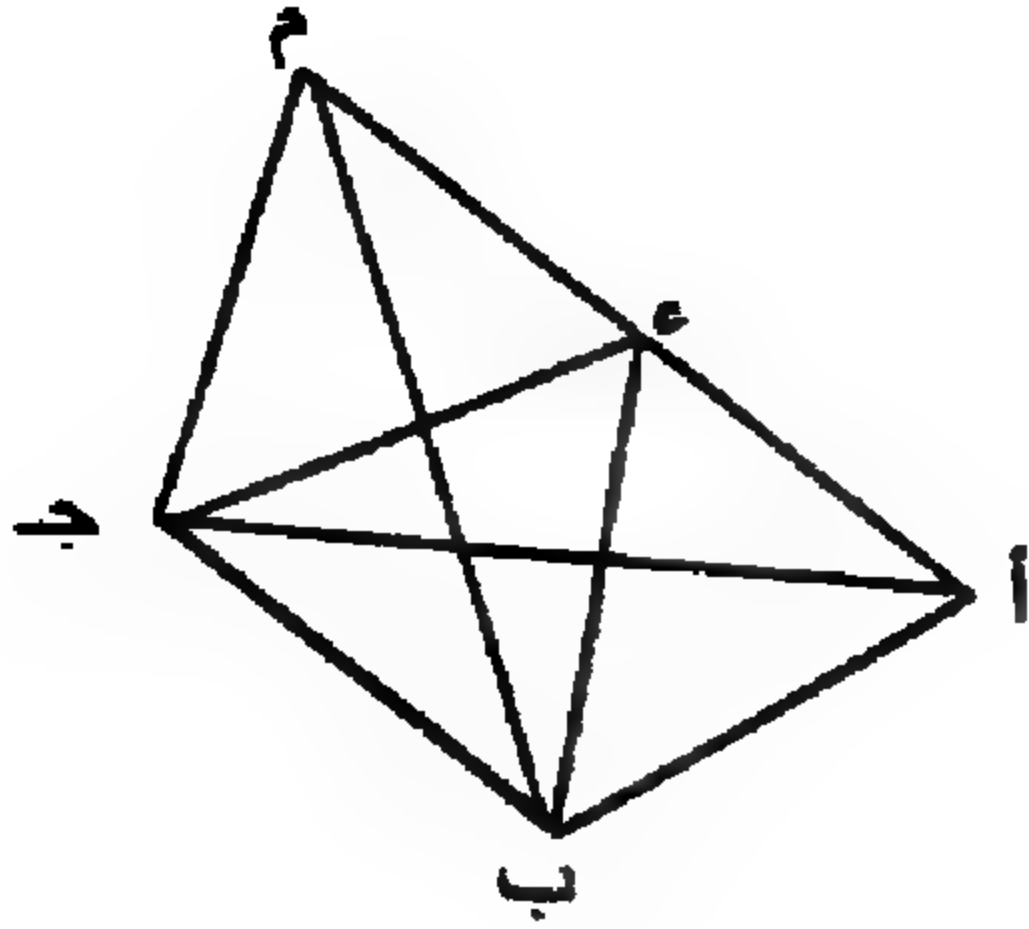
∴ ب و ⊥ المستوي أ ع ج

∴ ب و (المائل) ⊥ ع ج

∴ ب و ⊥ المستوي أ ع ج

∴ مستطو وهـ ⊥ ع ج

تمرين (٦)

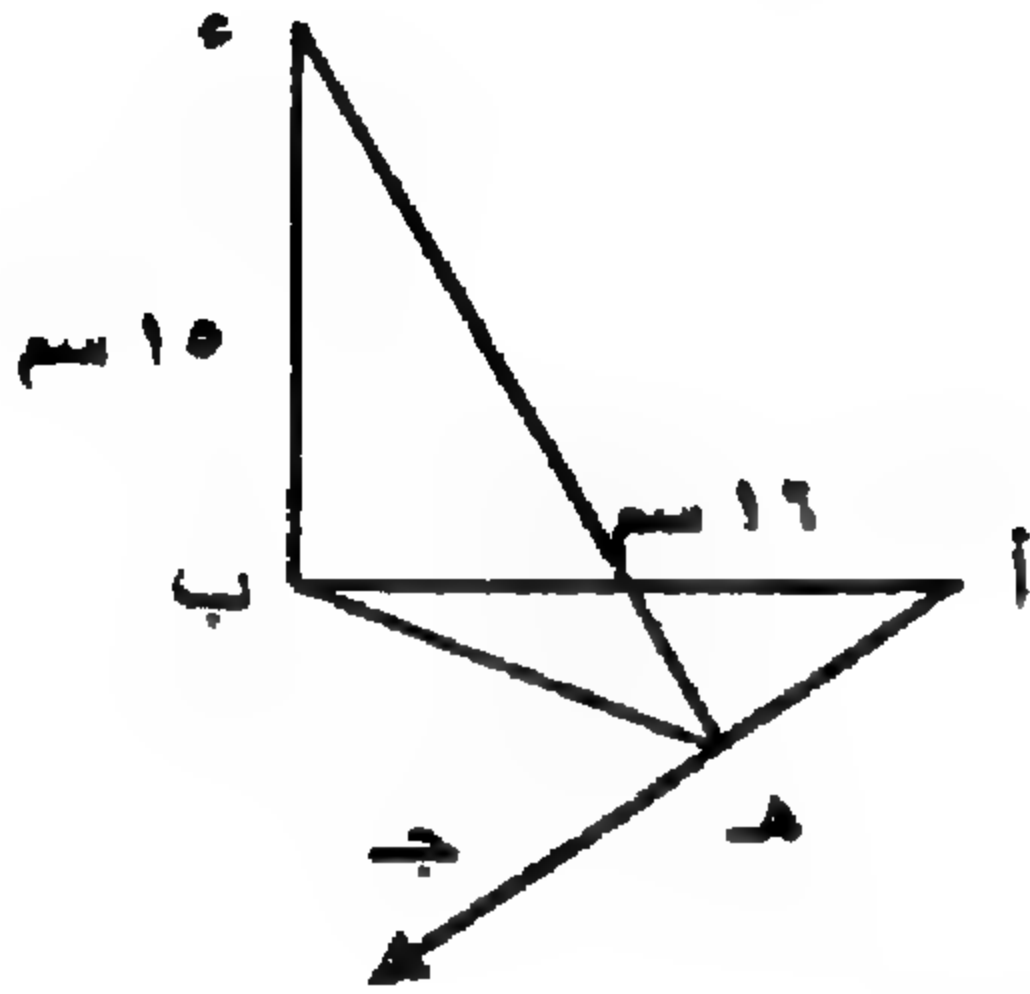


١- في الشكل المقابل:

المستوى AB جـ مثلث قائم الزاوية في B

، $\overrightarrow{CD} \perp$ المستوي AB جـ ، E منتصف AD

اثبت أن: $EB = EC$ جـ

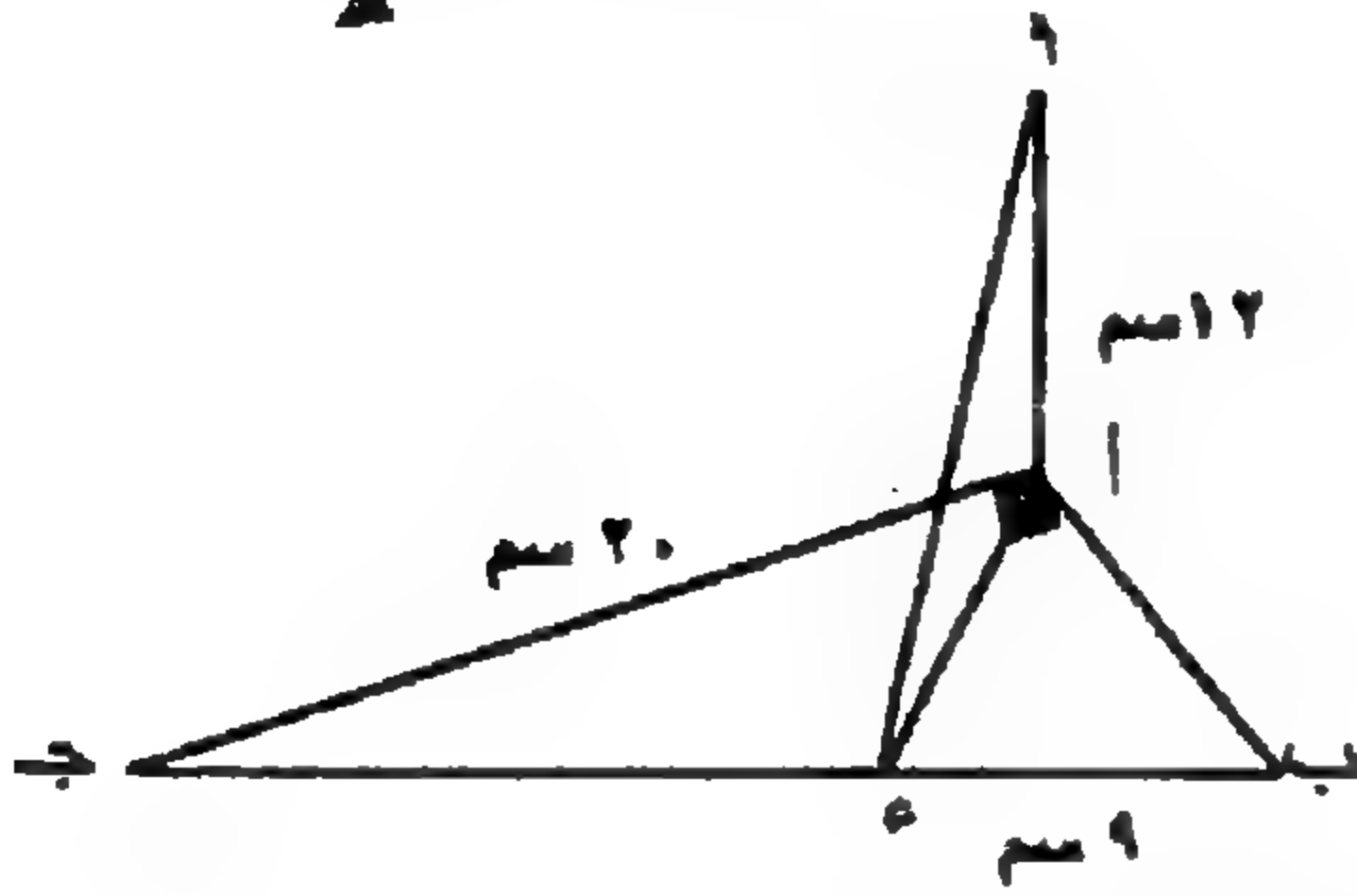


٢- في الشكل المقابل:

ق ($\angle BAC = 30^\circ$) ، $AB = 16$ سم

، $\overrightarrow{CD} \perp$ المستوي AB جـ ، E منتصف AD

فإذا كان $EB = 15$ سم - احسب EC .



٣- في الشكل المقابل:

AB جـ مثلث فيه $\angle A$ قائمة ، $AB = 15$ سم

، $AC = 20$ سم ، $\overrightarrow{CD} \perp$ مستوي المثلث ABC جـ

، E و B جـ بحيث $BE = 9$ سم .

اثبت أن:

$CE \perp$ AB جـ وأوجد قياس زاوية ميل CE على المستوي ABC جـ .

٤- AB جـ مثلث قائم الزاوية في A . رسم $AM \perp$ المستوي ABC جـ ، كان $AM = 6$ ، $AC = 3$ سم ،

رسم $ME \perp$ BC جـ ويقطعها في H ورسمت AH . فإذا كان $AB = 6$ سم ، $AC = 8$ سم

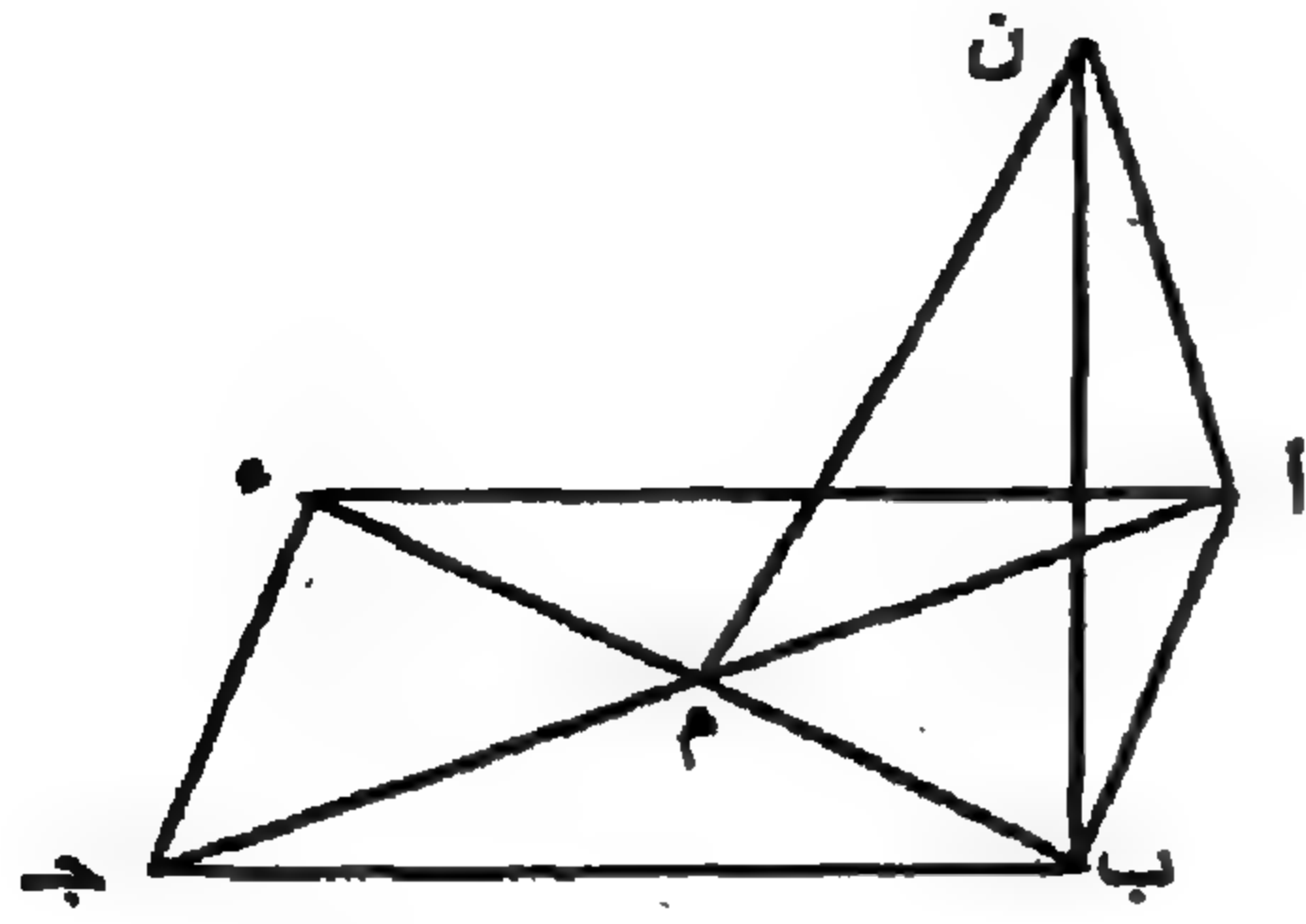
- فاحسب طول كل من AH ، ME .

٥- جـ ABC مثلث قائم الزاوية في C . رسم $CA \perp$ المستوي ABC جـ ، رسمت AE ، AH

وكانت مساحة سطح $\triangle AHE = 96$ سم^٢ ، $CE = 9$ سم ، $CH = 12$ سم .

- احسب طول AH .

- ٦- Δ ABC فيه $AB = AC$ ، $\angle C = 120^\circ$ - رسم $\vec{AA'} \perp \vec{BC}$ ويقطعها في E ، $AE = 10$ سم، ورسم $\vec{AM} \perp$ المستوي ABC فإذا كان $\angle AMB = 30^\circ$ - فاحسب كل من AM ، ME ، مساحة سطح ΔMBG .



٧- في الشكل المقابل:

Δ ABC مربع طول ضلعه 12 سم تقاطع قطراه في M رسم $\vec{AN} \perp$ مستوي المربع بحيث كان $AN = 5$ سم

(١) أثبت أن:

(أ) $\vec{BE} \perp$ المستوي ANM

(ب) $\vec{BN} \perp \vec{BC}$

(٢) أوجد طول \vec{BN}

- ٨- M ABC هرم ثلاثي M ، \vec{MA} ، \vec{MB} ، \vec{MC} متعامدة متني متني، M H \perp المستوي ABC ويقطعه في H وكان \vec{AH} يقطع \vec{BC} في نقطة E فثبت أن:

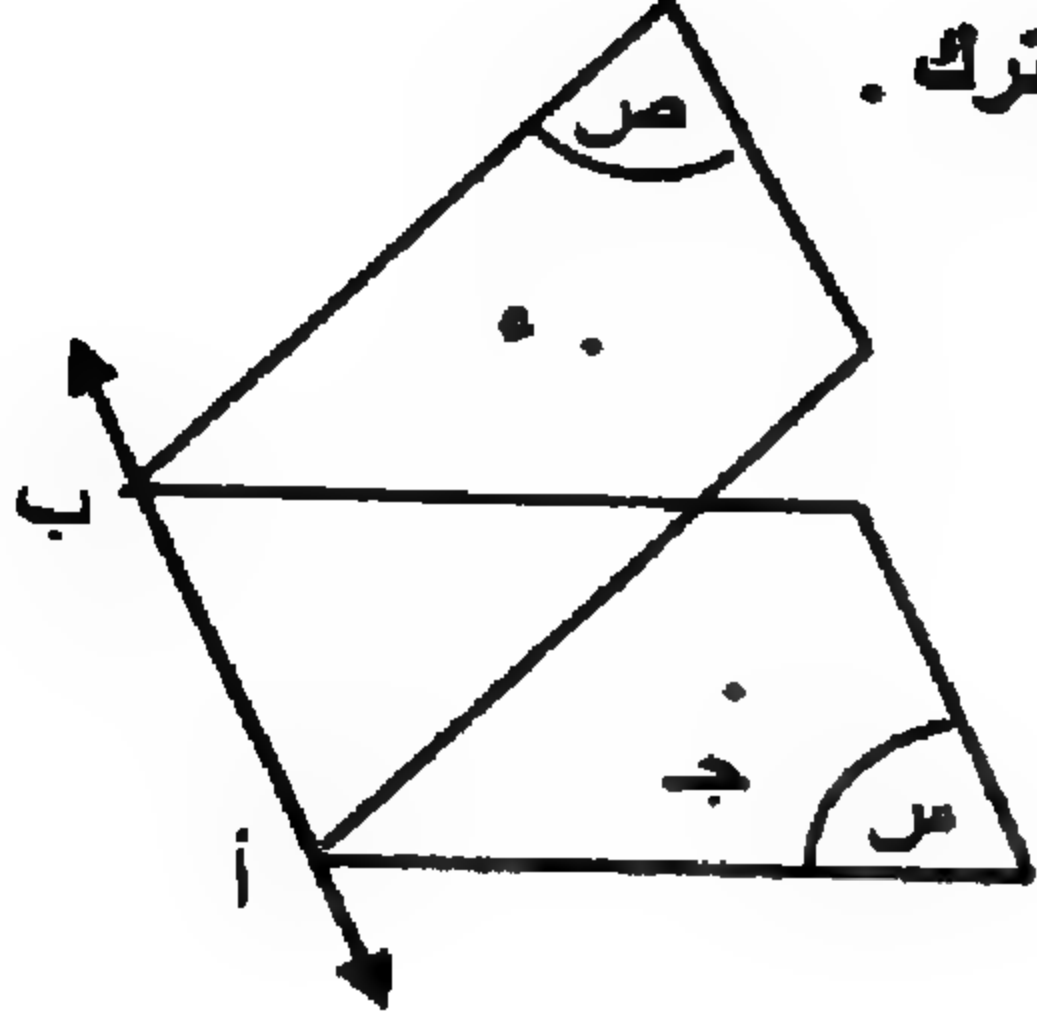
(أولاً) $\vec{MA} \perp$ المستوي MBH

(ثانياً) $\vec{ME} \perp \vec{BC}$

(ثالثاً) $(M, H) = 90^\circ$ $AE = HE$

الزاوية الزوجية

تعريف :



الزاوية الزوجية هي الناتجة من اتحاد نصفي مستويين لهما حد مشترك .

أ ب حد لنصفي المستويين س ، ص

∴ س ∩ أ ب ∩ ص يسمى زاوية زوجية .

حيث كل من س ، ص وجه للزاوية الزوجية

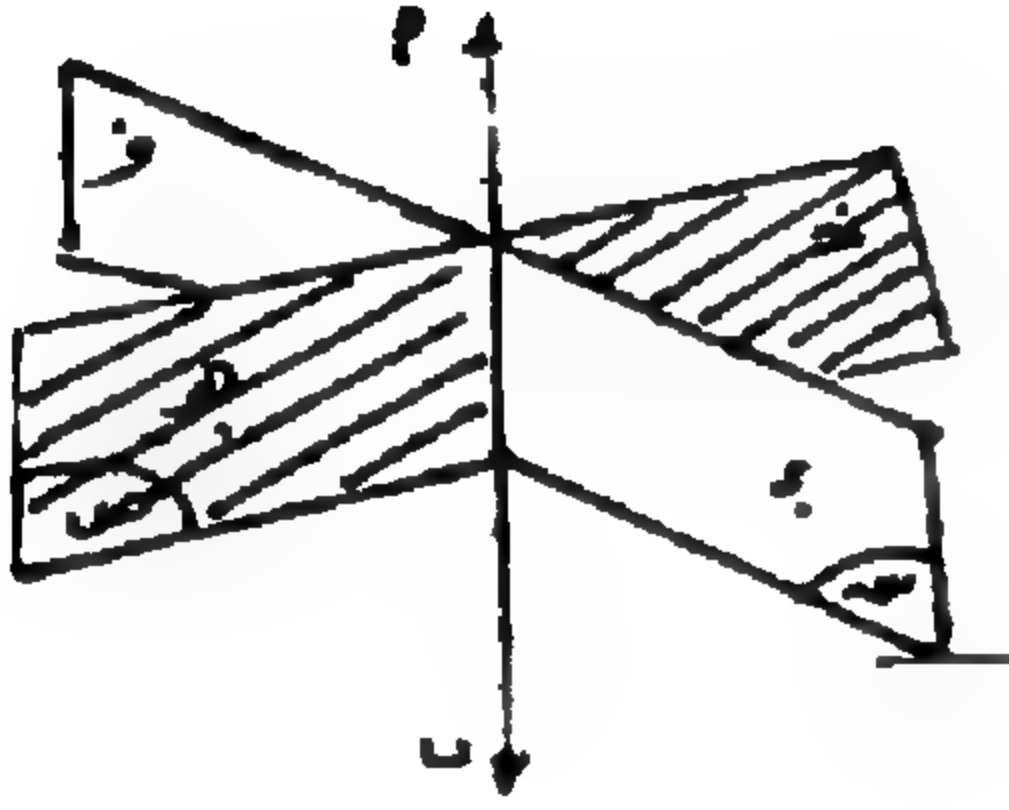
، أ ب يسمى حرف للزاوية الزوجية .

ويرمز للزاوية الزوجية بأحد الرموز الآتية :-

أ- الزاوية س - أ ب - ص

ب- الزاوية ج - أ ب - هـ

ج- الزاوية الزوجية التي حرفها أ ب



الزوايا الزوجية الناتجة عن تقاطع مستويين :-

إذا تقاطع مستويان س ، ص في المستقيم أ ب فبته ينشأ

عن تقاطعهما الزوايا الزوجية الآتية :-

(> ج - أ ب - هـ)

(> هـ - أ ب - د)

(> و - أ ب - د) ، (> ج - أ ب - و)

الزاوية المستوية للزاوية الزوجية (قياس الزاوية الزوجية) :-

نحدد نقطة علي حرف الزاوية الزوجية أ ب

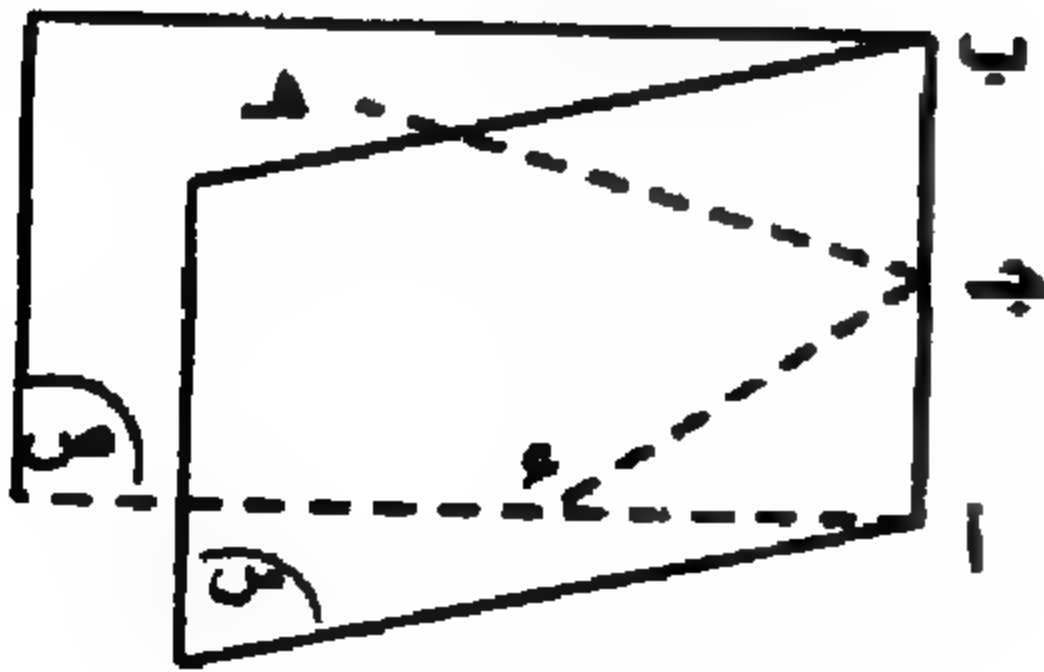
ونقيم منها عمودين علي الحرف أحدهما يقع في

المستوي الأول س والثاني يقع في المستوي الثاني

ص من ذلك يتحدد قياس الزاوية الزوجية بين

المستويين ففي الشكل المقابل :-

ج نقطة علي أ ب (حرف الزاوية)



جـ \perp أ ب في المستوي س ، جـ \perp أ ب في المستوي ص
 \therefore مقياس الزاوية الزوجية (الزاوية المستوية) بين المستويين س ، ص هي الزاوية \angle جـ هـ

تعريف : الزاوية المستوية لزاوية زوجية هي الزاوية الحادثة من تقاطع هذه الزاوية الزوجية مع أي مستوي عمودي على حرفها .

حقيقة : جميع الزوايا المستوية لزاوية زوجية تكون متساوية القياس .

تعريف : قياس الزاوية الزوجية هو قياس أي من زواياها المستوية .

ملاحظة : الزاوية الزوجية تكون حادة ، منفرجة ، مستقيمة ، قائمة ، إذا كانت زاويتها المستوية حادة ، منفرجة ، مستقيمة ، قائمة .

مثال : أ ب جـ ϵ مربع طول ضلعه ١٢ سم تقاطع قطراه في م . رسمت $\overline{أ ن}$ عمودية على مستوي المربع حيث أن $\sqrt{٦} = ٢$ سم - اثبت أن : $\overline{ب ع} \perp$ المستوي ن أ م .
 واوجد ق (\angle أ - ب - ن)

الحل

$\therefore \overline{أ ن} \perp$ مستوي المربع
 $\therefore \overline{أ ن} \perp \overline{ب ع}$
 ولكن $\overline{ب ع} \perp \overline{أ م}$ (لأن أ جـ ، ب ع قطر المربع)
 $\therefore \overline{ب ع} \perp$ كل من $\overline{أ ن}$ ، $\overline{أ م}$

$\therefore \overline{ب ع} \perp$ المستوي ن أ م
 $\therefore \overline{ب ع} \perp \overline{أ م}$
 $\therefore \angle$ ق (\angle أ م ن) = \angle ق (\angle أ - ب - ن)

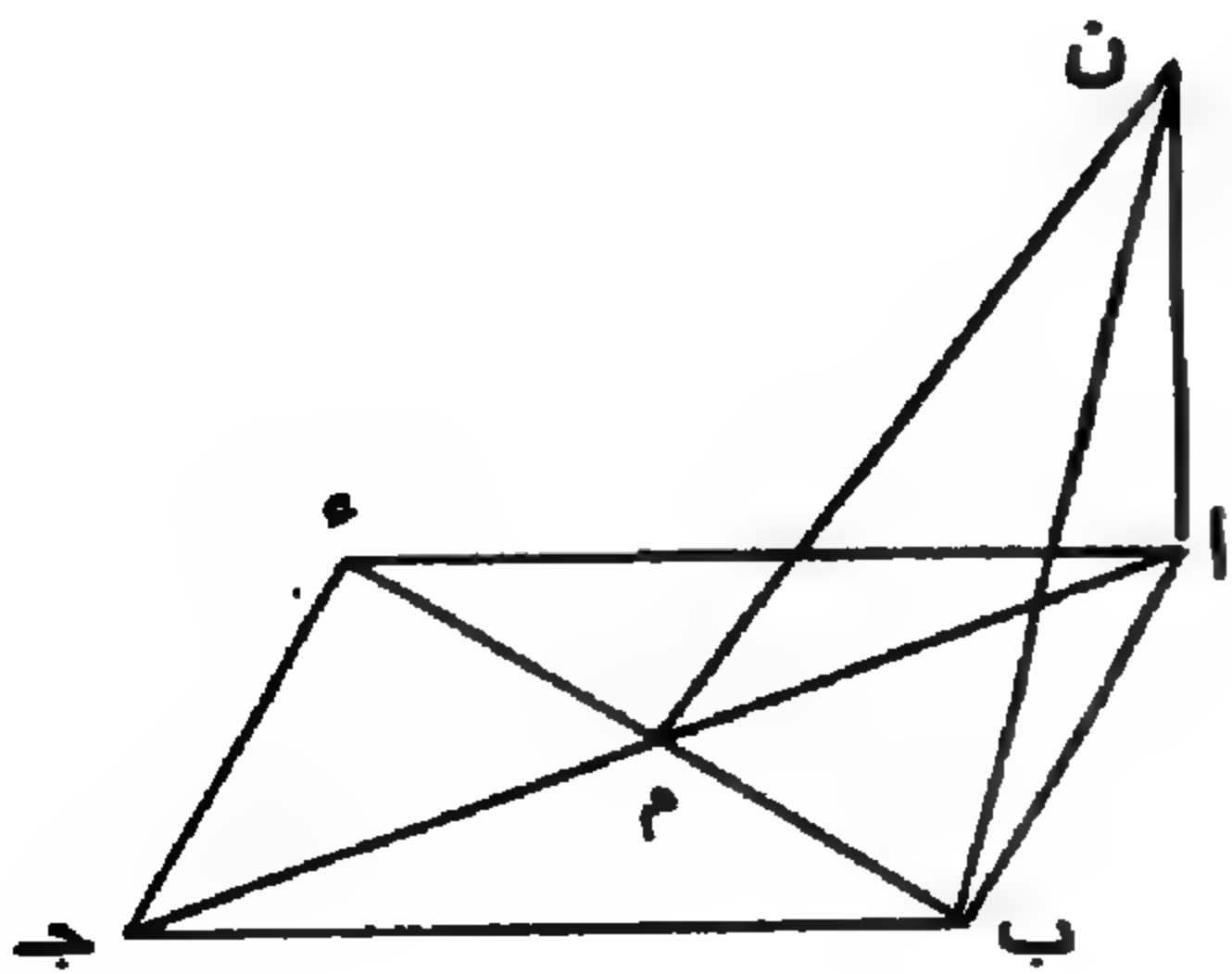
، $\therefore \overline{أ ن} \perp$ مستوي المربع
 $\therefore \overline{أ ن} \perp \overline{أ م}$

، $\therefore أ م = \frac{١}{٢} أ جـ = \sqrt{٦}$

$\therefore \triangle$ ن أ م قائم الزاوية في أ ، ن أ = أ م

$\therefore \angle$ ق (\angle ن م أ) = ٤٥°

$\therefore \angle$ ق (\angle أ - ب - ن) = ٤٥°



مثال: ا ب ج د مستطيل فيه ا ب = ٦ سم ، ب ج = ٨ سم تقاطع قطراه في و ثم رسمت و م عمودية على مستوي المستطيل فاذا كان م ا = ١٣ سم اوجد طول م و ، و اذا كانت م منتصف ا ب فبرهن ان م س \perp ا ب واذا كان ق ($\vec{م} - \vec{ا ب} - \vec{ج} = ٠$) فابعد قيمة طاي .

الحل

$$\vec{ا ج}^2 = ٦٤ + ٢٦ = ٩٠ \therefore ا ج = ٣\sqrt{١٠} \therefore او = ٥ سم$$

$$، \therefore م و \perp \text{المستوي ا ب ج د} \therefore م و \perp و ا$$

$$\therefore م و^2 = ١٦٩ - ٢٥ = ١٤٤ \therefore م و = ١٢ سم \text{نرسم وس}$$

$$\therefore وس // ا ب ج \therefore وس \perp ا ب$$

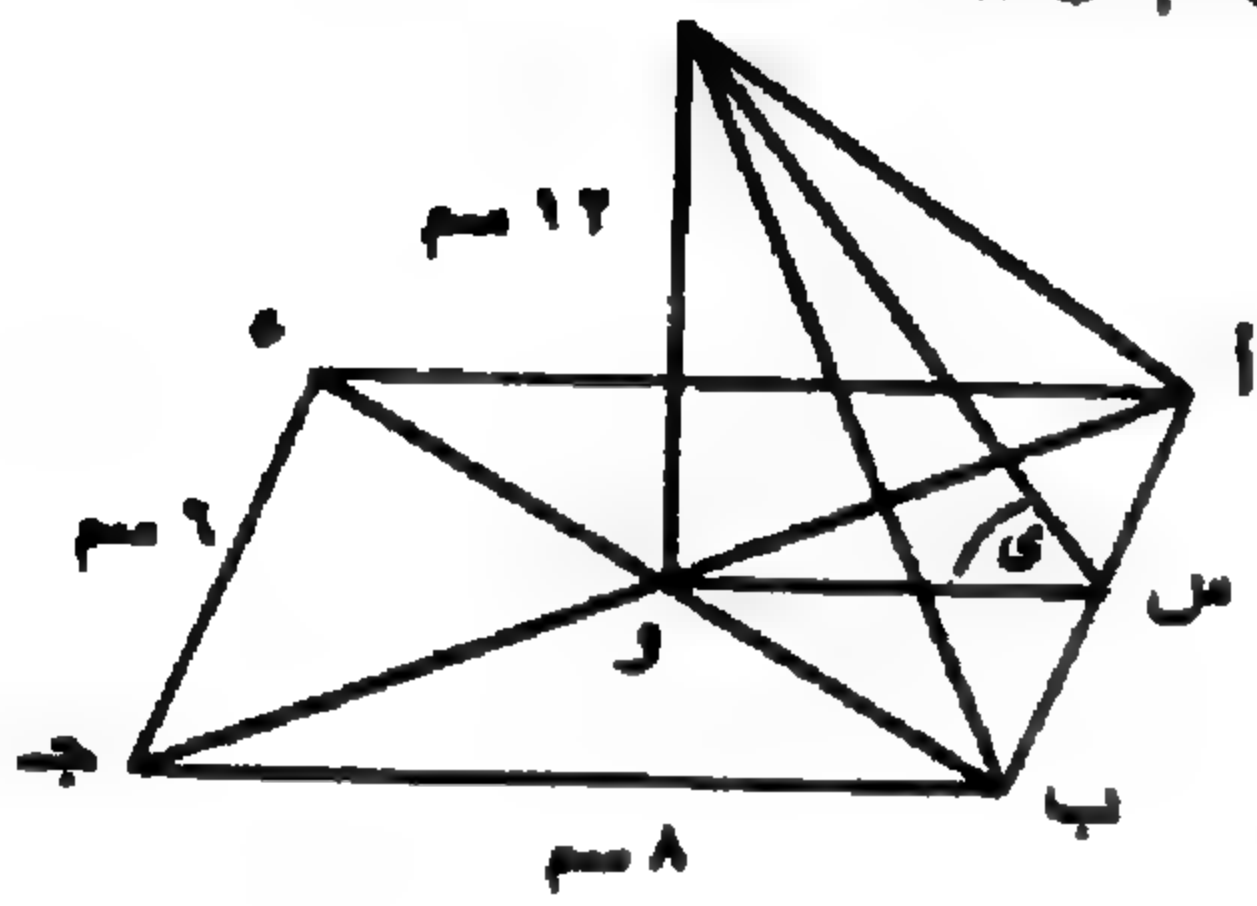
$$، وس = ٤ سم$$

$$، \therefore وس \text{مستقيم م على المستوي ا ب ج د}$$

$$\therefore م س \perp ا ب$$

$$\therefore ق (> م س و) = ق (> م - \vec{ا ب} - \vec{ج}) = ٠$$

$$\text{طاي} = \frac{١٢}{٤} = ٣$$



مثال: ا ب ج د مثلث فيه ق (\angle) = ٣٠° ، ا ب = ١٠ سم ، رسم ب ع \perp المستوي ا ب ج بحيث كن ب ع = ٥ سم . ثم رسم ب ه \perp ا ج يقابله في ه - اثبت ان ه ع \perp ا ج ثم اوجد طول كل من ب ه ، ه ع وقياس الزاوية الزوجية (ب - ا ج - ع) .

البرهان

$$\therefore ه ع \text{مائلة على المستوي ا ب ج ومسقطها على المستوي هي ب ه} \therefore ا ج \perp ا ج$$

$$\therefore ه ع \perp ا ج$$

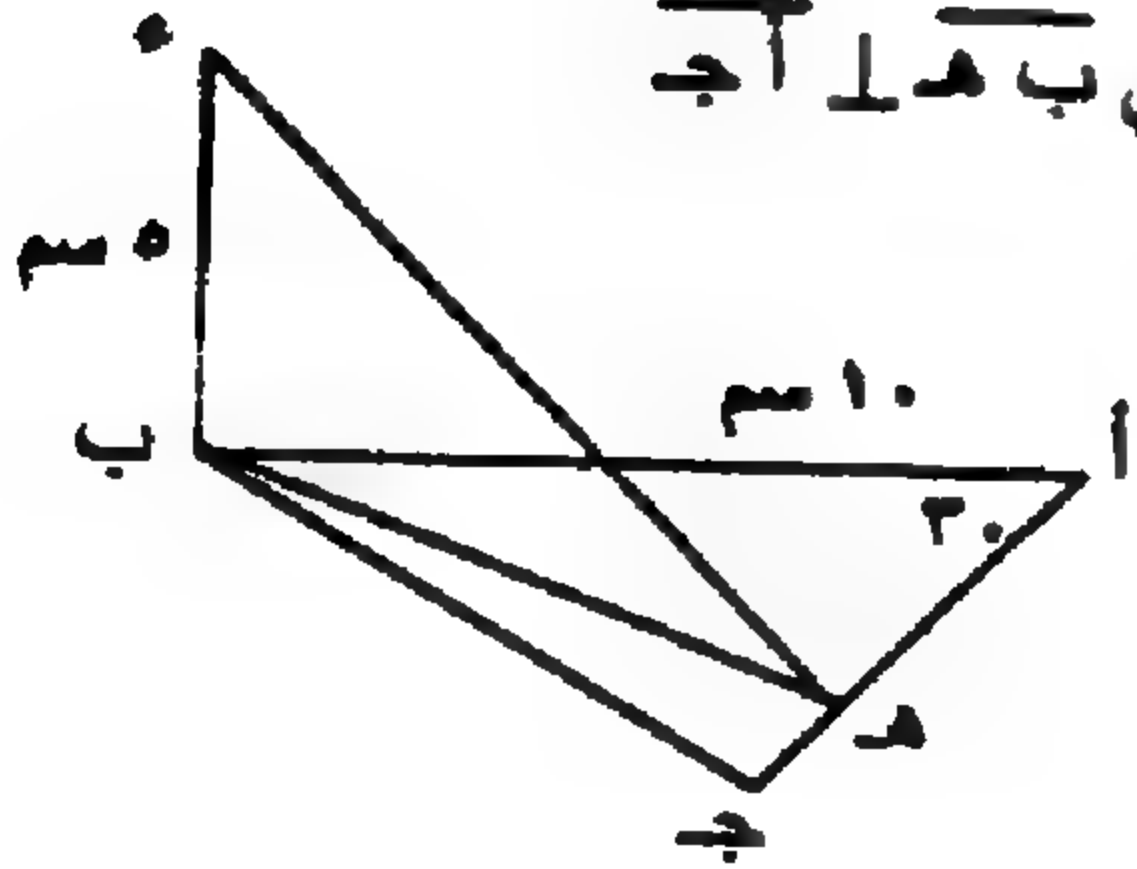
$$\text{وحيث ان ب ه} \perp ا ج$$

$$\therefore > ب ه \text{زاوية مستوية للزاوية الزوجية (ب - ا ج - ع)}$$

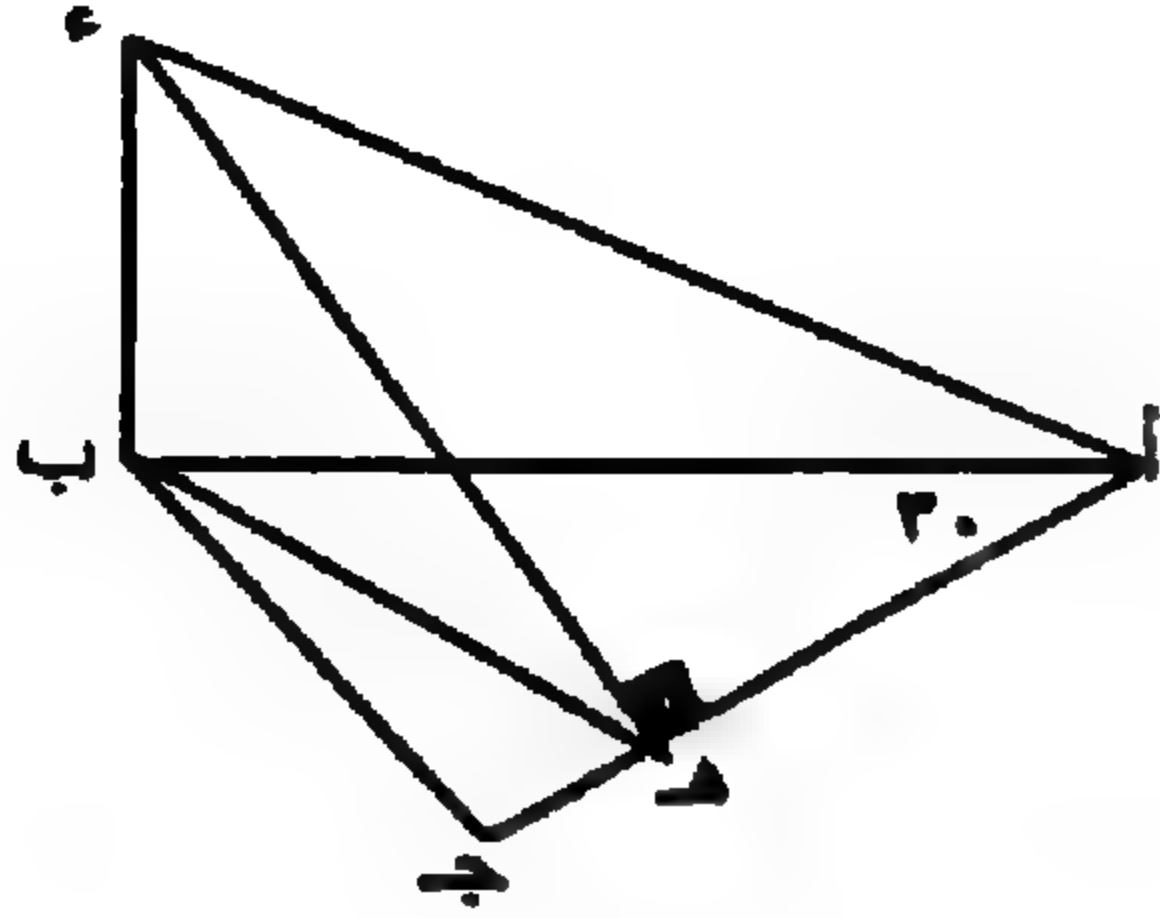
$$\text{في } \triangle ا ب ه : ب ه = \frac{١}{٢} ا ب = \frac{١}{٢} \times ١٠ = ٥ سم$$

$$\text{في } \triangle ه ب ع : ب ه = ب ه ، ق (\angle ب ه) = ٩٠^\circ$$

$$\therefore ق (> ب ه) = ٤٥^\circ$$



مثال: AB جـ مثلث فيه $\angle C = 30^\circ$ ، $AB = \sqrt{3}$ سم، رسم $BE \perp$ المستوي ABC بحيث $BE = 5$ سم ثم رسم $EH \perp AC$ قابله في H أثبت أن $BE \perp AC$ وان قياس الزاوية الزوجية $(\angle B - AC - E)$ يساوي 30° .



البرهان

$\therefore BE$ مائل على المستوي ABC ، $BE \perp$ المستوي ABC

$\therefore BE$ هي مسقط E على المستوي ABC

$\therefore BE \perp AC$ $\therefore BE \perp AC$

$\therefore \angle B - AC - E$ زاوية مستوية للزاوية الزوجية

$(\angle B - AC - E)$

في $\triangle ABC$: $BE = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \sqrt{3}$ سم

$\therefore BE \perp$ المستوي ABC $\therefore BE \perp AC$

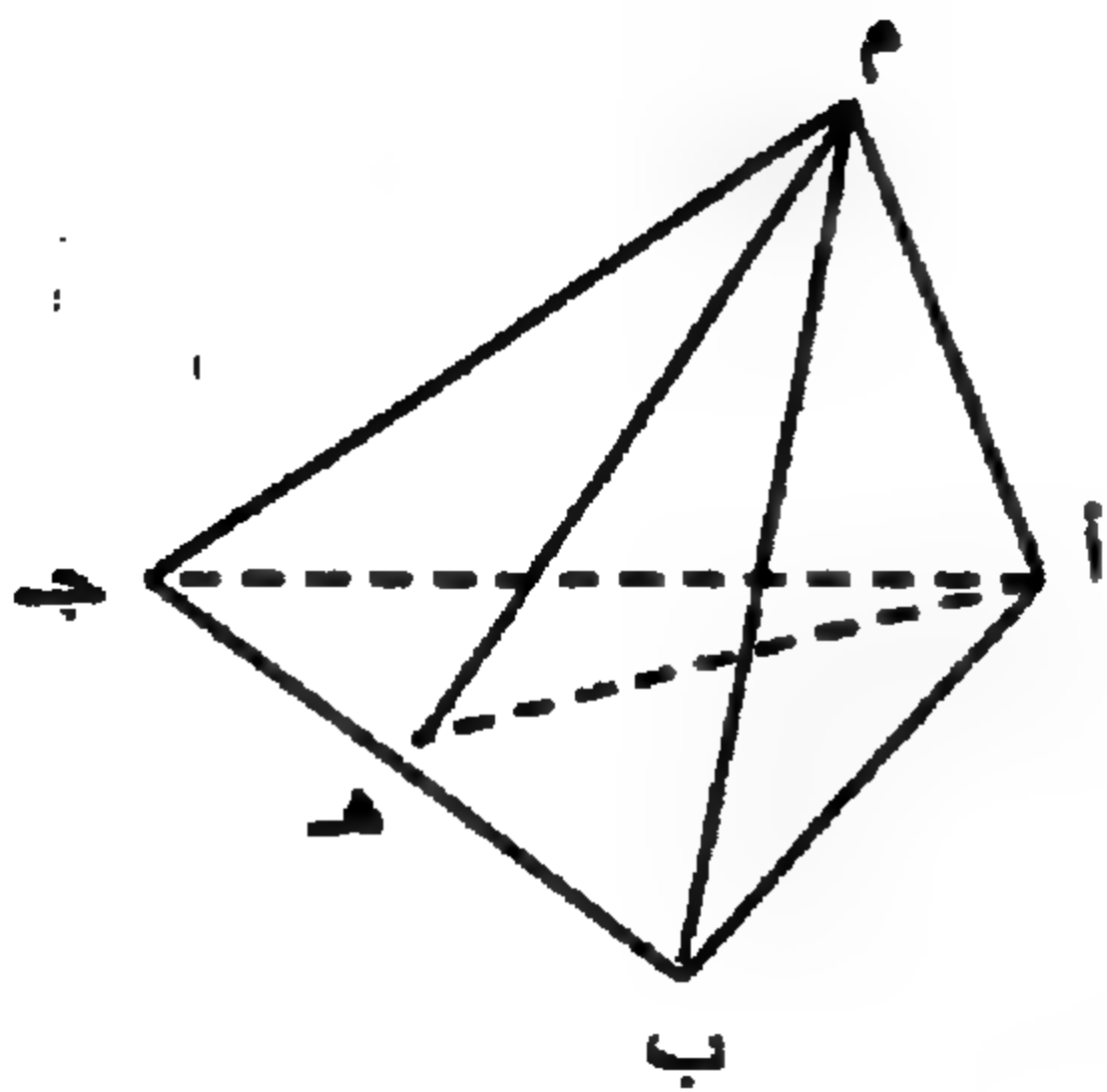
ظا $(\angle B - AC - E) = \frac{BE}{AB} = \frac{\frac{1}{2} \sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$

$\therefore \angle B - AC - E = 30^\circ$

مثال: M ABC هرم ثلاثي فيه AB جـ مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه 40 سم، $AM \perp$ المستوي ABC ، $AM = 20\sqrt{3}$ سم، H منتصف BC جـ.

(أولاً) أثبت أن المستوي M $AH \perp$ المستوي ABC .

(ثانياً) احسب قياس $(\angle M - BC - A)$



الحل

$\therefore AM \perp$ المستوي ABC ، $AM \perp$ المستوي ABC

\therefore المستوي M $AH \perp$ المستوي ABC

$\therefore \triangle ABC$ متساوي الأضلاع، H منتصف BC

$\therefore AH \perp BC$

$\therefore AM \perp$ المستوي ABC $\therefore AM$ مسقط المائل M على ABC

$\therefore AH \perp BC$ $\therefore AM \perp BC$

∴ $\angle MHA$ هي زاوية مستوية للزاوية الزوجية ($\angle MAB - \angle A$)

∴ $\overline{MA} \perp \overline{AB}$ المستوي ABJ ∴ $\overline{MA} \perp \overline{AH}$

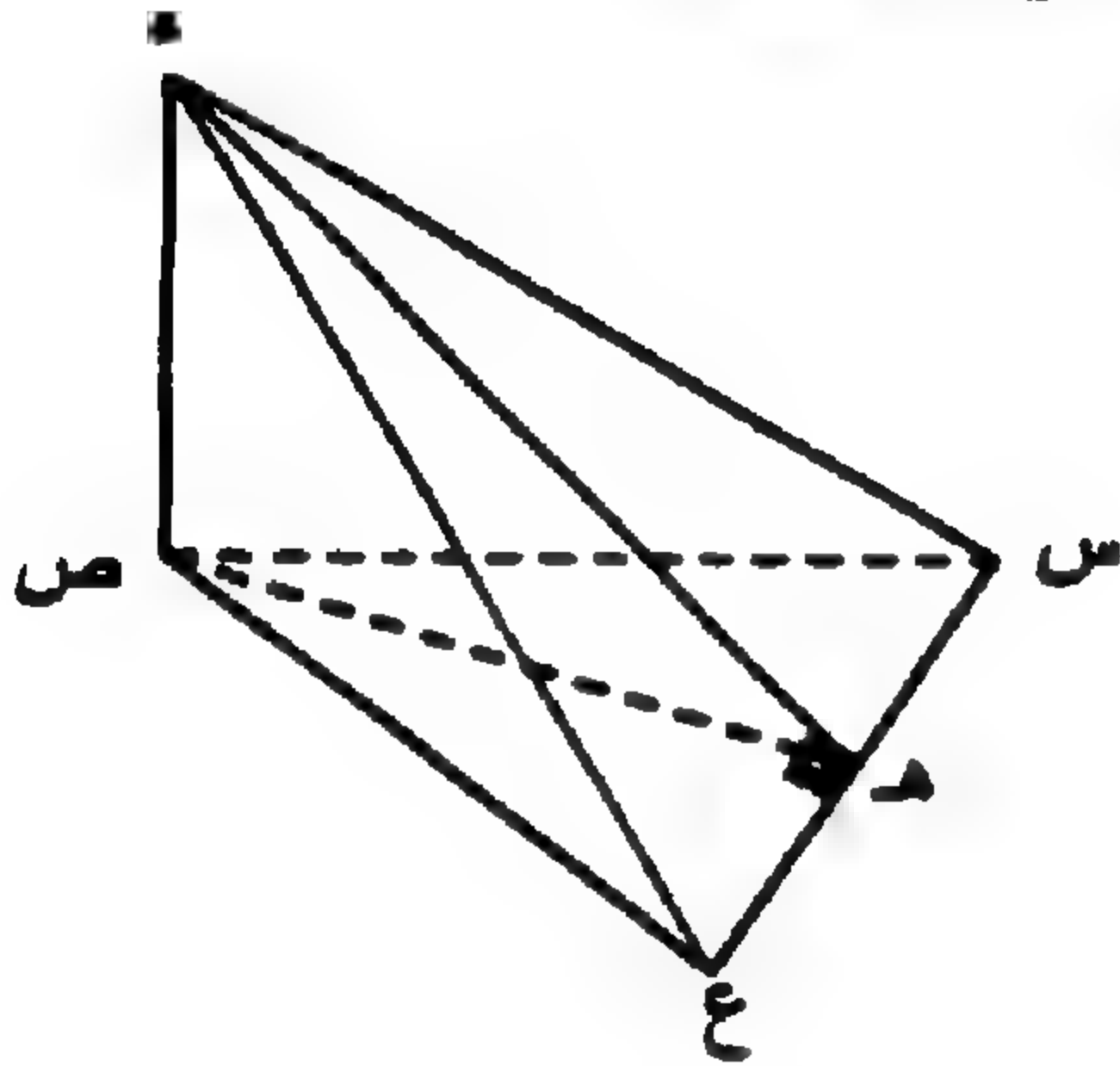
$$AH = AB \text{ جا } 60 = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 40 = 20 \text{ سم}$$

$$\text{ظا } (\angle MHA) = \frac{MA}{AH} = 1 = \frac{\sqrt{3} \times 20}{\sqrt{3} \times 20}$$

$$\therefore \angle MHA = 45^\circ$$

مثال : من $ص$ ع Δ فيه $ق (\angle S) = 30^\circ$ ، من $ص = 20$ سم - اقيم $ص$ ع \perp مستوي Δ من $ص$ ع حيث $ص$ ع $= \sqrt{10}$ رسمت $ص$ ه \perp من $ع$ وتقطعها في ه . اثبت ان $ص$ ه \perp من $ع$ من ذلك احسب قياس الزاوية الزوجية بين المستويين $ص$ ع ، من $ص$ ع .

الحل



∴ $ص$ ع \perp المستوي من $ص$ ع

∴ $ص$ ع مسقط $ص$ ه على المستوي من $ص$ ع

∴ $ص$ ه \perp من $ع$

∴ $ص$ ه \perp من $ع$ (أولاً)

∴ ($\angle ه ص ع$) هي زاوية مستوية للزاوية

الزوجية بين المستويين $ص$ ع ، من $ص$ ع

$$\text{في } \Delta س ه ص : ص ه = س ص \text{ جا } 30 = \frac{1}{2} \times 20 = 10 \text{ سم}$$

∴ $ص$ ع \perp المستوي من $ص$ ع

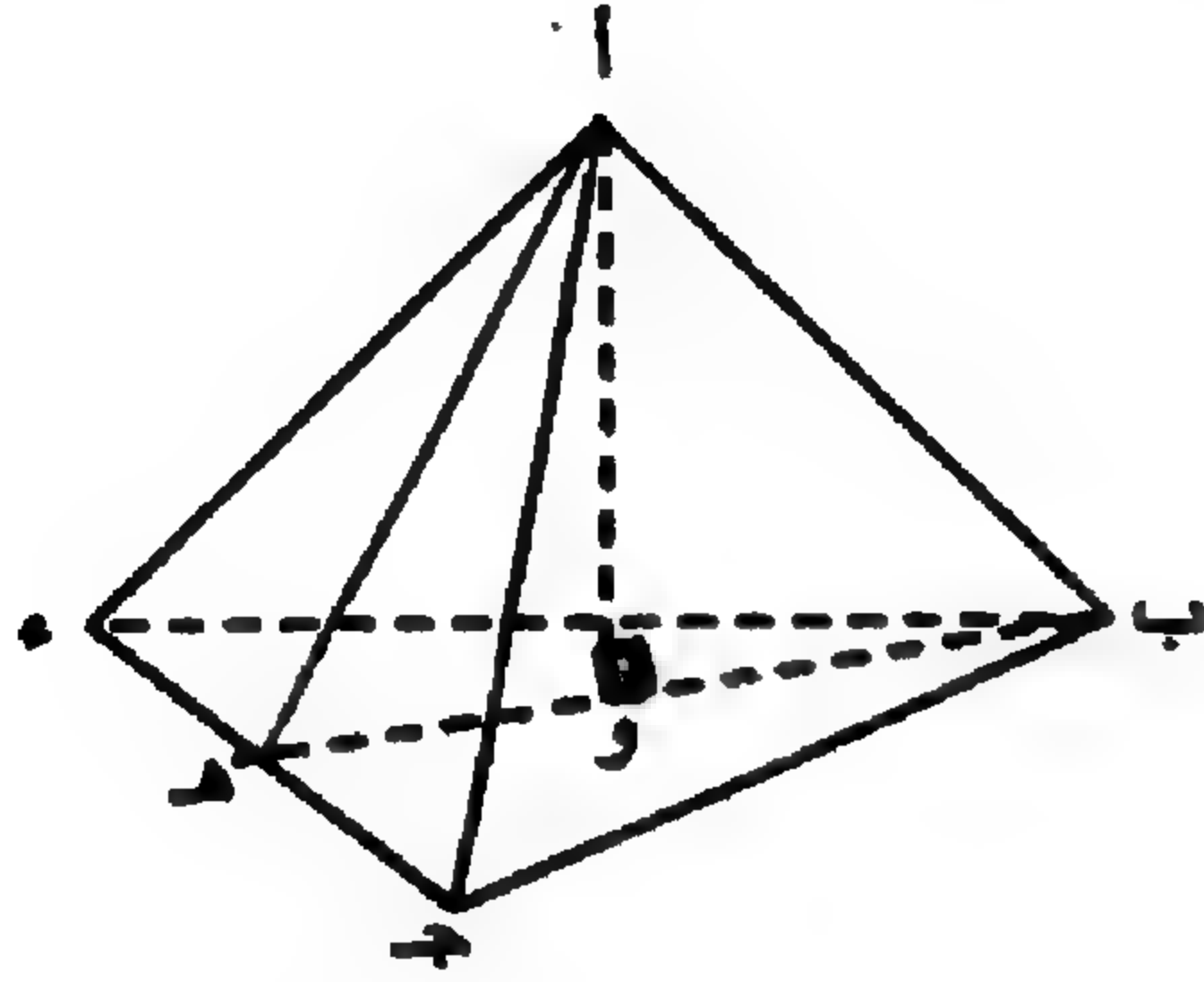
∴ $ص$ ع \perp من $ه$

$$\text{ظا } (\angle ه ص ع) = \frac{ص ه}{ص ع} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$\therefore \angle ه ص ع = 60^\circ$$

مثال: أ ب ج هـ هرم ثلاثي فيه ب ج = ب هـ ، أ ج = أ هـ نصف ج هـ في هـ أثبت أن ج هـ \perp المستوي أب هـ وإذا رسم أ و \perp المستوي ب ج هـ وإذا كان ج هـ = ١٨ سم ، أ ج = ١٥ سم ، أ و = $\sqrt{37}$ سم - أوجد قياس الزاوية الزوجية (ب - ج هـ - أ)

البرهان



في Δ ب ج هـ \therefore ب ج = ب هـ ، هـ منتصف ج هـ

\therefore ب هـ \perp ج هـ (١)

في Δ أ ج هـ \therefore أ ج = أ هـ ، هـ منتصف ج هـ

\therefore أ هـ \perp ج هـ (٢)

من (١)، (٢) ج هـ \perp المستوي أب هـ

\therefore أ و \subset المستوي أب هـ \therefore ج هـ \perp أ و

\therefore أ و \perp ب هـ \therefore أ و \perp المستوي ب ج هـ \therefore ج هـ \perp المستوي أب هـ

\therefore أ هـ ب زاوية مستوية للزاوية الزوجية (ب - ج هـ - أ)

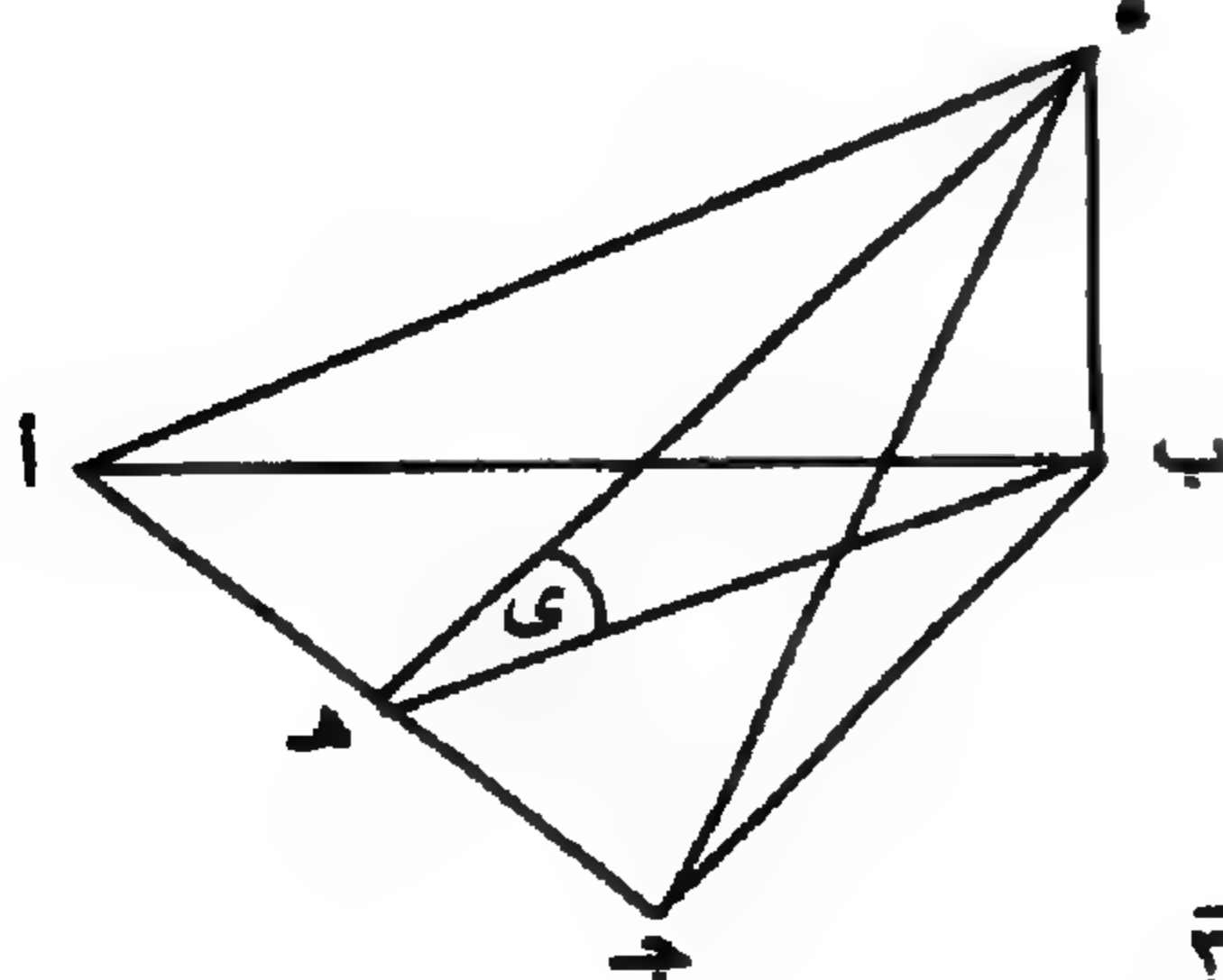
$$144 = 81 - 225 = \angle(ج هـ) - \angle(أ ج هـ) = \angle(أ هـ)$$

$$\therefore أ هـ = ١٢ \text{ سم} ، \text{ جا } (أ هـ و) = \frac{أ و}{أ هـ} = \frac{\sqrt{37}}{12} = \frac{\sqrt{37}}{2}$$

$$\therefore ق(أ هـ و) = 60^\circ$$

مثال: أ ب ج هـ متساوي الأضلاع طول ضلعه ١٢ سم . أقيم المستقيم ب عمودياً على مستوي المثلث فإذا كان ب هـ = ٦ سم - فأحسب الزاوية بين المستويين ب ج هـ ، أ ب ج هـ .

الحل



نصف أ ج في هـ ونصل هـ ، ب هـ

$\therefore \Delta$ أ ب ج متساوي الأضلاع

\therefore هـ منتصف أ ج ، ب هـ \perp أ ج

\therefore هـ هـ \perp أ ج

\therefore ي هي مقياس الزاوية الزوجية

$$\therefore هـ هـ = \sqrt{37}$$

$$هـ هـ = \frac{2}{12} - (6) = \frac{1}{37}$$

$$\therefore ي = 30^\circ$$

$$\therefore \text{ظا } ي = \frac{6}{\sqrt{37}} = \frac{1}{\sqrt{37}}$$

المستويات المتعامدة

يقال لمستويين أحدهما متعامدان إذا كانت إحدى الزوايا الزوجية الناشئة عن تقاطعهما قائمة .

نظرية:

■ إذا كان مستقيم عمودياً على مستو فكل مستو يحوي هذا المستقيم يكون

عمودياً على تلك المستوي .

المعطيات : $\vec{d} \perp \text{المستوي } S$ عند J ، $\vec{d} \subset S$ ، $S \cap S' = \vec{AB}$

المطلوب : إثبات أن : $S \perp S'$

البرهان:

نرسم $\vec{d} \perp \vec{AB}$ في المستوي S

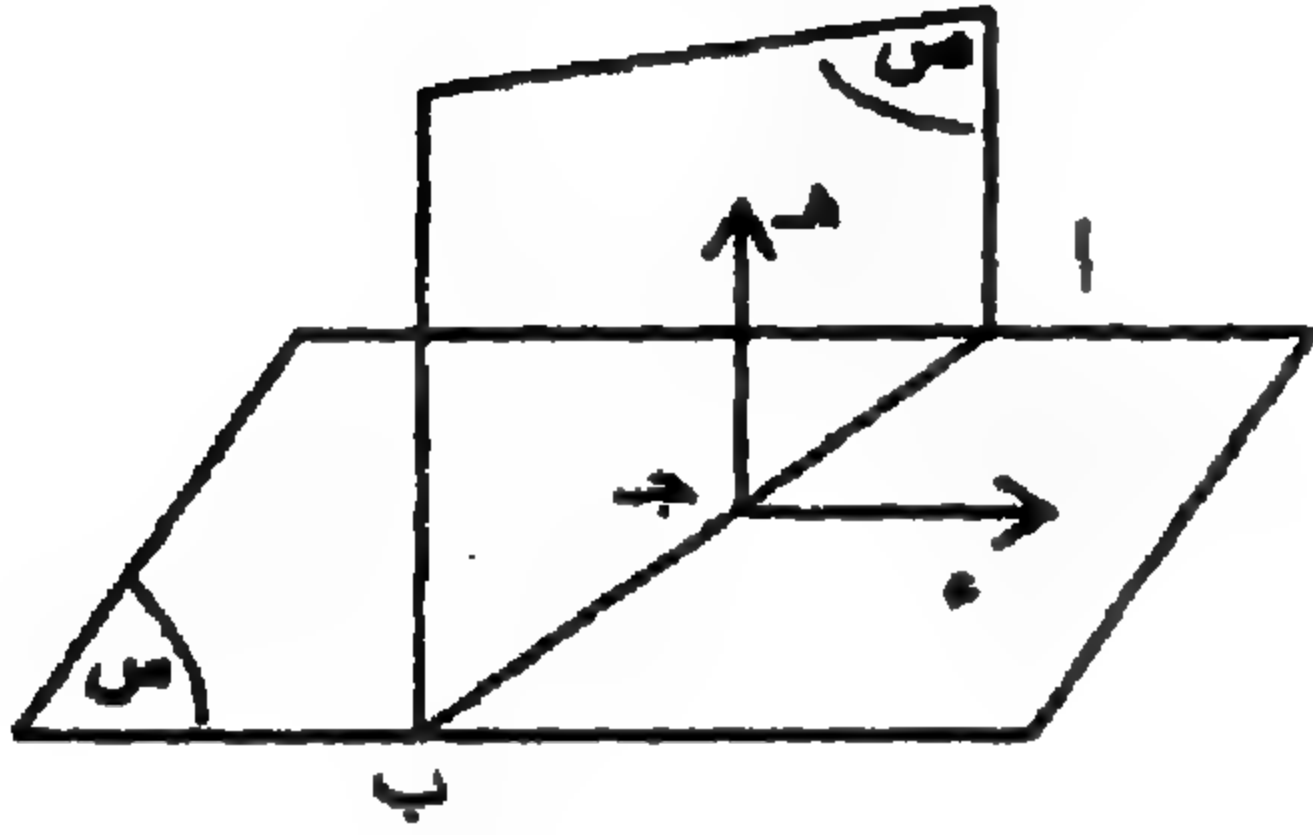
∴ $\vec{d} \perp \text{المستوي } S$ (معطى) ، $\vec{d} \subset S$

∴ $\vec{d} \perp \vec{d}'$ ، وإيضاً $\vec{d} \perp \vec{AB}$

∴ $\angle(\vec{d}, \vec{d}') = 90^\circ$

∴ $\vec{d} \perp \text{زاوية مستوية لإحدى الزوايا الزوجية الناشئة عن تقاطع المستويين } S, S'$

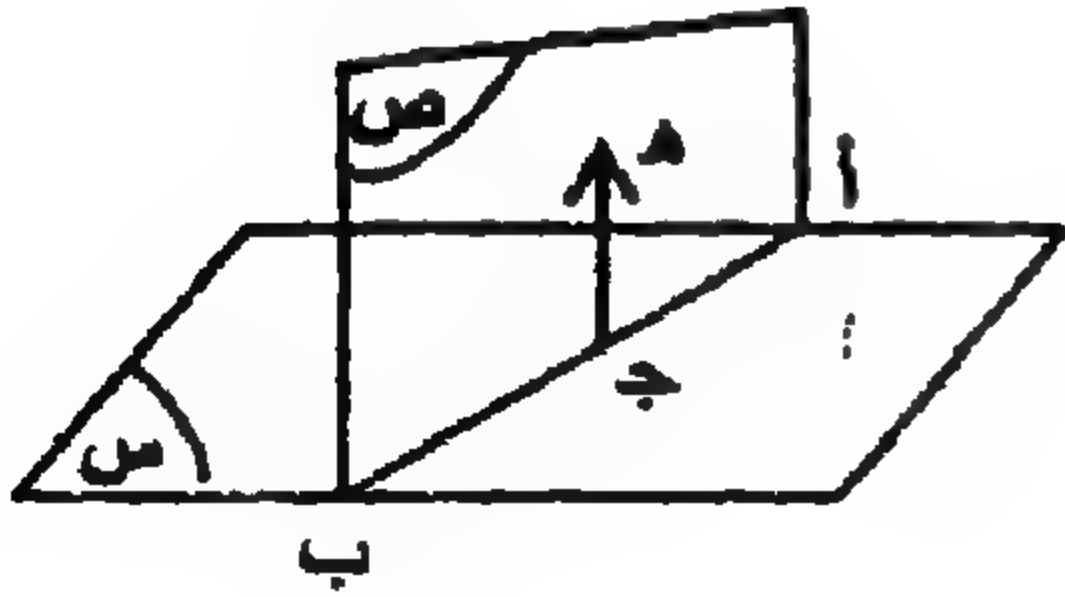
∴ $S \perp S'$



عكس النظرية (بدون برهان)

■ إذا تعامد مستويان ورسم في أحدهما مستقيم عمودي على خط التقاطع

كان هذا المستقيم عمودياً على المستوي الآخر .

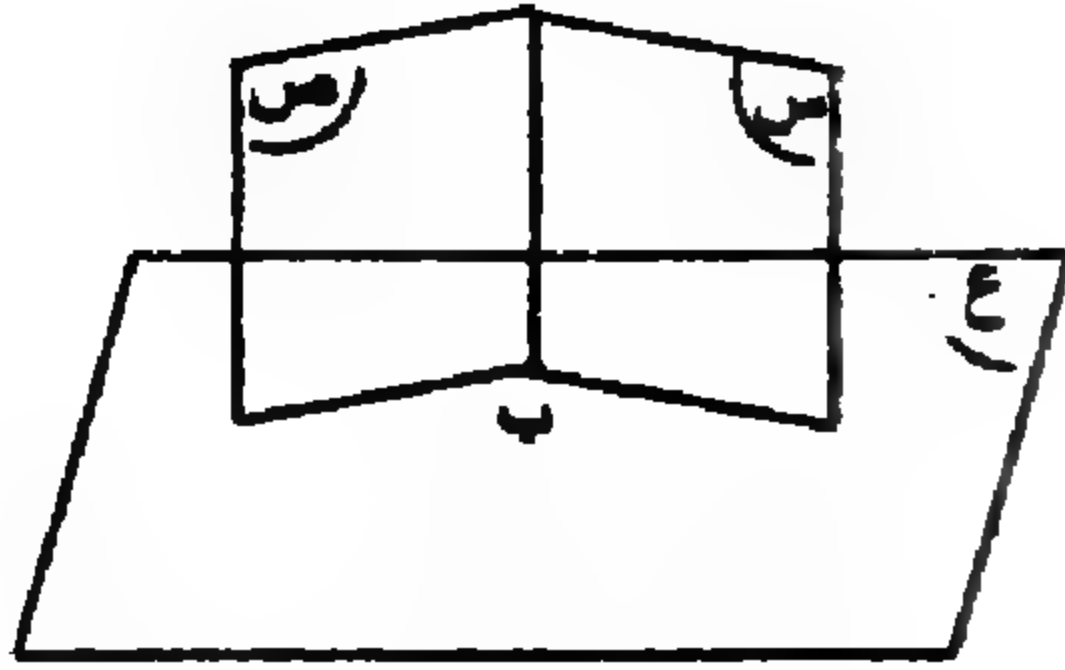


إذا كان $S \perp S'$ ، $S \cap S' = \vec{AB}$ ، $\vec{d} \subset S$ ، $\vec{d} \perp \vec{AB}$

، $\vec{d} \perp \vec{d}'$ فإن : $\vec{d} \perp \text{المستوي } S'$.

حقيقة :

إذا كان كل من مستويين متقاطعين عمودياً علي مستو ثالث كان خط تقاطع هذين المستويين عمودياً علي المستوي الثالث .



إذا كان كل من المستويين س ، ص عمودي علي المستوي ع
وكان $س \cap ص = \overleftrightarrow{أ ب}$ فإن $\overleftrightarrow{أ ب} \perp$ المستوي ع .

ملاحظة :

لإثبات أن المستويين متعامدين :-

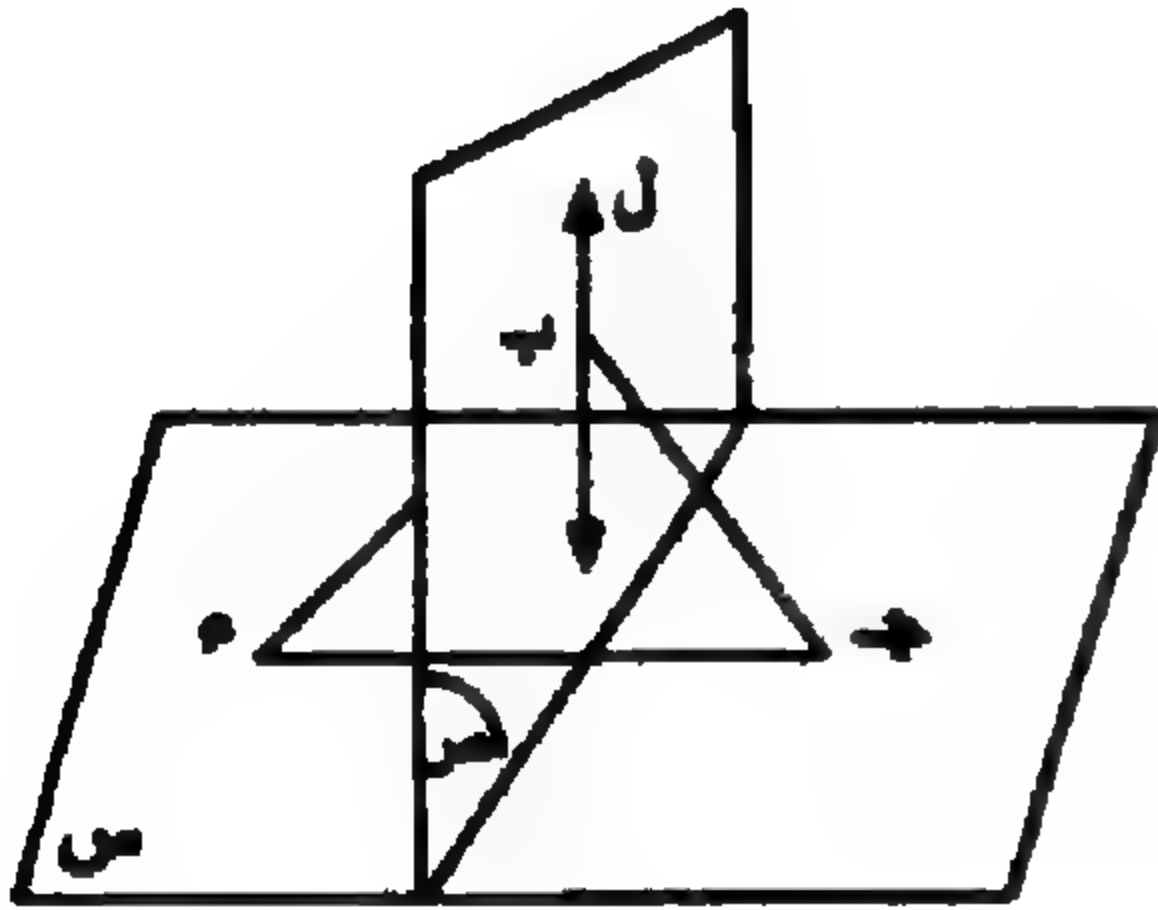
- نوجد مستقيم في أحدهم عمودي علي الآخر .
- نثبت الزاوية الزوجية بين المستويين قائمة .

مثال : س ، ص مستويان متعامدان ، المستقيم ل يقع في ص رسم من النقطة ب و ل المستقيمان

ب ج ، ب د عمودين علي ل ويلتقيان المستوي س في ج و د علي الترتيب .

- أثبت أن : ج د \perp المستوي ص .

الحل



\therefore ب ج ، ب د عموديين علي ل

\therefore المستقيم ل عمودي علي مستويهما ب ج د .

\therefore ل \supset المستوي ص

\therefore المستوي ص \perp المستوي ب ج د .

\therefore المستويان س ، ب ج د متعامدان علي المستوي ص

\therefore خط تقاطعهما \perp المستوي ص

\therefore ج د \perp المستوي ص

مثال: م أ ب ج هرم ثلاثي فيه م أ \perp المستوي أ ب ج ، أ ب = أ ج = ١٠ سم ، ب ج = ١٦

سم ، م أ = ٨ سم . في منتصف ب ج .

أوجد: (١) ق (م - ب ج - أ) (٢) برهن أن المستويين م أ ، م ب ج متعامدين

الحل

∴ $\overline{AE} \perp \overline{AB}$ جـ

∴ \overline{AE} في منتصف \overline{AB} جـ

∴ $\overline{AM} \perp$ المستوى AB جـ

∴ \overline{AE} المسقط، \overline{ME} مائل

∴ المسقط $\overline{AE} \perp \overline{AB}$ جـ

∴ المائل $\overline{ME} \perp \overline{AB}$ جـ

∴ $Q(AM)$ المستوية = $Q(M - \overleftrightarrow{AB} - A)$ الزوجية

في $\triangle AEB$

∴ $AE = 6$ سم

∴ $AE^2 = (10)^2 - (8)^2 = 36$

∴ $\overline{AM} \perp \overline{AE}$ جـ

∴ $\overline{AM} \perp$ المستوى AB جـ

∴ $ME = 10$ سم

∴ $\triangle MAE$ $ME^2 = 100 = 6^2 + 8^2 = (AE)^2$

∴ $Q(M - \overleftrightarrow{AB} - A) = \dots\dots\dots$

∴ جتا $(M - \overleftrightarrow{AB} - A) = \frac{6}{10} = 0.6$

∴ $\overline{AB} \perp$ المستوى MAE

∴ $\overline{AB} \perp$ كلا من \overline{AE} ، \overline{ME}

∴ المستوى $MAE \perp$ المستوى AB جـ

∴ المستوى MAE يحوى المستقيم \overleftrightarrow{AB} جـ

مثال: M ا جـ هرم ثلاثى فيه AB جـ \triangle متساوي الاضلاع. طول ضلعه ٤٠ سم، $\overline{MA} \perp$ المستوى

AB جـ، $AM = 3\sqrt{20}$ سم، H في منتصف \overline{AB} جـ.

(٢) $Q(M - \overleftrightarrow{AB} - A)$

برهن ان : (١) المستوى $MAH \perp$ المستوى AB جـ

الحـلـ

∴ $\overline{AM} \perp$ المستوى AB جـ

∴ مستواه \perp المستوى AB جـ

∴ المستوى $MAH \perp AB$ جـ

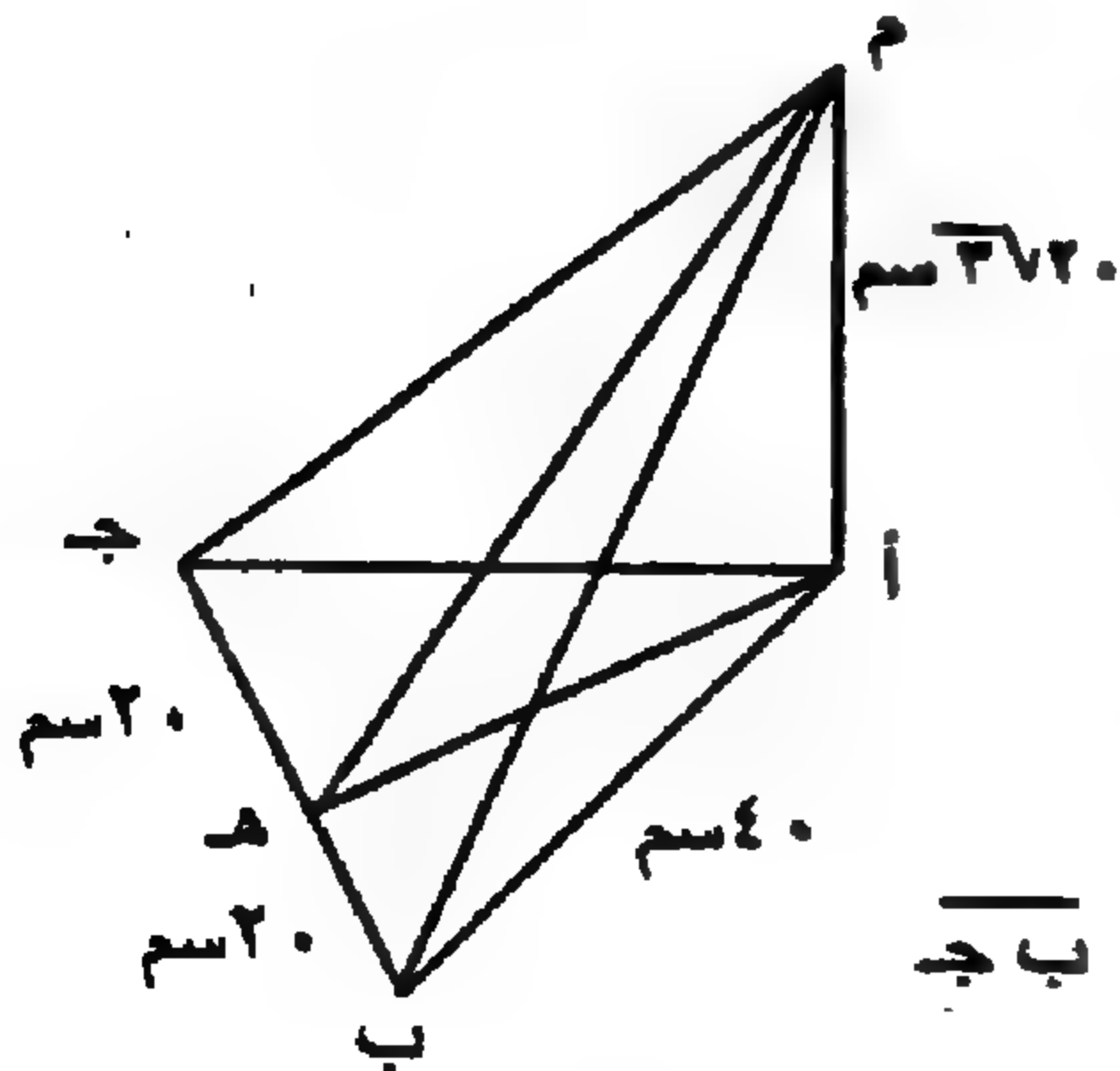
∴ $\triangle AB$ جـ متساوي الاضلاع، H منتصف \overline{AB} جـ

∴ $\overline{AH} \perp \overline{AB}$ جـ

∴ \overline{AH} المسقط، \overline{MH} المائل

∴ $\overline{MH} \perp \overline{AB}$ جـ

∴ $Q(M - \overleftrightarrow{AB} - A)$ الزوجية = $Q(M - \overleftrightarrow{AH} - A)$ المستوية



$$\therefore \text{أه} = ٤٠ \text{ جا } ٦٠ = ٣\sqrt{٢٠}$$

$$\therefore \text{ظا} (> \text{أه م}) = \frac{\text{أه}}{\text{أه}} = ١$$

$$\therefore \text{ق} (> \text{أه م}) = ٤٥^\circ$$

مثال: أب جـ Δ فيه أب = أجـ = ١٠ سم ، ب جـ = ١٢ سم ، رسم م أ \perp المستوى أب جـ

بحيث م أ = ٨ سم ، ع منتصف ب جـ

(١) احسب طول آ ع ، م ع

(٢) اثبت أن م ع \perp ب جـ

(٣) أوجد قياس (\angle م - ب جـ - أ)

(٤) اثبت أن المستوي م أ ع \perp المستوى أب جـ

الحل

(١) Δ متساوي الساقين ، ع منتصف ب جـ

$$\therefore \text{أه} \perp \text{ب جـ}$$

في Δ أ ه جـ $\therefore \text{ق} (> \text{ه}) = ٩٠^\circ$

$$\therefore \text{أه} = \text{أجـ} - \text{جـ ه} = ١٠٠ - ٣٦ = ٦٤$$

$$\therefore \text{أه} = ٨ \text{ سم} \quad \therefore \text{م أ} \perp \text{المستوى أب جـ}$$

$$\therefore \text{آ م} \perp \text{آ ه}$$

في Δ م أ ه

$$\therefore \text{م ه} = \text{آ م} + \text{آ ه} = ٦٤ + ٦٤ = ١٢٨$$

$$\therefore \text{م ه} = ٢\sqrt{٧٨} \text{ سم}$$

(٢) \therefore أ ه هو مستط المائل م ه ، $\therefore \text{أه} \perp \text{ب جـ}$

$$\therefore \text{م ه} \perp \text{ب جـ}$$

(٣) \angle م ه أ هي زاوية مستوية للزاوية الزوجية (\angle م - ب جـ - أ)

$$\text{ظا} (> \text{م ه أ}) = \frac{\text{أه}}{\text{أه}} = ١ \quad \therefore \text{ق} (> \text{م ه أ}) = ٤٥^\circ$$

(٤) $\text{آ م} \perp$ المستوى أب جـ \therefore المستوى م أ ه \perp المستوى أب جـ

مثال: م ، ص مستويان متعامدان متقاطعان في آ ب . رسم Δ أب جـ في المستوي م بحيث

كان ق (> ب أ ج) = ٩٠° - رسم Δ أ ب ع في المستوى ص بحيث كان ق (> ب أ) = ٩٠° فإذا كانت هـ في منتصف أ ب ، وفي منتصف جـ ع - برهن أن هـ و \perp أ ب .

الحل

∴ المستويين س ، ص متعامدين ، $\overleftrightarrow{أ ج} \perp$ خط تقاطعهما $\overleftrightarrow{أ ب}$

∴ $\overleftrightarrow{أ ج} \perp$ المستوى ص

، ∴ $\overleftrightarrow{أ ج} \perp \overleftrightarrow{أ ع}$ ∴ Δ ج أ ع قائم في أ

∴ $\overleftrightarrow{أ و}$ متوسط ∴ $أ و = \frac{١}{٢} جـ ع$ ---- (١)

بالمثل المستويين متعامدين ، $\overleftrightarrow{ب ع} \perp$ خط تقاطعهما

∴ $\overleftrightarrow{ب ع} \perp$ المستويين ∴ $\overleftrightarrow{ب ع} \perp \overleftrightarrow{أ ب ج}$

Δ ج ب ع قائم في ب ، ∴ ب و متوسط

∴ $ب و = \frac{١}{٢} جـ ع$ ---- (٢) من (١) ، (٢) ينتج أن:

أو = ب و ∴ Δ أ و ب متساوي الساقين

∴ هـ في منتصف $\overleftrightarrow{أ ب}$ ∴ $\overleftrightarrow{و هـ} \perp \overleftrightarrow{أ ب}$

مثال: ب جـ ع مثلث - رسم أ ب \perp المستوى ب جـ ع ، وكان (أ ب) + (ب جـ) +

(جـ ع) = أثبت أن : (١) $\overleftrightarrow{أ ج} \perp \overleftrightarrow{ب جـ}$

(٢) المستوى ج ب ع \perp كل من المستويين ب أ ، ج ب أ

الحل

(١) ∴ $\overleftrightarrow{أ ب} \perp \overleftrightarrow{ب ع}$ ∴ $\overleftrightarrow{أ ب} + \overleftrightarrow{ب ع} = \overleftrightarrow{أ ع}$ ---- (١)

، ∴ $\overleftrightarrow{أ ع} = \overleftrightarrow{أ ب} + \overleftrightarrow{ب جـ} + \overleftrightarrow{جـ ع}$ ---- (٢)

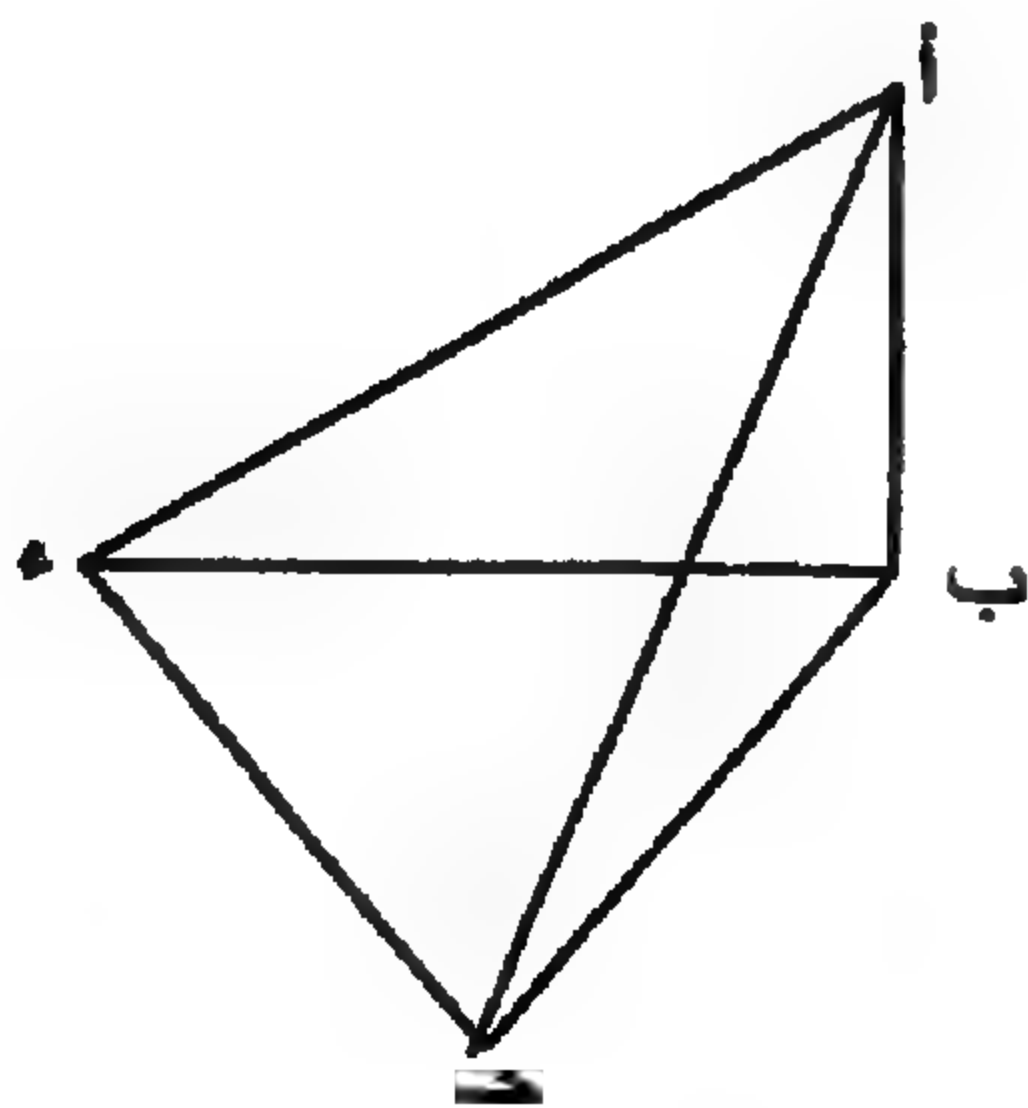
من (١) ، (٢) ∴ $\overleftrightarrow{ب ع} = \overleftrightarrow{ب جـ} + \overleftrightarrow{جـ ع}$

∴ $\overleftrightarrow{أ ج} \perp \overleftrightarrow{ب جـ}$

(٢) ∴ $\overleftrightarrow{أ ب} \perp$ المستوى ب جـ ع ، $\overleftrightarrow{أ ب} \supset$ المستوى أ ب جـ

، $\overleftrightarrow{أ ب} \supset$ المستوى أ ب ع

∴ المستوى ج ب ع \perp كل من المستويين ب أ ، ج ب أ

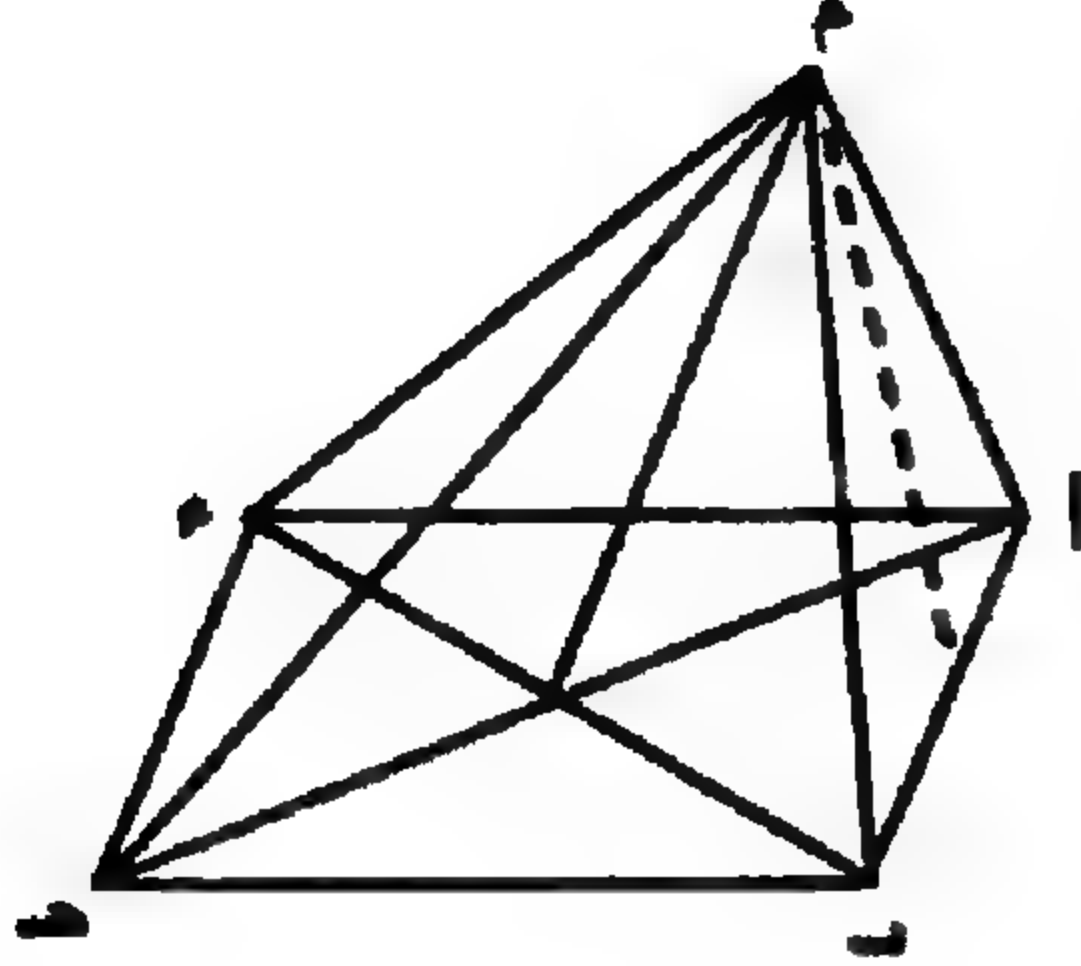


تطبيقات على الهرم

الهرم القائم:

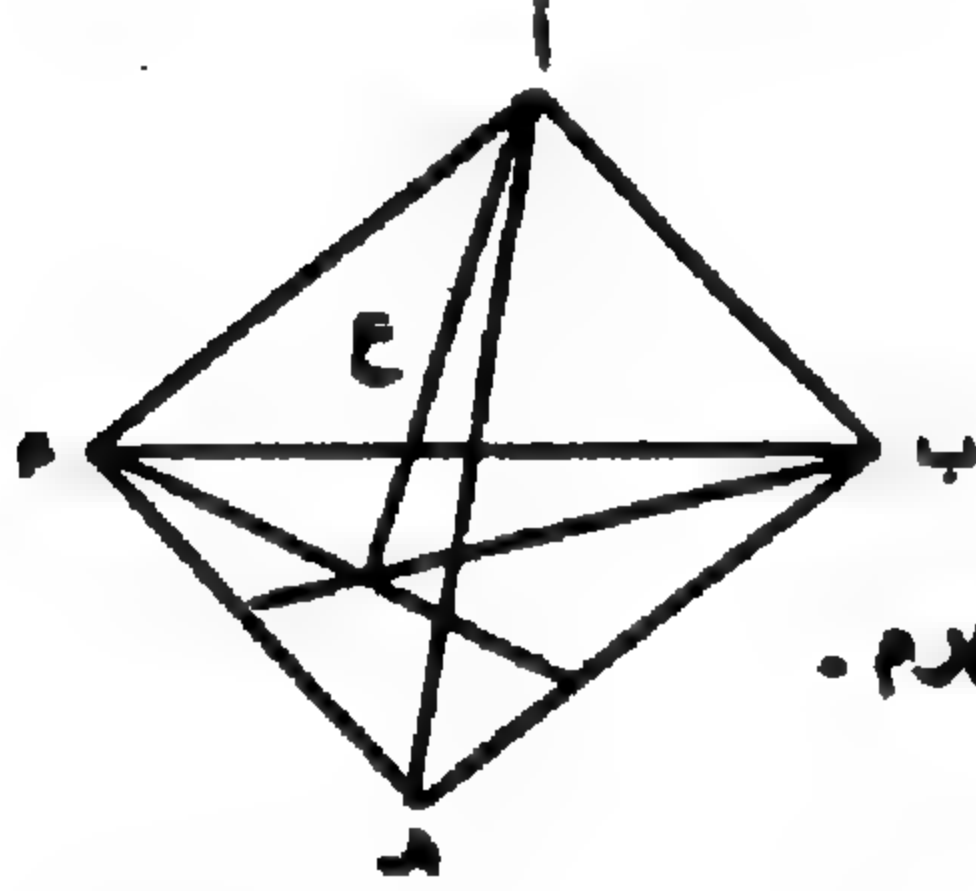
هو هرم قاعدته مضلع منتظم (مثلث متساوي الأضلاع أو مربع أو ———) مركزه موقع العمود المرسوم من رأس الهرم عليه .

وبلاحظ أن :



- (١) أوجد الجانبية مثلثات متساوية الساقين ومتطابقة .
- (٢) أحرفه الجانبية متساوية في الطول .
- (٣) ارتفاعه الجانبية (ارتفاعات أوجه الجانبية) متساوية .

الهرم الثلاثي المنتظم:-



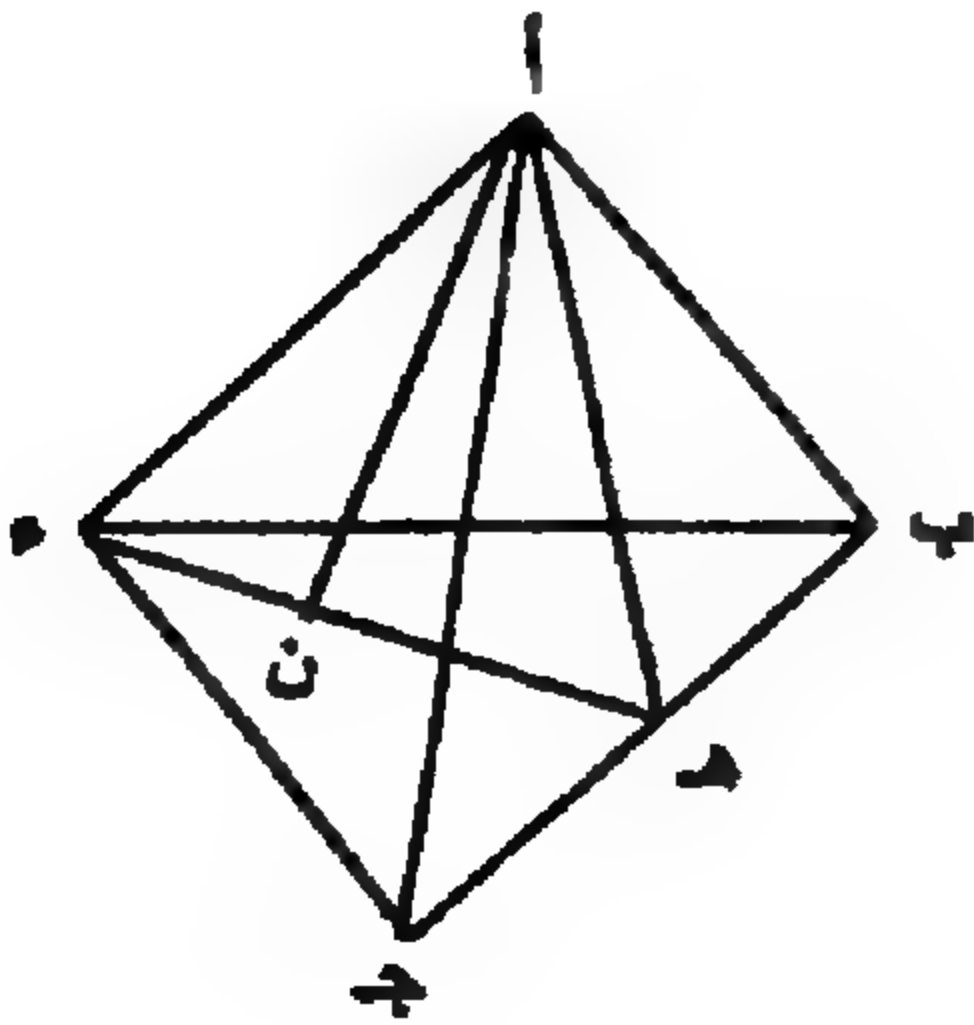
هو هرم ثلاثي أوجه الأربعة مثلثات متساوية الأضلاع .
ارتفاعه ع يمر برأسه وب نقطة تلاقي متوسطاته قاعدته .
أحرفه الستة متساوية وكل وجه من أوجه الأربعة تعتبر قاعدة للهرم .

مثال: ا ب ج د هـ هرم ثلاثي منتظم طول حرفه = ٦ سم . هـ في منتصف ب ج د ثم رسم هـ أ ، هـ ع
برهن أن: (١) ب ج د \perp المستوى ا هـ ع .

(٢) المستوى ب ج د ع \perp المستوى ا هـ ع .

(٣) وإذا رسم أن \perp هـ أن هو أن ارتفاع الهرم ثم أوجد ق (ا - ب ج د - ع)

الحل



$\therefore \Delta$ ا ب ج د متساوي الساقين ، هـ في منتصف ب ج د

$\therefore \overline{ah} \perp \overline{bj}$ ، $\overline{eh} \perp \overline{bj}$

$\therefore \overline{bj} \perp$ كلا من \overline{ah} ، \overline{eh}

\therefore مستواها \perp المستوى ا هـ ع

\therefore المستوى ب ج د ع \perp المستوى ا هـ ع

$\therefore \overline{bj} \perp \overline{an}$

$$\therefore \overline{AN} \perp \overline{AE}$$

$$\therefore \overline{AN} \perp \text{كلا من } \overline{AB}, \overline{AE}$$

$$\therefore \overline{AN} \perp \text{المستوى } BAE$$

$$\therefore \overline{AN} \text{ هو ارتفاع الهرم.}$$

$$\therefore \overline{AH} \perp \overline{AB}, \overline{AE} \perp \overline{AB}$$

$$\therefore \angle (A-B-AE) = \angle (A-H-AE) \text{ الزوجية}$$

$$\therefore \cos AHE = \frac{AN}{AH} = \frac{\sqrt{3} \times \frac{1}{3}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$$

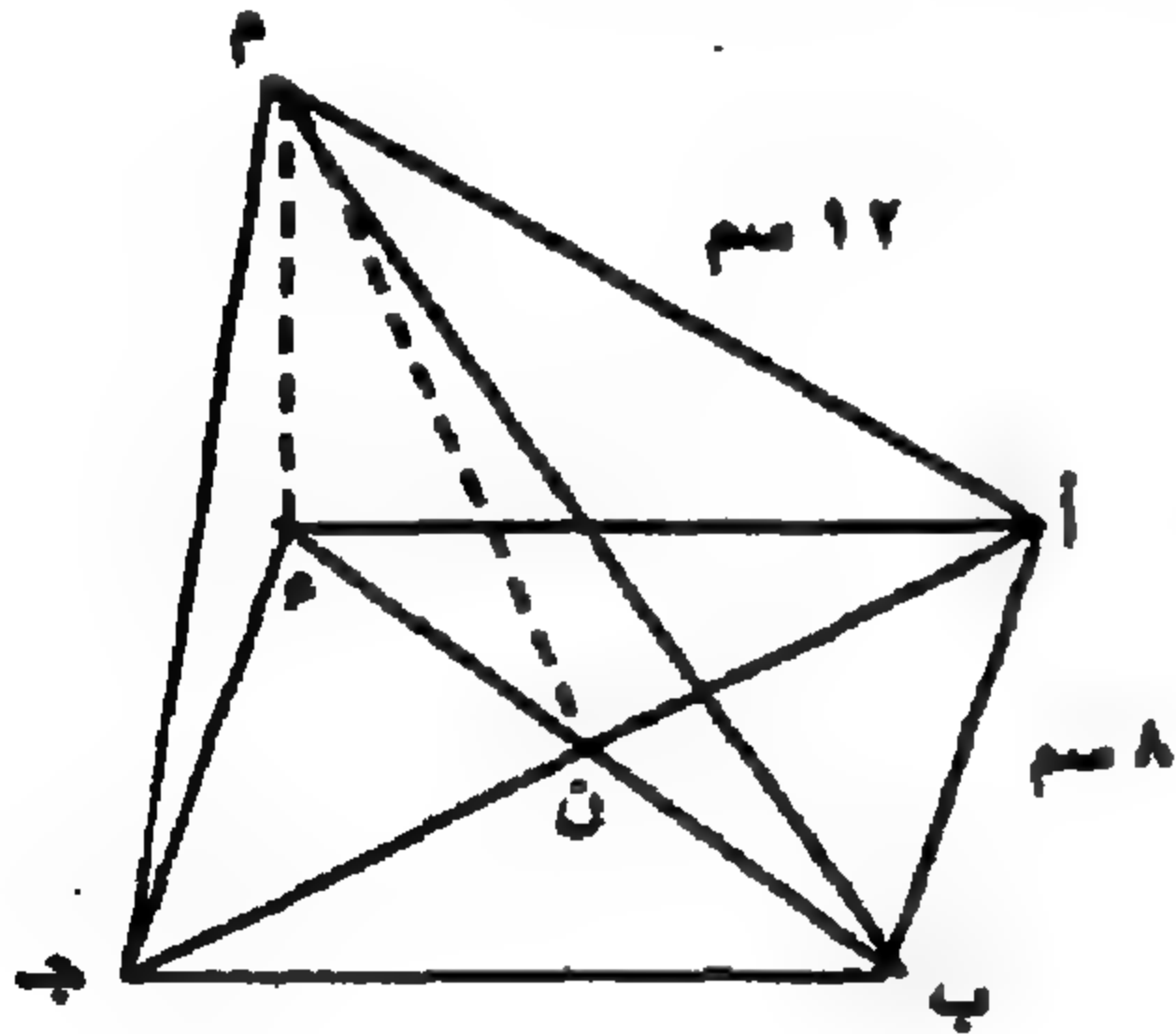
$$\therefore \angle (A-H-AE) = \dots\dots\dots$$

مثال : م أ ب ج د هرم رباعي قائم طول حرفه الجانبي ١٢ سم و طول ضلع قاعدته ٨ سم -

أوجد قياس زاوية ميل الحرف م أ على المستوى أ ب ج د هـ .

الحل

زاوية ميل الحرف م أ على المستوى أ ب ج د هـ هي المحصورة بينه وبين مسقطه على المستوى هي زاوية (> م أ ن)



$$\therefore \text{أ ب ج د هـ مربع طول ضلعه ٨ سم}$$

$$\therefore \text{طول قطره } \sqrt{2} \times 8$$

$$\therefore AN = \sqrt{2} \times 4$$

في $\triangle MAN$ قائم الزاوية في ن (لماذا) ؟

$$\therefore \cos (ANM) = \frac{AN}{AM} = \frac{\sqrt{2} \times 4}{12} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\therefore \angle (ANM) = 52^\circ 61'$$

مثال: أ ب ج د هـ مربع ضلعه ١٢ سم تقاطع قطراه في ن ، رسم ن م \perp المستوى أ ب ج د هـ ، وكان

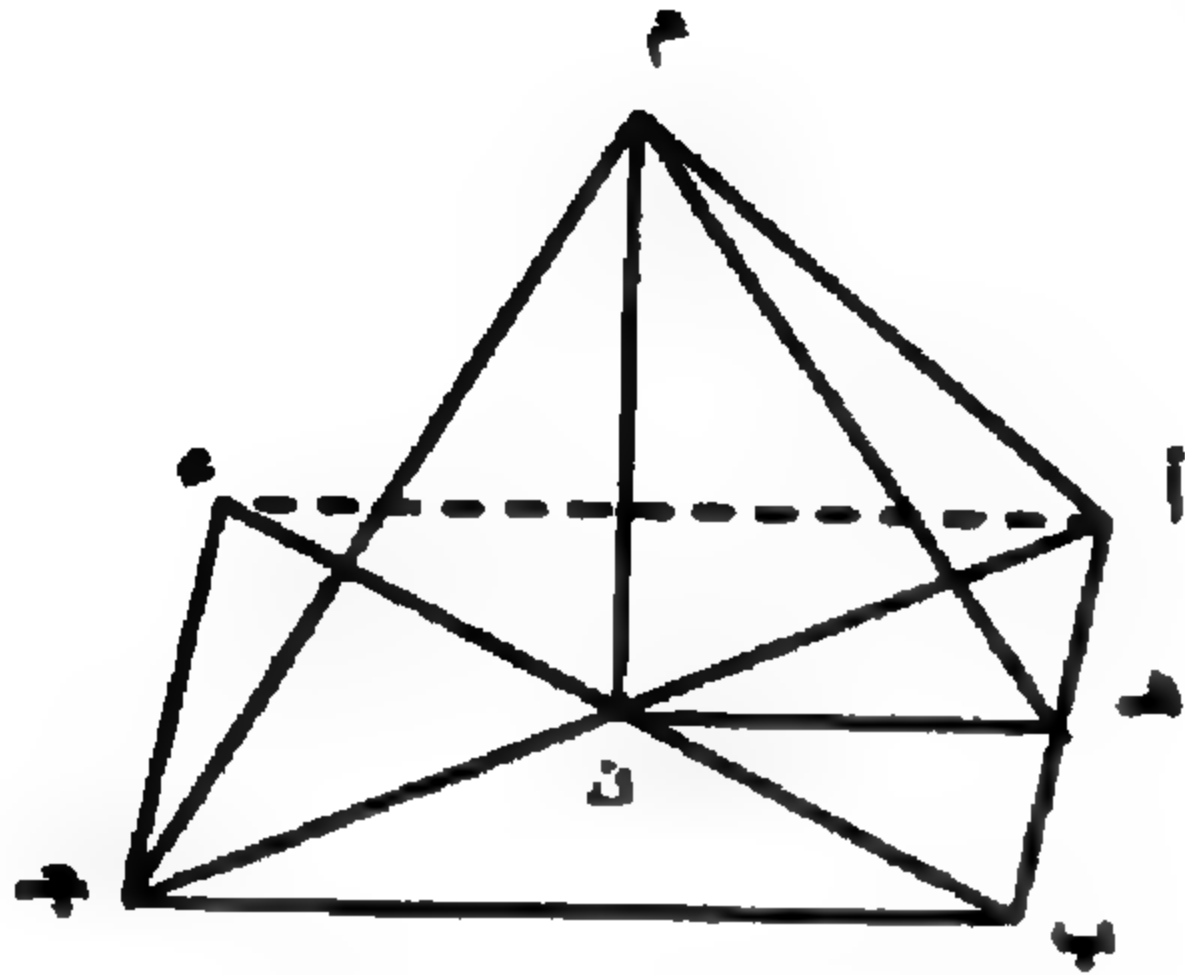
$$MN = 6 \text{ سم ، هـ منتصف أ ب .}$$

(أولاً) أثبت أن المستوى م أ ج \perp المستوى ب ج د هـ

(ثانيا) أثبت أن المستوى $\overleftrightarrow{AB} \perp$ المستوى ABJ
 (ثالثا) أوجد قياس $(M - \overleftrightarrow{AB} - E)$

الحل

(أولا) $\because \overline{MN} \perp$ المستوى ABJ ، $\overline{MN} \subset$ في المستوى MAJ
 \therefore المستوى $MAJ \perp$ المستوى ABJ



(ثانيا) في $\Delta NAB: NA = NB$ ، H منتصف \overline{AB}

$\therefore \overline{NH} \perp \overline{AB}$ — (١)

، $\because \overline{MN} \perp$ المستوى ABJ

$\therefore \overline{MN} \perp \overline{AB}$ — (٢)

من (١) ، (٢)

$\therefore \overline{AB} \perp$ كل من \overline{MN} ، \overline{NH}

$\therefore \overline{AB} \perp$ المستوى MNH

(ثالثا) $\because \overline{NH}$ هو مسقط المائل \overline{MN} ، $\overline{NH} \perp \overline{AB}$

$\therefore \overline{MN} \perp \overline{AB}$

$\therefore \angle MNH$ هي زاوية مستوية للزاوية الزوجية $(M - \overleftrightarrow{AB} - E)$

في ΔNAB :

$\therefore H$ منتصف \overline{AB} ، N منتصف \overline{AC}

$\therefore \overline{NH} = \frac{1}{2} \overline{BC} = 6$ سم

$\therefore \text{ظا} (\angle MNH) = \frac{MN}{NH} = \frac{6}{6} = 1$

$\therefore \angle MNH = 45^\circ$ ، $\therefore (M - \overleftrightarrow{AB} - E) = 45^\circ$

مثال:

(أولا) ABJ مربع طول ضلعه ٨ سم - رسمت AM عمودية على مستوى المربع حيث $A =$

$8\sqrt{3}$ سم .

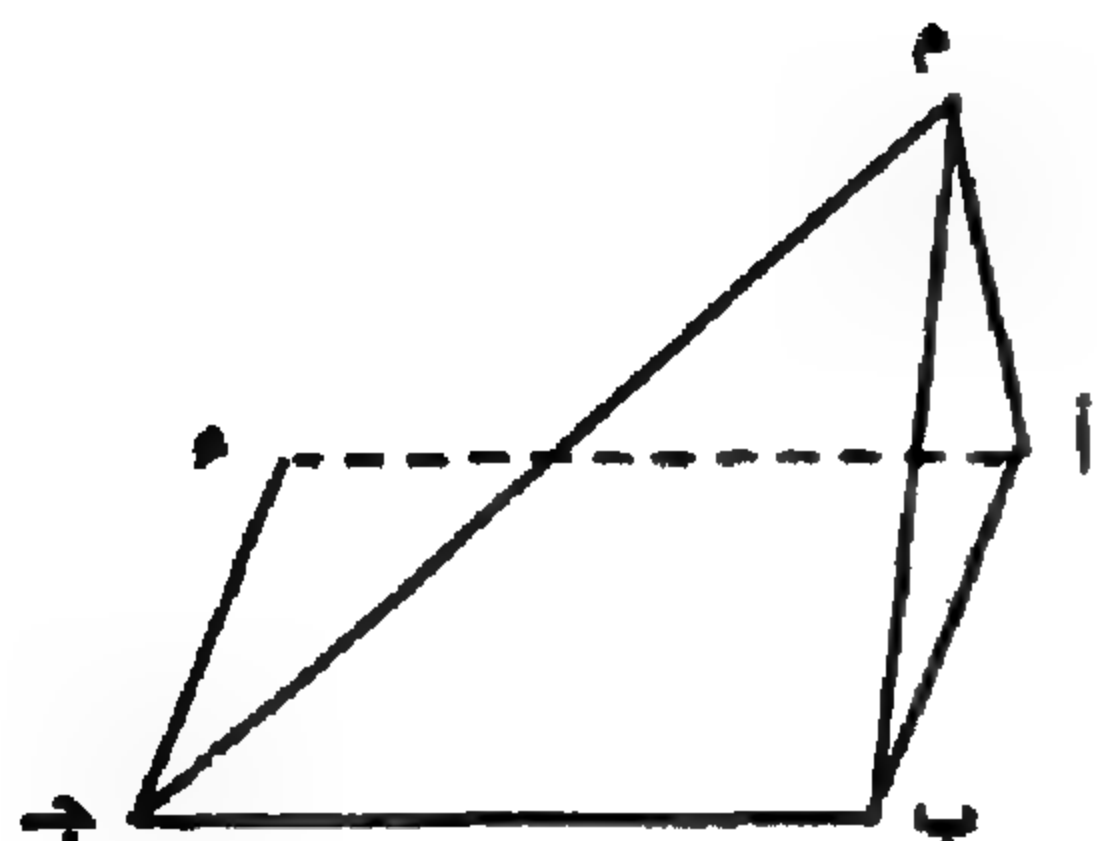
[أ] أثبت أن : $\overline{MB} \perp \overline{AB}$

[ب] احسب قياس الزاوية الزوجية بين المستويين MAJ ، ABJ

(ثانياً) م س ص ع هرم ثلاثي فيه م س = ص ع ، م ص = م ع ، ن منتصف ص ع - اثبت أن:
المستوى م ن س \perp س ص ع

الحل

(أولاً)



[أ] $\because \overline{MA} \perp$ المستوى أب جء

\because أب هو مسقط المائل م ب على هذا المستوى

$\therefore \overline{AB} \perp \overline{MB}$ ،

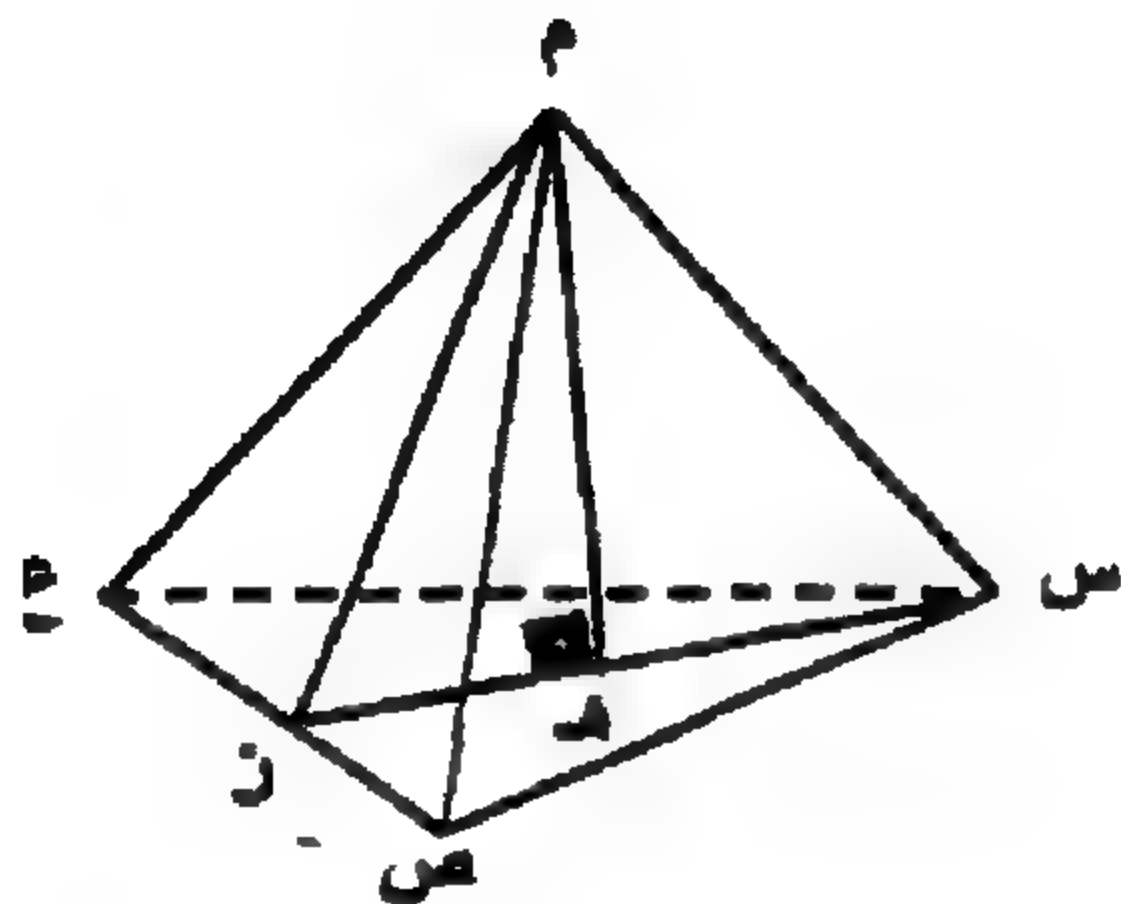
$\therefore \overline{MB} \perp \overline{AB}$

[ب] $\therefore \angle MBN$ هي زاوية مستوية للزاوية الزوجية (م - ب ج - أ)

$$\therefore \text{طا} (\angle MBN) = \frac{\angle A}{AB} = \frac{37.8}{8} = 4.725$$

$$\therefore \angle MBN = 60^\circ \quad \therefore \angle MBN = 60^\circ$$

(ثانياً)



في Δ س ص ع

\because س ص = س ع ، ن منتصف ص ع

س ن \perp ص ع ---- (١)

في Δ م ص ع :

\because م ص = م ع ، ن منتصف ص ع

\therefore م ن \perp ص ع ---- (٢)

من (١) ، (٢) \therefore ص ع \perp كل من س ن ، م ن

\therefore ص ع \perp المستوى م س ن ، \because م ه \supset في المستوى م س ن

، ص ع \perp م ه ---- (٣) ، س ن \perp م ه ---- (٤)

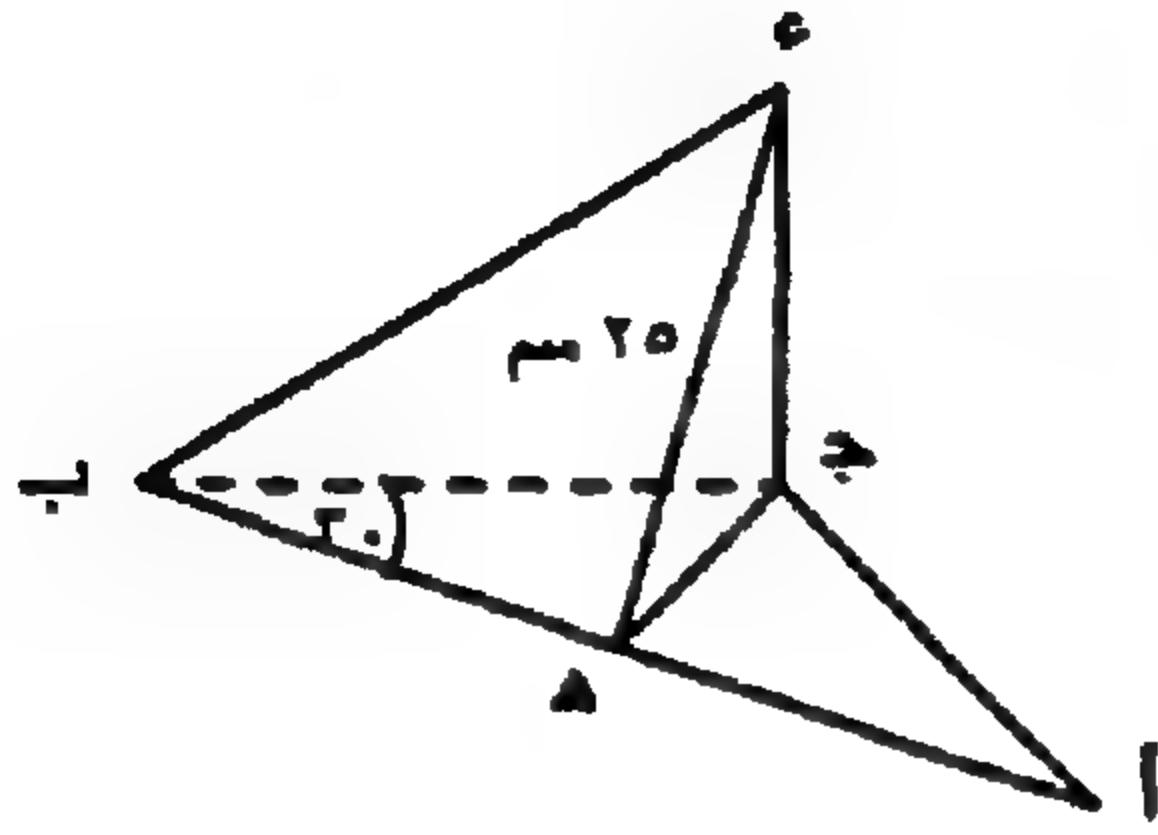
من (٣) ، (٤) \therefore م ه \perp كل من ص ع ، س ن

\therefore م ه \perp المستوى س ص ع \therefore المستوى م س ن \perp المستوى س ص ع

مثال:

(أولاً) $\triangle ABC$ فيه $\angle C = 30^\circ$ ، $BC = 14$ سم. رسم $\overline{JE} \perp$ المستوى ABC ،
ثم رسم رسم $\overline{JE} \perp \overline{AB}$ فقطعها في النقطة H . فإذا كان $EH = 25$ سم. فأوجد:
[أ] طول \overline{JE} . [ب] ظل زاوية ميل \overline{BE} على المستوى ABC .

الحل



[أ] $\because \overline{JE} \perp$ المستوى ABC

$\therefore \overline{JE}$ هو مسقط المائل \overline{BE} على المستوى ABC

$\therefore \overline{EH} \perp \overline{AB}$ ،

$\therefore \overline{JE} \perp \overline{AN}$

في $\triangle BEH$ $\because \angle E = 90^\circ$

$\therefore BE = BH$ جتا $30^\circ = 7$ سم

في $\triangle EHE$ $\because \angle E = 90^\circ$

$\therefore (EH)^2 = (BE)^2 - (EH)^2 = (7)^2 - (25)^2 = 576$

$\therefore JE = \sqrt{576} = 24$ سم

[ب] $\because \overline{BE} \perp$ المستوى ABC ، \overline{EH} هو مسقط المائل \overline{BE} على المستوى ABC .

$\therefore (\angle BEH)$ هي زاوية ميل \overline{BE} على المستوى ABC .

في $\triangle BEH$ $\because \angle E = 90^\circ$

$\therefore BE = BH$ جتا $30^\circ = \sqrt{3} \cdot 7$ سم

طا $(\angle BEH) = \frac{BE}{EH} = \frac{\sqrt{3} \cdot 7}{25}$

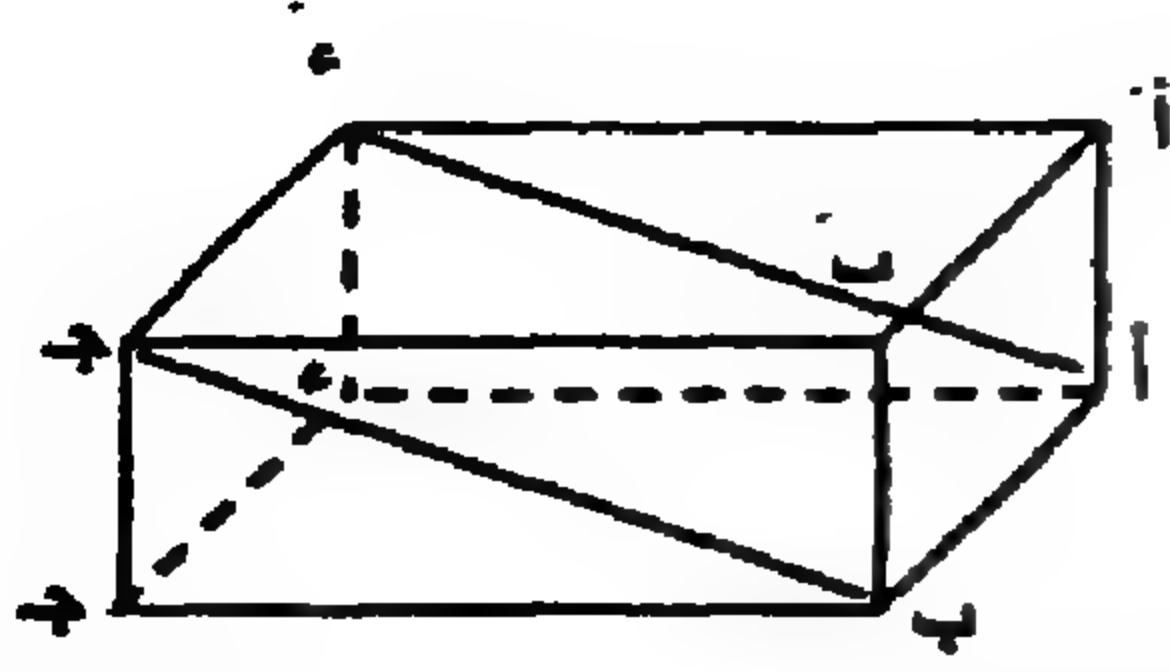
(ثانياً) ABC $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ متوازي مستطيلات، فيه $AB = 10$ سم، $BC = 20$ سم، $BD = 15$ سم.

[أ] أثبت أن الشكل $ABCD$ مستطيل، واحسب مساحة سطحه.

[ب] احسب قياس الزاوية الزوجية بين المستوى ABC \overline{CD} والمستوى $ABCD$.

الحل

[أ] $\overline{AB} \perp$ المستوى BCD ، $\overline{BC} \perp$ المستوى BCD



∴ $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ ---- (١)

، $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$ ويساويه ---- (٢)

من (١)، (٢) ∴ الشكل AB جزء مستطيل

، في $\triangle ABC$ ∴ $\angle C = 90^\circ$

$$625 = 1(15) + 1(20) = 1(BC) + 1(AB) = 1(BC + AB)$$

$$\therefore BC + AB = \sqrt{625} = 25 \text{ سم}$$

$$\text{مساحة المستطيل } AB \times BC = 25 \times 10 = 250 \text{ سم}^2$$

[ب] ∴ $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ ، $\overline{AB} \perp \overline{AC}$

∴ $\angle B$ هي زاوية مستوية للزاوية الزوجية ($\overline{AB} - \overline{BC}$)

$$\text{ظا } (\angle B) = \frac{BC}{AB} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \angle B = 36.87^\circ$$

مثال: م AB حرم ثلاثي فيه AB ح مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه ٤٠ سم، $AM \perp$

المستوى AB ح، $AM = \sqrt{3} \times 20 = 34.64$ سم، H منتصف BC .

(أولاً) اثبت ان المستوى M $AM \perp$ المستوى AB ح. (ثانياً) احسب قياس ($\angle M - \overline{BC} - \overline{AB}$)

الحل

(أولاً) $AM \perp$ المستوى AB ح، $M \supset$ المستوى M AM

∴ المستوى M $AM \perp$ المستوى AB ح.

(ثانياً) $\triangle ABC$ ح متساوي الأضلاع، H منتصف BC

∴ $AM \perp \overline{BC}$ ---- (١)

، ∴ AM هو مسقط المائل M H على المستوى AB ح.

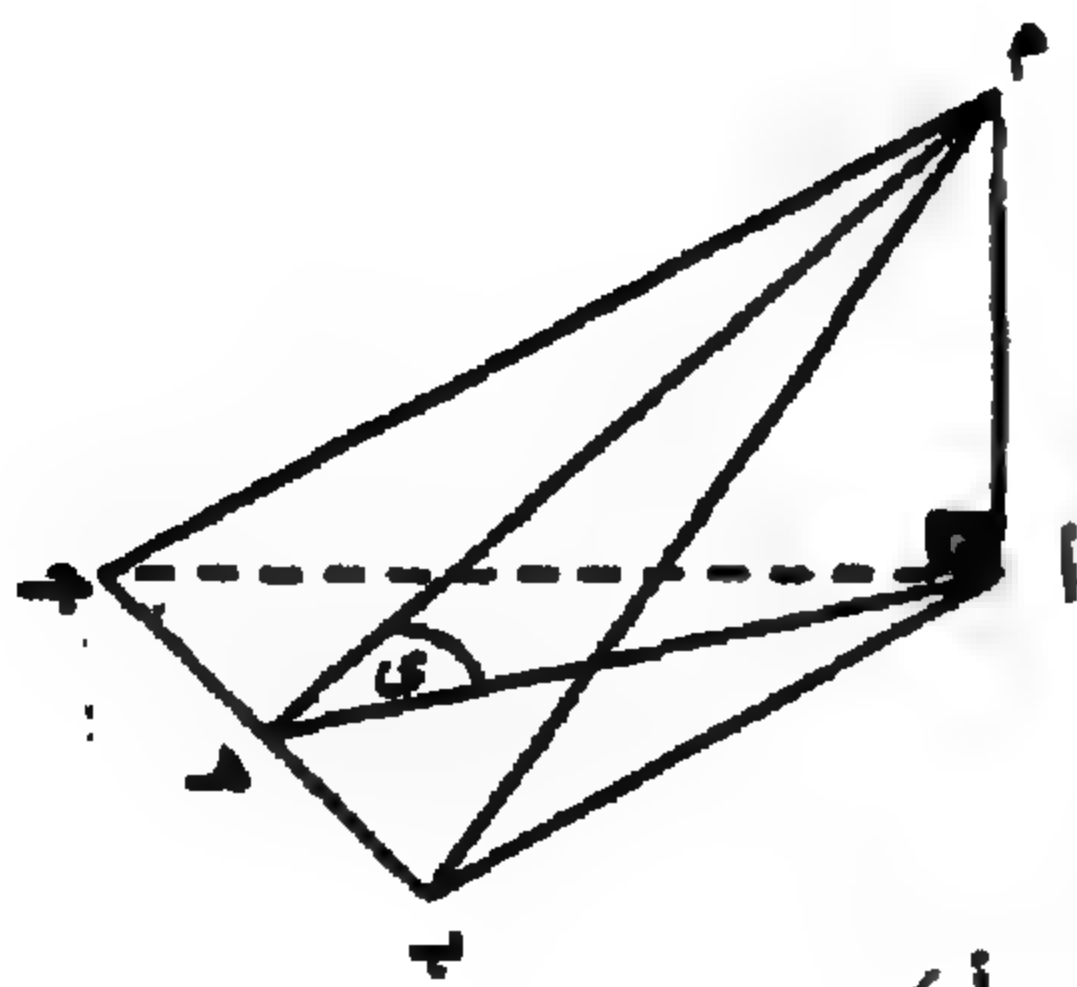
∴ $MH \perp \overline{BC}$ ---- (٢) من (١)، (٢)

∴ $\angle M$ هي زاوية مستوية للزاوية الزوجية ($\angle M - \overline{BC} - \overline{AB}$)

$$\therefore \angle M = 60^\circ$$

$$\therefore \text{ظا } \angle M = \frac{MH}{AM} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \angle M = 30^\circ$$



مثال: ا ب ج مثلث فيه ق (\angle) = 60° و ا ب = سم . رسم ب ن \perp ا ج ويقطعها في ن ،

ب ه \perp المستوى ا ب ج ، وكان ب ه = سم .

(اولا) اثبت ان : ن ه \perp ا ج (ثانيا) اوجد ق (ب - ا ج - ه)

الحل

(اولا) \because ب ه \perp المستوى ا ب ج ، ن ب هو مسقط

المائل ن ه على المستوى ا ب ج

، \because ب ن \perp ا ج \therefore ه ن \perp ا ج ،

(ثانيا) في Δ ا ن ب ق (\angle) = 90°

\therefore ن ب = ا ب جا $56^\circ = 37^\circ$ سم

، \because كلا من ن ب ، ن ه \perp ا ج

\therefore \angle ه ن ب هي زاوية مستوية للزاوية الزوجية (\angle ب - ا ج - ه)

ظا (\angle ه ن ب) = $\frac{ب}{ن ب} = \frac{6}{37} = \frac{1}{47}$

\therefore ق (\angle ه ن ب) = 30° \therefore ق (ب - ا ج - ه) = 30°

مثال: س ص ع مثلث فيه ق (\angle) = 30° ، س ص = ٢٠ سم . ص ه \perp مستوى المثلث

س ص ع بحيث ص ه = 37° سم . رسمت ص ه \perp س ع تقطعها في ه - اثبت ن:

ه ه \perp س ع ، ومن ذلك احسب قياس الزاوية الزوجية بين المستويين ه ه س ع ، س ص ع

الحل

\because ه ه \perp المستوى س ص ع

\therefore ه ه \perp ص ه

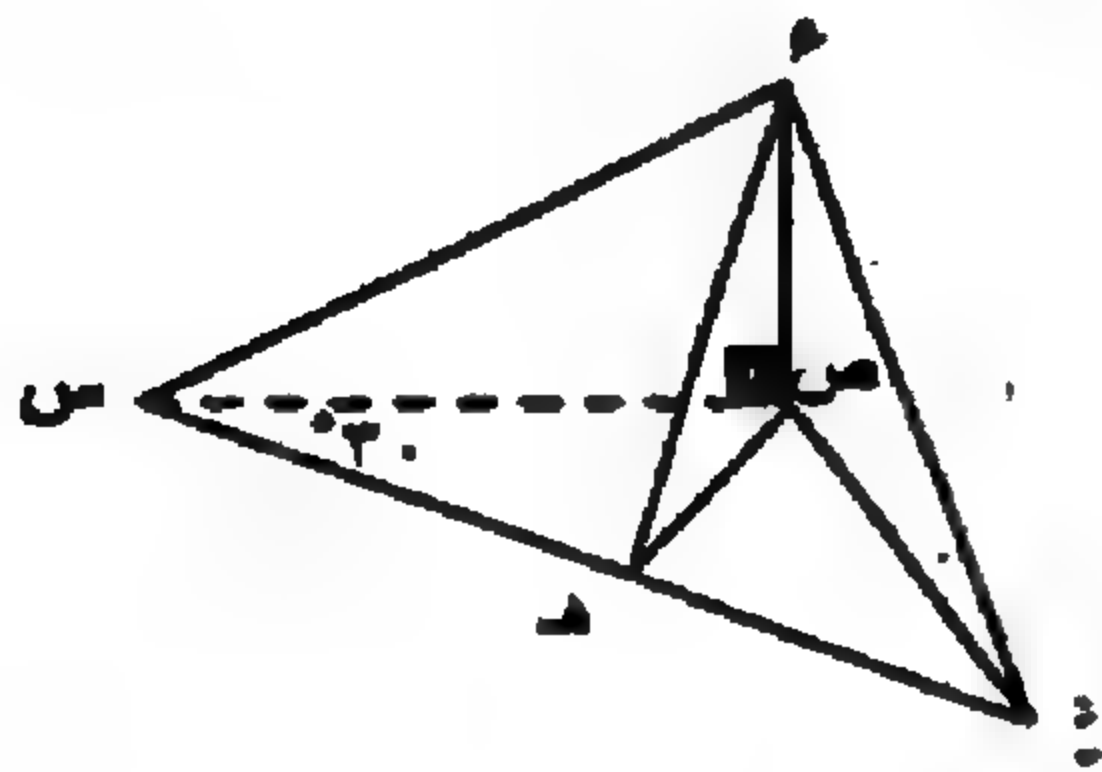
، \because ص ه هو مسقط المائل ه ه

، ص ه \perp س ع \therefore ه ه \perp س ع

\angle ه ه ص هي زاوية مستوية للزاوية الزوجية (\angle ه - ع - س - ص)

في Δ س ه ص : ص ه = س ص جا $30^\circ = \frac{1}{2} \times 20 = 10$ سم

في Δ ه ه ص : ق (\angle ه ه ص) = 90°



$$\therefore \text{ظا} (\angle \text{هـ ص}) = \frac{\text{ص هـ}}{\text{هـ ص}} = \frac{\sqrt{10}}{10} = \sqrt{10}$$

$$\therefore \text{ق} (\angle \text{هـ ص}) = 60^\circ \quad \therefore \text{ق} (\angle \text{هـ غ ص}) = 60^\circ$$

مثال:

(أولاً) أ ب ج هـ هرم ثلاثي فيه $\text{أ ب} \perp$ المستوى ب ج هـ ، $\text{ب هـ} = 10$ سم، $\text{أ ب} = 5$ سم،

ق ($\angle \text{ب هـ ج}$) = 30° . رسم $\text{أ هـ} \perp$ ج هـ قطعها في النقطة هـ . أوجد:

[أ] طول ب هـ [ب] قياس الزاوية بين أ هـ والمستوى ب ج هـ

(ثانياً) أ ب ج هـ مربع رسمت أم عمودية على كل من أ ب ، أ هـ . أثبت أن:

[أ] $\text{أ هـ} \perp$ المستوى أ م هـ [ب] المستويان أ ب ، م أ هـ متعامدان

[ج] إذا كان $\text{أ م} = \text{أ هـ}$ ، فلو جد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين م هـ ج ، أ ب ج هـ

الحل

(أولاً)

[أ] $\therefore \overline{\text{ب هـ}}$ هو مسقط المائل أ هـ على المستوى ب ج هـ

$$\therefore \overline{\text{أ هـ}} \perp \overline{\text{ج هـ}}$$

$$\therefore \overline{\text{ب هـ}} \perp \overline{\text{ج هـ}}$$

في $\triangle \text{ب هـ ج}$: $\therefore \text{ب هـ} = \text{ب ج} \text{ جا } 30^\circ = 5$ سم

[ب] $\angle \text{أ هـ ب}$ هي زاوية ميل $\overline{\text{أ هـ}}$ على المستوى ب ج هـ

في $\triangle \text{أ ب هـ}$: $\therefore \text{ظا} (\angle \text{أ هـ ب}) = \frac{\text{ص هـ}}{\text{هـ ص}} = \frac{5}{5} = 1$

$$\text{ق} (\angle \text{أ هـ ب}) = 45^\circ$$

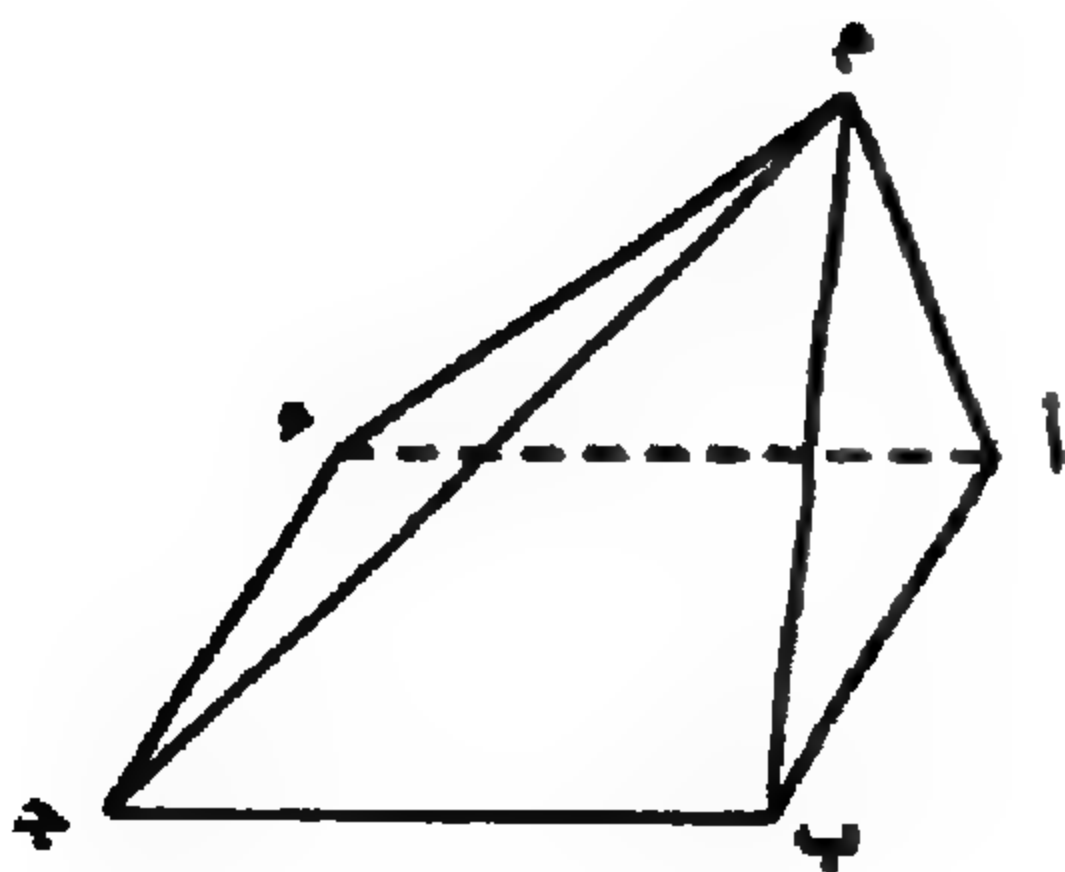
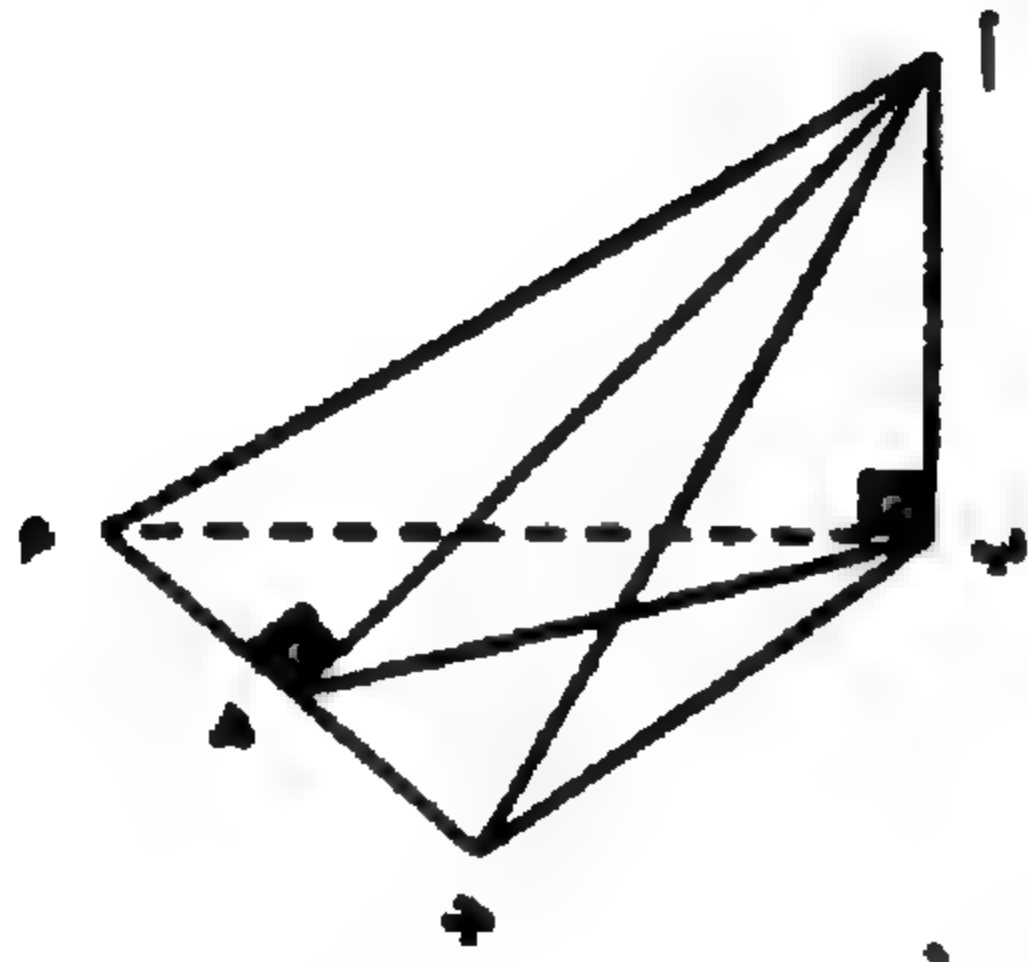
(ثانياً)

[أ] $\therefore \overline{\text{أ م}} \perp$ كل من $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ هـ}}$

$\therefore \overline{\text{أ م}} \perp$ المستوى أ ب ج هـ

$\therefore \overline{\text{ج هـ}}$ محتوى في المستوى أ ب ج هـ

$$\therefore \overline{\text{أ م}} \perp \overline{\text{ج هـ}} \quad \text{--- (١)}$$



$$، \quad \overline{آء} \perp \overline{جء} \quad \text{--- (٢)}$$

من (١)، (٢) $\therefore \overline{جء} \perp$ كل $\overline{آب}$ ، $\overline{آم}$

$\overline{جء} \perp$ المستوى $أمء$

[ب] $\therefore \overline{آب} // \overline{آءجء}$ ، $\overline{آب} \perp$ المستوى $أمء$

، $\therefore \overline{آب} \subset$ في المستوى $أم ب$

\therefore المستوى $أم ب \perp$ المستوى $أمء$

[ج] $\therefore \overline{جء} \perp$ المستوى $أمء$ $\therefore \overline{جء} \perp \overline{مء}$

، $\overline{جء} \perp \overline{آء}$

$\therefore > أمء$ هي زاوية مستوية للزاوية الزوجية ($أ - \overrightarrow{جء} - م$)

\therefore ظا ($> أمء$) $= \frac{م}{أ} = ١$ \therefore ق ($> أمء$) $= ٩٠^\circ$

\therefore ق ($> أ - \overrightarrow{جء} - م$) $= ٩^\circ$

مثال:

[١] $أ ب ج د آ ب ج د$ منشور مائل فيه الوجه $ب ج د$ مستطيل. رسم الشعاع $\overrightarrow{ب آ} \perp \overline{آ آ}$

فقطعها في $ء$. أثبت أن $\overline{آ آ} \perp$ المستوى $ء ب ج$ ، وإذا كان $أ ب = ٥$ سم، $ب ء = ٣$ سم.

أوجد قياس الزاوية بين $\overline{آ ب}$ والمستوى $ء ب ج$.

[ب] $م أ ب ج د$ هرم ثلاثي رأسه $م$ ، قاعدته المثلث المتساوي الأضلاع $أ ب ج$ الذي طول ضلعه

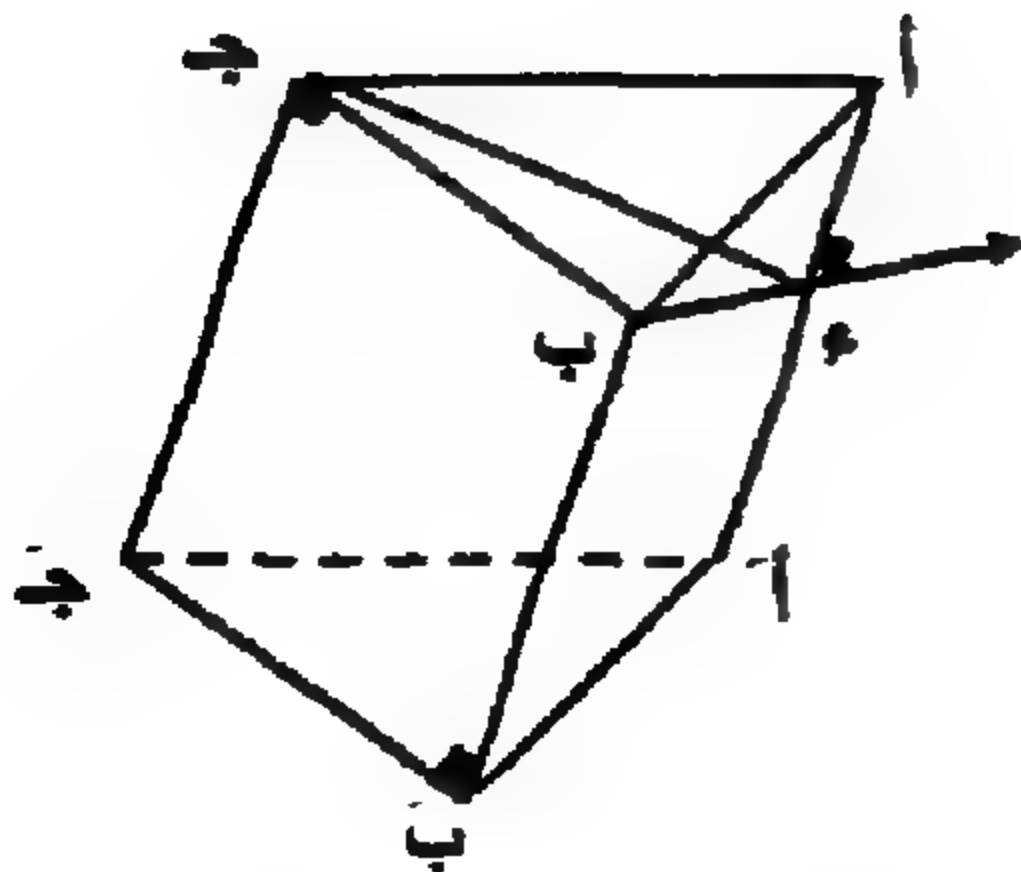
١٢ سم، ق ($> م أ ب$) $=$ ق ($> م أ ج$) $= ٩٠^\circ$ ، $م أ = ٦$ سم، $ء$ منتصف $\overline{ب ج}$.

(أولاً) أثبت أن $\overline{ب ج} \perp$ المستوى $م أ ء$.

(ثانياً) أوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين $م ب ج$ ، $أ ب ج$.

(ثالثاً) أثبت أن : المستويين $م أ ء$ ، $م ب ج$ متعامدان.

الحل



[١] $\therefore \overline{آ آ} // \overline{ج ج}$ ، $\overline{ج ج} \perp \overline{ج ب}$

(أولاً) $\therefore \overline{آ آ} \perp \overline{ج ب}$ ، $\overline{آ آ} \perp \overline{ب آ}$

، $\therefore \overline{آ آ} \perp$ كل من $\overline{ج ب}$ ، $\overline{ب آ}$

$\therefore \overline{آ آ} \perp$ المستوى $ء ب ج$

∴ $\overline{بء}$ هو مسقط المائل $\overline{آب}$ على المستوى $بءج$.
 ∴ $\angle آبء$ هي زاوية ميل $\overline{آب}$ على المستوى $بءج$.

$$\text{جتا } (\angle آبء) = \frac{بء}{آب} = \frac{٢}{٥}$$

$$\therefore \text{ق } (\angle آبء) = ٦٨^\circ ٥٣'$$

[ب]

(أولاً) ∴ $\overline{مآ} \perp \overline{آج}$ ، $\overline{مآ} \perp \overline{آب}$

∴ $\overline{مآ} \perp$ المستوى —

∴ $\overline{مآ} \perp$ أى مستقيم فى المستوى $آبج$.

∴ $\overline{مآ} \perp \overline{بج}$ — (١)

∴ المثلث $آبج$ متساوى الأضلاع

، $ء$ منتصف $\overline{بج}$ ∴ $\overline{آء} \perp \overline{بج}$ — (٢)

من (١)، (٢) ∴ $\overline{بج} \perp$ كل من $\overline{مآ}$ ، $\overline{آء}$

∴ $\overline{بج} \perp$ المستوى $آمء$.

(ثانياً) ∴ $\overline{آء}$ هو مسقط المائل $مء$ على المستوى $آبج$

، $\overline{آء} \perp \overline{بج}$ ∴ $مء \perp \overline{بج}$

$\angle آمء$ هي زاوية مستوية للزاوية الزوجية ($\overleftrightarrow{بج} - م$)

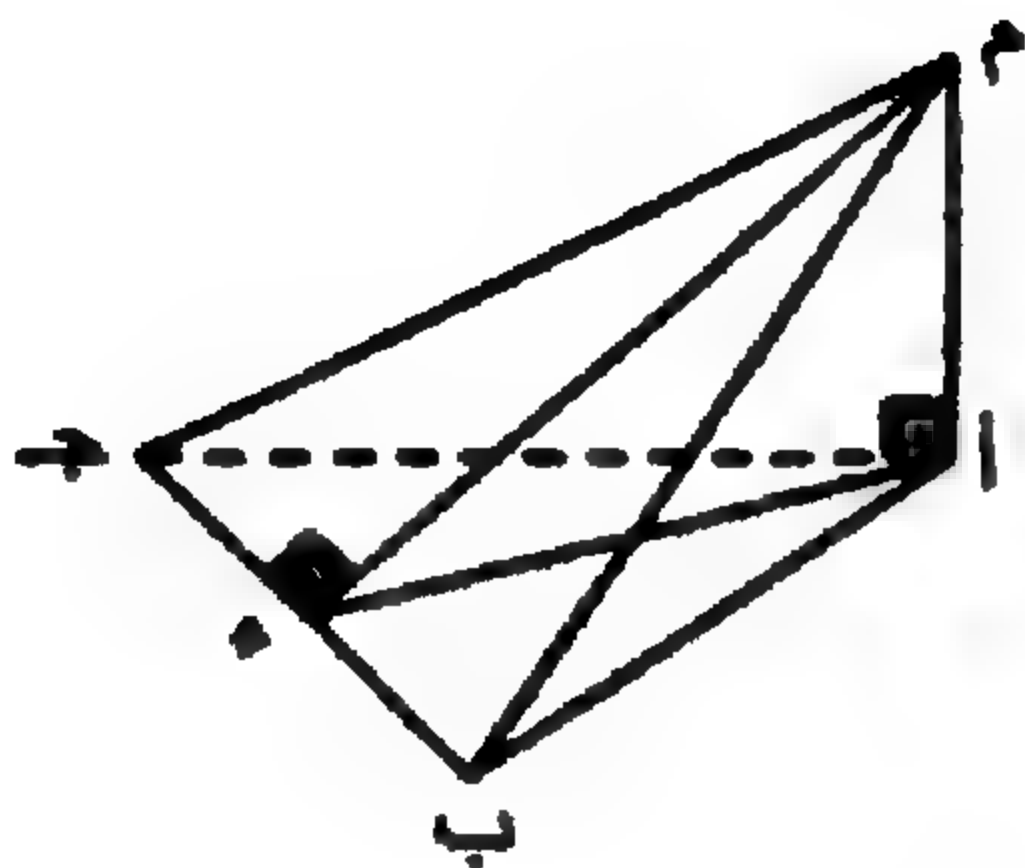
فى $\Delta آبء$: $آء = آب$ جا $٦٠^\circ = ٣٧٦$

$$\text{طا } (\angle آمء) = \frac{آم}{آء} = \frac{٦}{٣٧٦} = \frac{١}{٦٢٧}$$

$$\therefore \text{ق } (\angle آمء) = ٦٠^\circ$$

(ثالثاً) ∴ $\overline{بج} \perp$ المستوى $آمء$ ، $\overline{بج} \supset$ فى المستوى $آبج$

∴ المستوى $مبج$ \perp المستوى $آمء$.

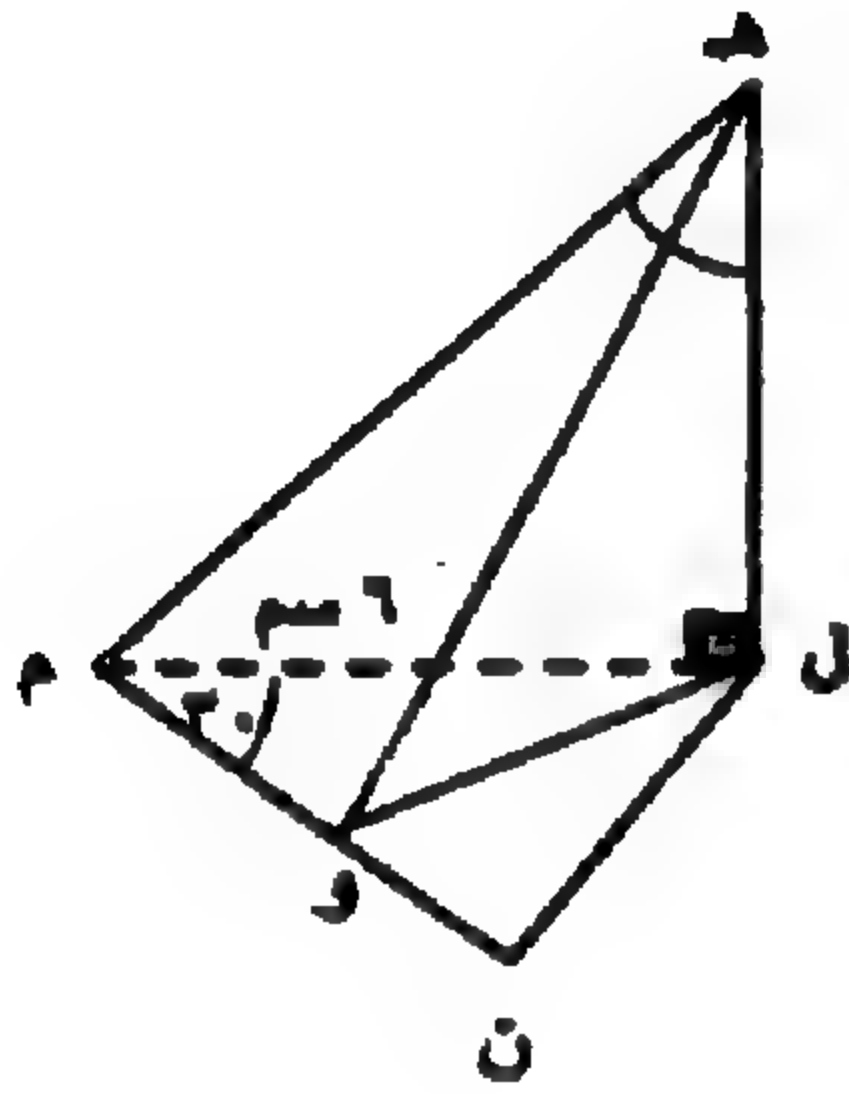


مثال:

[أ] ل م ن مثلث فيه ل م = ٦ سم ، ق (> ل م ن) = ٥٣٠ ، رسم ل و \perp م ن ويقطعها في و
رسم ل ه \perp المستوى ل م ن بحيث ق (> م ه ل) = ٥٣٠ ، أوجد طول ل ه ، وظل
الزاوية بيم ه و والمستوى ل م ن .

[ب] أ ب ج د مربع طول ضلعه = ٨ سم تقاطع قطراه في ه ، رسمت ه م عمودية علي
المستوى أ ب ج د حيث ه م = ٤ سم . أوجد قياس الزاوية الزوجية ق (> م - أ ب - ه)
، وإذا مر مستو بالضلع أ ب وقطع م ع في و ، وقطع م ج في ل .
أثبت أن : الشكل أ ب ل و شبه منحرف .

الحـلـ



[أ] \therefore ل ه \perp المستوى ل م ن

\therefore ل ه \perp ل م

$\therefore \Delta$ ه ل م ثلاثيني مستيني

\therefore ل ه = $\sqrt{36} = ٦$ سم .

\therefore ل و هو مسقط المائل ه و

ل و \perp ن م \therefore ه و \perp ن م

Δ ل و م قائم الزاوية في و

ق (> م) = ٥٣٠ \therefore ل و = $\frac{1}{3}$ ل م = ٣ سم

\therefore طا (> ه و ل) = $\frac{\text{ه ل}}{\text{ل و}} = \frac{\sqrt{36}}{3} = \sqrt{12}$

[ب] نرسم ه ن \perp أ ب ، \therefore ه منتصف أ ب

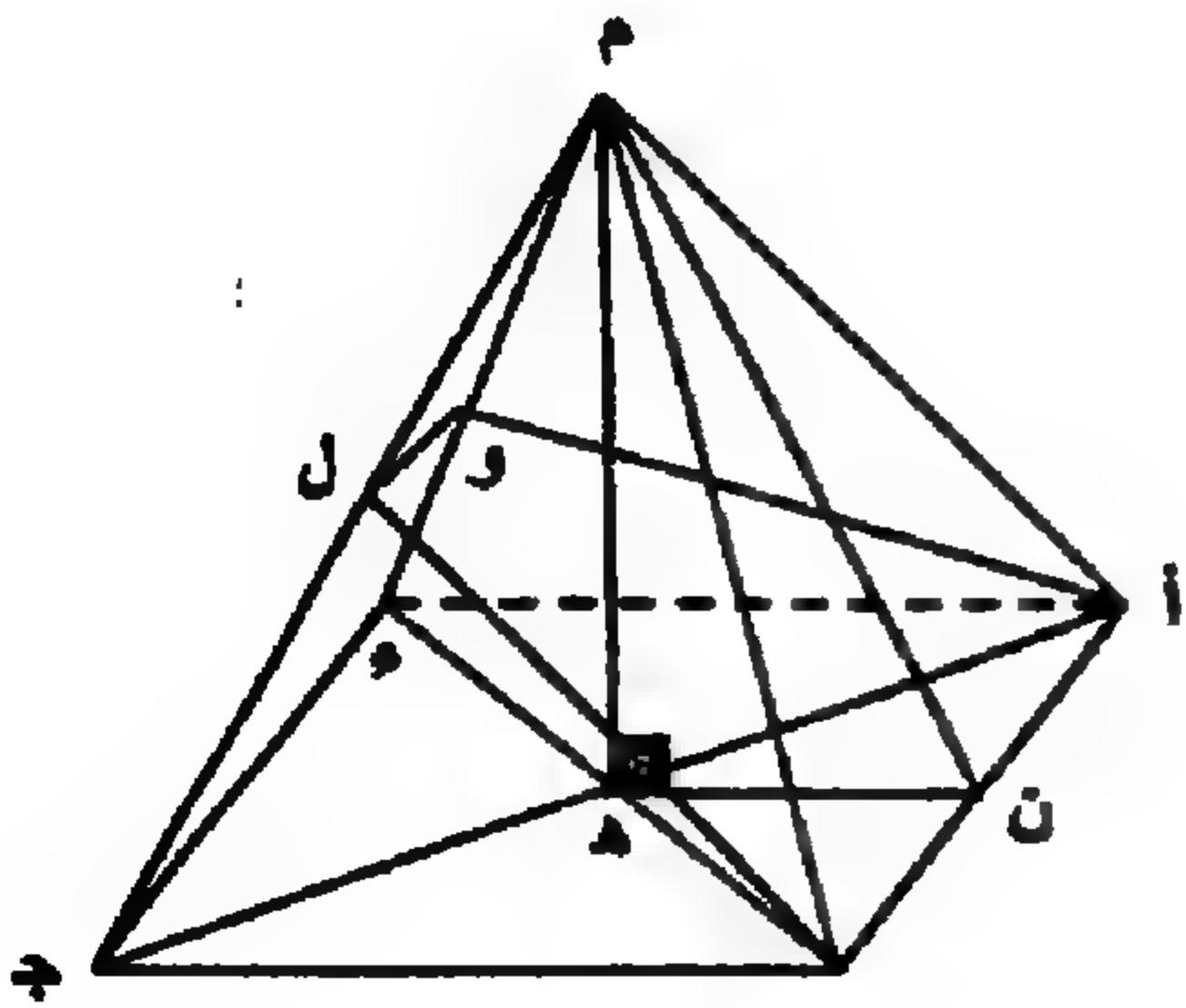
\therefore ن منتصف أ ب

\therefore ن ه = $\frac{1}{4}$ ب ج = ٤ سم

ثم نرسم م ن فيكون م ن \perp أ ب

\therefore (> م ن ه) هي زاوية مستوية

للزاوية الزوجية (> م - أ ب - ه)



$$\therefore \text{مط} (> \text{م} - \overrightarrow{\text{أب}} - \text{هـ}) = \frac{\text{م هـ}}{\text{ن هـ}} = \frac{\text{هـ}}{\text{هـ}}$$

$$\therefore \text{ق} (> \text{م} - \overrightarrow{\text{أب}} - \text{هـ}) = \text{هـ}^{\circ}$$

\therefore م ج ، م هـ يكونان مستويين محتوي ج هـ ، أ ب // ج هـ

\therefore أ ب // المستوي م ج هـ

، \therefore المستوي أ ب ل و يقطع المستوي م ج هـ في ل و

\therefore أ ب // ج هـ — (١)

، \therefore أ ب // ج هـ \therefore ل و // ج هـ

\therefore Δ م ل و \approx Δ م ج هـ

$$\therefore \frac{\text{ل و}}{\text{ج هـ}} = \frac{\text{م ل}}{\text{م ج}} ، \therefore \text{م ل} > \text{م ج} \therefore \text{ل و} > \text{ج هـ}$$

، \therefore ج هـ = أ ب \therefore ل و > أ ب — (٢)

من (١) ، (٢) \therefore الشكل أ ب ل و شبه منحرف

تمرين (٧)

(١) س ، ص مستويان متقاطعان في ا ب ، م نقطة لا تنتمي لأي منهما . رسم م ج ، م ع عمودين عليهما ليقطعا س في ج ، ص في ع ثم رسم ج ه ل ا ب أثبت ان ع ه ل ا ب .

(٢) ا ب ج قائم الزاوية في ا فيه ا ب = ٢ ا ج ، رسم ا م عموديا على مستوي المثلث ثم رسم العمود م ه على ب ج فقطعه في ع - أثبت ان ب ع = ٤ ع ج .

(٣) س ، ص مستويان متقاطعان في ا ب ، النقطة م و ا ب ، م ن د ص ويصنع زاوية حادة مع ا ب ، رسم ن ج ل س ليقطعه في ج كما رسم ج ل ل ا ب ليقطعه في ل - أثبت ان ح ا (> ن م ح) = ح ا (> ن ل ح)

(٤) م م ، م ص محتويان في نفس المستوى ومتعامدان ، ط نقطة لا تنتمي إلى رسم ط ع عمودى على م م ويقطعه في ع ، ط ك ل م ص ويقطعه في ك كما رسم ط ي ل المستوى م م ص ويقطعه في ي - أثبت ان :

[١] م ك ي ع مربع [٢] ط م يميل بزاوية قياسها ٤٥° مع المستوى م م ص

(٥) س ، ص مستويان متقاطعان في ا ب رسم المستوى ع يوازي ا ب ويقطع المستوى س في ج ع ، المستوى ص في ه ع - أثبت ان مجموع قياسات الزوايا الزوجية ا ب ، ج ع ه و = ١٨٠°

(٦) ا ب ج ا ب ج منشور ثلاثى قائم قاعدته مثلث متساوى الاضلاع طول ضلعه ١٠ سم

فإذا كان $11 = \sqrt{10}$ سم - أوجد

[١] قياس زاوية ميل ا ج على القاعدة .

[٢] ظل قياس الزاوية الزوجية (ا - ج ب - ا)

(٧) ا ب ج ع مستطيل رسم عمودان ج ه ، ع و على مستوى هذا المستطيل بحيث كان

ج ع = ١٥ سم ، و ب = $\sqrt{20}$ سم ، و ب يميل على القاعدة بزاوية قياسها ٥٣°

- احسب مساحة سطح Δ ب ع و ، ق (> ب - ع و - ج)

(٨) أ ب ج د مستوى أفقى يقطع مستوى متوازى الأضلاع أ ب و د فى $\vec{A\vec{B}}$ وقياس الزاوية الزوجية بينهما $= 60^\circ$ فإذا كان ق ($> \text{أ ب د}$) $= 30^\circ$ ، و د $= 40^\circ$ سم - احسب طول العمود هـ ن المرسوم من هـ على المستوى أ ب ج د ليقطعه فى ن .

(٩) م أ ب ج د هرم ثلاثى فيه م أ $= 8$ سم ، م ب $= 10$ سم ، م ج $= 17$ سم ، أ ب $= 6$ سم ، أ ج $= 15$ سم- أثبت أن المستوى أ ب ج عموديا على كل من المستويين م أ ب ، م أ ج .

(١٠) أ ب قطر فى دائرة ، رسم $\vec{A\vec{B}}$ عموديا على مستوى الدائرة فإذا كانت النقطة هـ تنتمي إلى هذه الدائرة . أثبت أن المستوى ج د هـ عمودى على المستوى ج د ب .

(١١) مستوى المستطيل أ ب ج د عمودى على مستوى المستطيل أ ب هـ و المستطيلان متطابقان. م منتصف أ و ، ن منتصف ب هـ . أثبت أن ج د م ن مستطيل و أن قتل الزاوية الزوجية بينه وبين المستطيل أ ب ج د يساوي $\frac{1}{4}$

(١٢) م ن مستويان متقاطعان فى $\vec{A\vec{B}}$ و قياس الزاوية الزوجية بينهما 60° و المربع أ ب ج د محتوي فى المستوى م ن ، هـ منتصف ج د ، رسم هـ و \perp المستوى م ن أثبت أن المستويين هـ و أ ، هـ و ب متعامدان .

(١٣) الشعاعان $\vec{A\vec{B}}$ ، $\vec{A\vec{C}}$ يميلان على المستوى م ن بزاويتين قياسهما 45° ، 30° على الترتيب ، رسم $\vec{A\vec{D}}$ \perp المستوى م ن ليقطعه فى د فإذا علم أن أ ج $=$ ب ج ، أثبت أن المستويين أ د ب ، أ د ج متعامدان .

(١٤) أ ب ج د هرم ثلاثى فيه كل المستويات أ ب ج ، أ ب د عموديان على المستوى ب ج د أثبت أن : (أ ج) - (أ د) = (ج ب) - (ب د) .

(١٥) دائرة مركزها م رسم مماس لهذه الدائرة عند أ و كتبت كل من ب ، ج تنتمي إلى هذا المماس على جانبى أ ثم رسم م ن عموديا على مستوى الدائرة . أثبت أن :

[١] المستقيم ج أ \perp للمستوي ن أ م

[٢] المستوى م ن أ عمودى على المستوى ن ج ب .

ثالثاً: التفاضل والتكامل

الباب الأول

النهايات

نهاية الدوال المعرفة بأكثر من قاعدة

لدراسة مفهوم النهايات ندرس المنحنى المعروف بالمعادلة $\frac{s - s^2}{1 - s} =$ نجد أن المقدار غير معرف عندما $s = 1$ ولمحاولة رسم هذا المنحنى نأخذ قيم تقترب من 1

← جهة اليمين					→ جهة اليسار				
س	1,1	1,01	1,001	←	1	⇒	0,999	0,99	0,9
د(س)	2,1	2,01	2,001	←	2	⇒	1,999	1,99	1,9

من الجدول نجد أن كلما تقترب س من العدد (1) أكثر وأكثر يقترب المقدار $\frac{s - s^2}{1 - s}$ من العدد (2) أكثر وأكثر ويعبر عن ذلك جبرياً بالآتي :

$$\text{نهاية } 1 \leftarrow 2 = \frac{s - s^2}{1 - s} \text{ ويقرأ نهاية المقدار } \frac{s - s^2}{1 - s} \text{ عندما س تؤول إلى 1 هو 2}$$

ملاحظات :

(1) نهاية دالة عند نقطة لا يعني قيمة الدالة عند هذه النقطة

$$\text{مثلاً : د : (س) = س + 2 ، د : (س) = } \frac{s - s^2}{3 - s}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{س} \neq 3 ، \frac{s - s^2}{3 - s} \\ \text{عندما س} = 3 \end{array} \right\} = \text{د : (س) = 6}$$

$$\therefore \text{نهاية د : (س) = نهاية س} \leftarrow 3 = (3 + 2) = 6 ، \text{د : (س) = س + 2 ، د : (س) = 6}$$

$$\text{نهاية س} \leftarrow 3 = \text{د : (س) = 6 ، د : (س) = 6 = كمية غير معروفة}$$

$$\text{نهاية س} \leftarrow 3 = \text{د : (س) = 6 ، د : (س) = 6 = 7}$$

$$\therefore \text{نهاية د : (س) = د : (س) عندما س} \leftarrow 3 \text{ لا تساوي د : (3) ، د : (3) .}$$

(٢) نهاية الدالة لها وجود عند نقطة ما إذا كان الاقتراب من اليمين واليسار يزول إلى قيمة واحدة .

$$\text{مثلاً : } \left. \begin{array}{l} \text{عندما } s \leq 3 \\ \text{عندما } s \geq 3 \end{array} \right\} d(s) = \begin{array}{l} s+3 \\ s-1 \end{array}$$

نلاحظ : كلما اقتربت s من العدد ٣ من جهة اليسار اقتربت الدالة من العدد ٥ وكلما اقتربت من العدد ٣ من جهة اليمين كلما اقتربت من العدد ٦ .

∴ كلما تقرب s حول العدد ٣ تقرب الدالة من قيمتين مختلفتين هما ٥ ، ٦ .

∴ نهاية الدالة عندما s تزول إلى ٣ ليس لها وجود .

الخلاصة : إذا كان

$$\left. \begin{array}{l} \text{عندما } s < 1 \\ \text{عندما } s > 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} f(s) \\ g(s) \end{array} = d(s)$$

فإن : نهاية الدالة التي على يمين a تكتب $d(a)^+$ ∴ $d(a)^+ = \lim_{s \rightarrow a^+} f(s)$

، نهاية الدالة التي على يسار a تكتب $d(a)^-$ ∴ $d(a)^- = \lim_{s \rightarrow a^-} g(s)$

وإذا كان $d(a)^+ = d(a)^- = l$ فإن الدالة لها نهاية عند $s = a$

∴ $\lim_{s \rightarrow a} f(s) = l$

$$\text{مثال: أبحث وجود نهاية } d(s) = \left. \begin{array}{l} s-2 \text{ عندما } s > 2 \\ s+5 \text{ عندما } s < 2 \end{array} \right\} \text{ عندما } s = 2$$

الحل

النهاية اليمنى $d(2)^+ = \lim_{s \rightarrow 2^+} (s-2) = 2-2 = 0$

النهاية اليسرى $d(2)^- = \lim_{s \rightarrow 2^-} (s+5) = 2+5 = 7$

∴ $d(2)^+ \neq d(2)^- = 7$

∴ نهاية $s \rightarrow 2$ $d(s)$ ليس لها وجود .

مثال: إذا كان د (س) = $\left. \begin{array}{l} \text{س}^2 + 2 - \text{س} \\ \text{س} - 1 \end{array} \right\}$ عندما $\text{س} > 2$
 $\left. \begin{array}{l} \text{س}^2 - 1 \end{array} \right\}$ عندما $\text{س} < 2$ - أوجد نها \leftarrow د (س)

الحل

د (1) = \leftarrow نها \leftarrow د (س) = $\frac{\text{س}^2 + 2 - \text{س}}{\text{س} - 1}$ نها \leftarrow د (س) = $\frac{(\text{س} + 2)(\text{س} - 1)}{(\text{س} + 1)(\text{س} - 1)}$

= نها \leftarrow د (س) = $\frac{4}{2} = \frac{(\text{س} + 2)}{(\text{س} + 1)}$

د (1) = نها \leftarrow د (س) = $1 - 2 = 1 - \text{س}$

\therefore د (1) = \leftarrow د (1) = 2

مثال: إذا كان د (س) = $\left. \begin{array}{l} \text{س} \\ \text{س} \end{array} \right\}$ عندما $\text{س} < 0$
 $\left. \begin{array}{l} 2 + \text{س} \end{array} \right\}$ عندما $\text{س} > 0$ - أوجد نها \leftarrow د (س)

الحل

د (0) = \leftarrow نها \leftarrow د (س) = $\frac{\text{س}}{\text{س}}$

د (0) = \leftarrow نها \leftarrow د (س) = $2 + 3 = 5$ حتا \leftarrow د (س) = $1 + 3 = 4$

د (0) = \leftarrow د (0) = 4

\therefore نها \leftarrow د (س) = 4

مثال: إذا كان د (س) = $\left. \begin{array}{l} \text{س}^2 + 1 \\ \text{س} - 1 \end{array} \right\}$ عندما $1 < \text{س} < 2$
 $\left. \begin{array}{l} \text{س}^2 - 1 \end{array} \right\}$ عندما $2 \leq \text{س} < 5$
 $\left. \begin{array}{l} \text{س} + 4 \end{array} \right\}$ عندما $5 \leq \text{س} < 7$

أبحث وجود: (1) نها \leftarrow د (س) (2) نها \leftarrow د (س)

(3) نها \leftarrow د (س) (4) نها \leftarrow د (س)

الحل

(1) نها \leftarrow د (س) = نها \leftarrow د (س) = $1 + 1 = 2$

(2) د (2) = \leftarrow نها \leftarrow د (س) = $1 - 6 = -5$

$$د(۲) = - \text{نها س} \leftarrow ۲ \text{ س} = ۱ + ۴ = ۵$$

$$\therefore د(۲) = + \text{نها س} \leftarrow ۲ \text{ س} = ۵ \quad \therefore \text{نها س} \leftarrow ۲ \text{ د(س)} = ۵$$

$$(۳) د(۵) = + \text{نها س} \leftarrow ۵ \text{ س} = ۴ + ۵ = ۹$$

$$د(۵) = - \text{نها س} \leftarrow ۵ \text{ س} = ۱ - ۱۵ = ۱۴$$

$$\therefore د(۵) \neq + \text{نها س} \leftarrow ۵ \text{ س}$$

\therefore نها س $\leftarrow ۵$ د(س) لیس لها وجود

$$(۴) \text{نها س} \leftarrow ۷ \text{ د(س)} = \text{نها س} \leftarrow ۷ \text{ س} = ۴ + ۷ = ۱۱$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{مثال: إذا كان د(س) = } \left\{ \begin{array}{l} \frac{\text{س} - \text{حاس}}{\text{س}} \text{ عندما س} > ۰ \\ \frac{۳ + \text{حسا س}}{\text{س}} \text{ عندما س} < ۰ \end{array} \right. \end{array} \right\} \text{عند س} = ۰$$

الحل

$$د(۰) = - \text{نها س} \leftarrow ۰ \text{ س} = \frac{\text{س} - \text{حاس}}{\text{س}} \quad \text{نها س} \leftarrow ۰ \text{ س} = \frac{\text{جا س}}{\text{س}} = ۱ \times ۵ - ۹ = ۴$$

$$د(۰) = + \text{نها س} \leftarrow ۰ \text{ س} = \frac{۳ + \text{حسا س}}{\text{س}} = ۱ + ۳ = ۴ = د(۰)$$

$$\therefore \text{نها س} \leftarrow ۰ \text{ د(س)} = ۴$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{مثال: د(س) = } \left\{ \begin{array}{l} \frac{۲ - ۳ \text{ حاس}}{\text{س} - ۱} \text{ عندما س} > \frac{۲}{۳} \\ \frac{\text{جتا س}}{\text{س} - ۱} \text{ عندما س} < \frac{۲}{۳} \end{array} \right. \end{array} \right\} \text{عند س} = \frac{۲}{۳}$$

الحل

$$د\left(\frac{۲}{۳}\right) = - \text{نها س} \leftarrow \frac{۲}{۳} \text{ حاس} = ۲ - ۳ = ۱ \times ۲ - ۳$$

$$د\left(\frac{۲}{۳}\right) = + \text{نها س} \leftarrow \frac{۲}{۳} \text{ حاس} = \frac{\text{حاس} - \text{س}}{\text{س} - ۱} = ۱ = \frac{\text{جتا س}}{\text{س} - ۱}$$

$$\therefore \text{نها س} \leftarrow \frac{۲}{۳} \text{ د(س)} = ۱$$

تمرین (۱)

$$(۱) \left. \begin{array}{l} \text{عندما } 1 > 2 \\ \text{عندما } 1 < 2 \end{array} \right\} = \text{إذا كان: د(س)}$$

فأوجد نها $1 \leftarrow 2$ د(س)

$$(۲) \left. \begin{array}{l} \text{عندما } 2 > 1 \\ \text{عندما } 2 < 1 \end{array} \right\} = \text{إذا كان: د(س)}$$

فأوجد نها $2 \leftarrow 1$ د(س)

$$(۳) \left. \begin{array}{l} \text{عندما } 1 < 4 \\ \text{عندما } 1 > 4 \end{array} \right\} = \text{إذا كان: د(س)}$$

فأوجد نها $1 \leftarrow 4$ د(س)

$$(۴) \left. \begin{array}{l} \text{عندما } 2 \geq 3 \\ \text{عندما } 2 < 3 \end{array} \right\} = \text{إذا كان: د(س)}$$

فأوجد نها $2 \leftarrow 3$ د(س)

$$(۵) \left. \begin{array}{l} \text{عندما } 1 \neq 3 \\ \text{عندما } 1 = 3 \end{array} \right\} = \text{إذا كان: د(س)}$$

$$(۶) \left. \begin{array}{l} \text{س} > \text{صفر} \\ \text{س} = \text{صفر} \\ \text{س} < \text{صفر} \end{array} \right\} = \text{إذا كان: د(س)}$$

(۷) ناقش نهاية الدالة الحقيقية عند أي نقطة في نطاقها

$$\left. \begin{array}{l} 1 \leq 2 \\ 2 > 2 \\ 2 = 2 \\ 2 > 3 \\ 5 \geq 2 \end{array} \right\} = \text{د(س)}$$

$$(۸) \text{إذا كان: د(س)} = \frac{\text{ح(س-3)}}{|3-3|} \text{عند } 3=$$

$$(۹) \left. \begin{array}{l} \text{عندما } 5 > 3 \\ \text{عندما } 5 < 3 \end{array} \right\} = \text{إذا كان: د(س)}$$

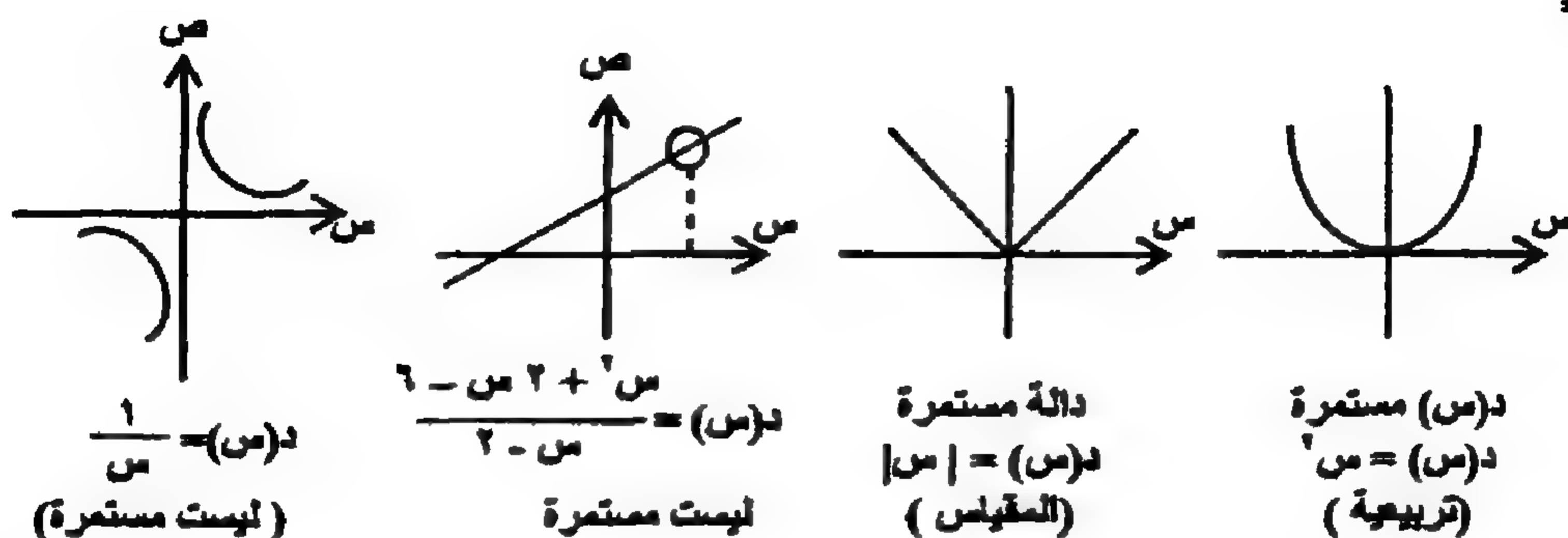
عند $5 = 3$

$$(۱۰) \left. \begin{array}{l} \text{عندما } 2 > 1 \\ \text{عندما } 2 \geq 5 \end{array} \right\} = \text{إذا كان: د(س)}$$

الدوال المتصلة (المستمرة)

الدوال المستمرة أو المتصلة : هي التي شكلها البياني ليس به قفزات أو فراغات.

مثال:



مثال توضيحي :

إذا كانت د(س) = س² - 3س² + 5س + 4 إبحث اتصال هذه الدالة عندما س = 2

الحل

١- نوجد د(٢) = ٨ - ١٢ + ١٠ + ٤ = ١٠

٢- نوجد نها س ← ٢ د(س) = (٢) - ٣(٢) + ٥(٢) + ٤ = ١٠

نلاحظ أن نها س ← ٢ د(س) = د(٢) ∴ الدالة المتصلة عند س = ٢

❖ شروط اتصال الدالة :

١- د(س) معرفة عند س = أ

بمعنى أن أ ∉ نطاق الدالة أو د(أ) لها وجود .

٢- د(س) لها نهاية محدودة عند س = أ

أي نها س ← أ⁺ د(س) = نها س ← أ⁻ د(س)

٣- نها س ← أ د(س) = د(أ)

❖ خطوات بحث استمرارية (اتصال) الدالة :-

١- نوجد د(أ) .

٢- نوجد النهاية اليمنى للدالة نها س ← أ⁺ د(س) .

٣- نوجد النهاية اليسرى للدالة نها س ← أ⁻ د(س)

إذا كانت نهاس ← ١⁺ د(س) = نهاس ← ١⁻ د(س) = د(أ) فإن الدالة تكون متصلة عند س = أ

مثال: ابحث اتصال كل من الدوال الآتية عند النقطة المبينة:-

(أ) د(س) = ١٥ عندما س = أ

(ب) د(س) = س^٢ - ٣س + ٥ عندما س = ١

(ج) د(س) = جتا س عندما س = أ

(د) د(س) = √(٢ - س) عندما س = ١

الحل

(أ) د(س) = ١٥ عند س = أ ∴ د(أ) = ١٥

∴ نهاس ← ١ د(س) = ١٥

∴ د(أ) = نهاس ← ١ د(س) = ١٥ ∴ الدالة متصلة.

(ب) د(س) = س^٢ - ٣س + ٥ عند س = ١

د(١) = ١ - ٣ + ٥ = ٣

نهاس ← ١ د(س) = ٣ - ١ + ٥ = ٣

∴ د(١) = نهاس ← ١ د(س) = ٣ ∴ الدالة متصلة.

(ج) د(س) = جتا س

د(أ) = جتا أ

، نهاس ← ١ د(س) = جتا أ

∴ د(أ) = نهاس ← ١ د(س) = جتا أ ∴ الدالة متصلة.

(٤) د(س) = √(٣ - س) عند س = ٥

د(٥) = √(٣ - ٥) = √(-٢)

، نهاس ← ٥ √(٣ - س) = √(-٢)

∴ د(أ) = نهاس ← ٥ د(س) = √(-٢) ∴ الدالة متصلة.

❖ ملاحظة : من الدوال المتصلة :-

د(س) = \sqrt{s} متصل لكل س ، د(س) = طاس متصل لكل س - T + T ن ، س- متصل في ح ، المقادير التي تحتوى علي بسط ومقام يكون متصلا في ح عدا عند أصفار المقام .

□ متى تكون الدالة غير متصلة ؟

(١) إذا كانت / ح فإن الدالة غير معرفة .

مثلا : د(س) = $\sqrt{s-5}$ عندما س = ٥

د(٢) = $\sqrt{5-2} = \sqrt{3}$ / ح غير معرفة .

(٢) إذا كانت الدالة ليس لها نهاية عندما س = أ

مثلا : نهاية ٢ = $\frac{3}{2-s}$ ليس لها وجود الدالة غير متصلة .

(٣) إذا كانت د(أ) نهاية ١ د(س)

(٤) إذا كانت نهاية ١+ د(س) نهاية ١- د(س)

(٥) إذا كان للدالة نهاية يميني فقط أو يسري فقط .

مثال : ناقش اتصال الدالة عند س = ٠ حيث د(س) = $\left. \begin{array}{l} s^2 + 2s \\ s \end{array} \right\}$ الحل

نهاية ٠+ د(س) = $2 + 2(0) = 2$ ، نهاية ٠- د(س) = $2 + 0 = 2$ ،
ولكن د(٠) = ٥ من الفرض الدالة غير متصلة لأن نهاية ٠ د(س) (٠)

مثال : ناقش اتصال الدالة عند س = ١- حيث د(س) = $\left. \begin{array}{l} s^2 + s + 2 \\ s^3 \end{array} \right\}$ الحل

نهاية ١- د(س) = $1 - 1 + 1 + 2 = 3$ ، نهاية ١- د(س) = $1 - 1 + 1 + 2 = 3$

نهاية ١+ د(س) = $1 - 1 + 1 + 2 = 3$ ، نهاية ١+ د(س) = $1 - 1 + 1 + 2 = 3$

نهاية ١+ د(س) = $1 - 1 + 1 + 2 = 3$ ، نهاية ١- د(س) = $1 - 1 + 1 + 2 = 3$ ،
الدالة ليست متصلة .

مثال : ابحث اتصال الدالة عند س = $\frac{1}{4}$ د(س) = $\left. \begin{array}{l} -s + \frac{3}{4} \\ s^3 \end{array} \right\}$ حيث س $\rightarrow \frac{1}{4}$

مثال : ابحث اتصال الدالة عند $s = \frac{1}{4}$ د (س) $\left. \begin{array}{l} -s + \frac{3}{4} \\ s^3 \end{array} \right\}$ حيث $s > \frac{1}{4}$
 $s \leq \frac{1}{4}$

الحل

$$\begin{array}{l} \text{د (س)} = -s + \frac{3}{4} \\ \text{د (س)} = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64} \\ \text{نهایس} \leftarrow \text{د (س)} = -\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \\ \text{د (س)} = \frac{1}{s} = 4 \\ \text{د (س)} = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64} \\ \text{نهایس} \leftarrow \text{د (س)} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4 \end{array}$$

\therefore نهایی $= -\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$ نهایی $= \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$

\therefore الدالة ليست متصلة (مستمرة)

مثال : ابحث اتصال الدالة عند $s = 2$ د (س) $\left. \begin{array}{l} \frac{2s^2 + s - 21}{s - 1} \\ \frac{13}{6} \end{array} \right\}$ $s \neq 1$
 $s = 1$

الحل

$$\begin{array}{l} \text{نهایس} \leftarrow \text{د (س)} = \frac{2s^2 + s - 21}{s - 1} \\ (1) \quad \frac{13}{6} = \frac{6+7}{2+3} = \frac{(7+s)(3-s)}{(3+s)(3-s)} \\ (2) \quad \frac{13}{6} = (3) \end{array}$$

\therefore الدالة ليست مستمرة .

\therefore نهایی $\leftarrow \text{د (س)} \neq (3)$

مثال : ابحث اتصال الدالة د (س) $\left. \begin{array}{l} \frac{3}{4} + s^2 \\ \frac{3}{1-s} \\ s^2 - 5 \end{array} \right\}$ عندما $s \geq 1$
 $1 < s < 3$
عندما $s \leq 3$

الحل

$$\begin{array}{l} \text{عند } s = 1 : \text{د (س)} = \frac{3}{4} + s^2 = \frac{7}{4} \\ \text{د (1)} = \frac{3}{4} + 2 = \frac{11}{4} \end{array}$$

$$\text{نها د (س)} = \text{نها س} \leftarrow (1)^+ \text{ س}^2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{4}$$

$$\text{نها د (س)} = \text{نها س} \leftarrow (1)^+ \text{ س} = \frac{3}{1-1} = \frac{3}{0} = \infty$$

∴ لا يوجد للدالة نهاية عند س = (1)⁺ ∴ الدالة غير مستمرة

$$\text{عند س} = 3 \quad \text{د (س)} = \frac{3}{1-3}$$

$$\text{د (3)} = \frac{3}{1-3} = \frac{3}{-2}$$

$$\text{نها س} \leftarrow (3)^- \text{ د (س)} = \frac{3}{1-3} = \frac{3}{-2} \quad \therefore \text{د (س)} = \text{س}^2 - 5 = 0$$

$$\text{نها س} \leftarrow (3)^+ \text{ د (س)} = 9 - 5 = 4$$

∴ نها س $\leftarrow (3)^-$ د (س) \neq نها س $\leftarrow (3)^+$ د (س) ∴ الدالة ليست مستمرة.

❖ كيفية إزالة عدم اتصال الدالة عند نقطة معينة :-

$$\text{مثلاً : د (س)} = \frac{\text{س}^2 - 5\text{س} + 6}{\text{س}^2 - 2} \quad \text{س} \neq 2$$

(١) نزيل العامل المسبب للصفر من البسط والمقام .

$$(1) \quad \text{د (س)} = \frac{\text{س}^2 - 5\text{س} + 6}{\text{س}^2 - 2} = \frac{(\text{س}-2)(\text{س}+3)}{(\text{س}+2)(\text{س}-2)}$$

(٢) نعوض في الناتج من الخطوة السابقة س = 2

$$\therefore \text{د (2)} = \frac{2+3}{2+2} = \frac{5}{4}$$

(٣) نضع الدالة ع (س) معرفة بأكثر من قاعدة

$$\therefore \text{ع (س)} = \left. \begin{array}{l} \text{س} \neq 2 \quad \frac{\text{س}^2 - 5\text{س} + 6}{\text{س}^2 - 2} \\ \text{س} = 2 \quad \frac{5}{4} \end{array} \right\}$$

مثال : أعد تعريف الدالة الآتية عند النقطة المعينة حتى تكون متصلة

$$د(س) = \frac{س^2 + س - 1}{س + 1} \quad س \neq -1$$

الحل

$$د(س) = \frac{س^2 + س - 1}{س + 1} \quad س \neq -1$$

$$س^2 - 1 = \frac{(س^2 - 1)(س + 1)}{س + 1} =$$

$$بوضع س = -1 \quad \therefore د(س) = 1 - 1 \times 2 = -1$$

$$\therefore ع(س) = \left. \begin{array}{l} \frac{س^2 + س - 1}{س + 1} \quad س \neq -1 \\ -1 \quad س = -1 \end{array} \right\}$$

$$\text{مثال: إذا كانت } ع(س) = \left. \begin{array}{l} \frac{س^2 + 4س - 2}{س} \quad س \neq 0 \\ 3 \quad س = 0 \end{array} \right\}$$

الحل

$$د(س) = \frac{س^2 + 4س - 2}{س} \quad \text{بضرب البسط والمقام في مرافق البسط}$$

$$\therefore د(س) = \frac{س^2 + 4س - 2}{س} \times \frac{س^2 + 4س - 2}{س^2 + 4س - 2} = \frac{س^4 + 8س^3 - 4س^2 - 4س - 2}{(س^2 + 4س - 2)(س)}$$

$$= \frac{س}{[س^2 + 4س - 2] س} \quad \text{بوضع س = 0}$$

$$\therefore د(0) = \frac{1}{4} = \frac{1}{س^2 + 4س - 2} = \frac{1}{0 + 0 - 2} = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore ع(س) = \left. \begin{array}{l} \frac{س^2 + 4س - 2}{س} \quad \text{عند } س \neq 0 \\ -\frac{1}{2} \quad س = 0 \end{array} \right\}$$

مثال: إذا كانت الدالة د حيث د (س) = $\left. \begin{array}{l} 1 - \frac{1}{4} \text{ س} \\ \frac{1}{\text{س}} \end{array} \right\}$ عندما $\text{س} \geq 2$ متصلة عند $\text{س} = 2$
عندما $\text{س} < 2$ متصلة عند $\text{س} = 2$
فلوجد قيمة الثابت أ

الحل

∴ الدالة متصلة

$$\therefore \text{نها} \leftarrow \text{د} (2) = \text{نها} \leftarrow \text{د} (2) = \text{نها} \leftarrow \text{د} (2)$$

$$\therefore \text{نها} \leftarrow \text{د} (2) = \text{نها} \leftarrow \text{د} (2) = \text{نها} \leftarrow \text{د} (2)$$

$$\therefore \text{نها} \leftarrow \text{د} (2) = \text{نها} \leftarrow \text{د} (2) = \text{نها} \leftarrow \text{د} (2)$$

$$\therefore \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \therefore 1 = 1$$

مثال: إذا كان د (س) = $\left. \begin{array}{l} \frac{1}{\text{س}} (2 \text{ جتا}^2 \text{ ط} - \frac{1}{4} \text{ س}^2 - 1) \\ 2 + \text{ك} \end{array} \right\}$ س ≠ 0
س = 0

أوجد قيمة ك لتكون الدالة متصلة عند س = 0

الحل

$$\text{نها} \leftarrow \text{د} (0) = \text{نها} \leftarrow \text{د} (0) = \text{نها} \leftarrow \text{د} (0)$$

$$\therefore 2 \text{ جتا}^2 1 - 1 = 1 - \frac{1}{4}$$

$$\therefore 2 \text{ جتا}^2 \text{ ط} - \frac{1}{4} \text{ س}^2 - 1 = 1 - \frac{1}{4} \times 2 \text{ جتا}^2 \text{ ط} = \frac{1}{4} \text{ س}^2 - 1$$

$$\therefore \text{نها} \leftarrow \text{د} (0) = \text{نها} \leftarrow \text{د} (0) = \text{نها} \leftarrow \text{د} (0)$$

$$\therefore \text{نها} \leftarrow \text{د} (0) = \text{نها} \leftarrow \text{د} (0) = \text{نها} \leftarrow \text{د} (0)$$

∴ لكي تكون الدالة متصلة عند س = 0

$$\text{فإن د} (0) = \text{نها} \leftarrow \text{د} (0) \quad \therefore 3 = 2 + \text{ك} \quad \therefore 1 = \text{ك}$$

تعريف (٢)

$$(١) \left. \begin{array}{l} \text{ابحث اتصال الدالة د(س) عندما س = ١} \\ \text{س} \geq ١ \\ \text{س} < ١ \end{array} \right\} = \text{إذا كان: د(س)}$$

$$(٢) \left. \begin{array}{l} \text{ابحث اتصال الدالة عند س = ٣} \\ \text{د(س)} = \frac{| \text{س}^١ - ٧\text{س} + ١٢ |}{\text{س} - ٣} \\ \text{س} \neq ٣ \\ \text{س} = ٣ \end{array} \right\}$$

$$(٣) \left. \begin{array}{l} \text{إذا كانت د(س) = ك} \\ \frac{\text{س}^١ + \text{س}}{\text{س} + ١} \\ \text{س} \neq ١- \\ \text{س} = ١- \end{array} \right\}$$

أوجد قيمة ك التي تجعل د متصلة عند س = ١-

$$(٤) \left. \begin{array}{l} \text{ابحث اتصال الدالة د(س) عند س = ٣} \\ \text{د(س)} = \frac{\text{س}^١ - ٩}{\text{س} - ٣} \\ \text{س} \neq ٣ \\ \text{س} = ٣ \end{array} \right\}$$

$$(٥) \left. \begin{array}{l} \text{ابحث اتصال الدالة د(س) عند س = ٤} \\ \text{د(س)} = \frac{\text{س}^٢ + ١ - ٣}{\text{س} - ٤} \\ \text{س} \neq ٤ \\ \text{س} = ٤ \end{array} \right\}$$

(٦) أوجد قيمة ك بحيث تكون د متصلة عند النقطة س = ٢

$$\left. \begin{array}{l} \text{د(س)} = \frac{\text{س}^١ - ٤}{\text{س}^٢ - ٤} \\ \text{س} \neq ٢ \\ \text{س} = ٢ \end{array} \right\}$$

$$(٧) \left. \begin{array}{l} \text{إذا كانت د(س) = ك} \\ \text{س} \geq ٢ \\ \text{س} < ٢ \end{array} \right\} \text{أوجد قيمة ك التي تكون د(س) متصلة عند س = ٢}$$

$$(٨) \text{ابحث اتصال الدالتين د(س) = } \frac{\text{س}^١}{|\text{س}|} \text{ عند س = ٠ ، د(س) = } \text{س}^١ - |\text{س}| \text{ عند س = ٠}$$

(٩) أوجد قيمة الثوابت أ ، ب إذا علم أن الدالة :

$$\left. \begin{array}{l} \text{د(س)} = \frac{\text{س}^١ + \text{ب} + \text{س} + ٢}{\text{س} + \text{ب}} \\ \text{س} > ١ \\ \text{س} \leq ١ \end{array} \right\} \text{متصلة عند س = ١ وكان د(١) = ٧}$$

(١٠) ابحث اتصال الدالة:

$$\left. \begin{array}{l} \text{س}^1 - \text{س}^3 + 2 \\ \text{س} \geq 3, \\ 3 > \text{س} \geq 1, \\ \text{س} < 4, \end{array} \right\} = \text{د(س)}$$

(١١) أوجد قيمة الثابت م إذا علم أن الدالة:

$$\text{د(س)} = \frac{\text{س}^7 - \text{م}^7}{\text{س} - \text{م}} \text{ متصلة عند } \text{س} = \text{م}, \text{ وكانت د(م)} = \frac{28}{3}$$

(١٢) ابحث اتصال الدالة:

$$\text{د(س)} = \frac{\text{س}^1 - \text{س}^3 + 4}{\text{س} + \text{س}^5 + 4} \text{ عند } \text{س} = 1$$

الباب الثاني

الاشتقاق

قابلية الاشتقاق : تكون الدالة قابلة للاشتقاق عند $s = a$ إذا كانت $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{d(a+h) - d(a)}{h}$ لها وجود

أي:

إذا كانت $(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{d(a+h) - d(a)}{h})$ لها وجود (عدد حقيقي وحيد)

❖ المشتقة اليمنى عند $s = a$

هي $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{d(a+h) - d(a)}{h}$ ورمزها $d^+(a)$ حيث $h > 0$.

❖ المشتقة اليسرى عند $s = a$

هي $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{d(a+h) - d(a)}{h}$ ورمزها $d^-(a)$ حيث $h < 0$.

❖ بحث قابلية الدالة $d(s)$ للاشتقاق عند $s = a$ ، $a \in D$ لنطاق الدالة :-

أولاً: نوجد المشتقة اليمنى	ثانياً: نوجد المشتقة اليسرى
(1) نوجد $d^+(a)$ ---- (1)	(1) نوجد $d^-(a)$ ---- (1)
(2) نوجد $d^+(a+h)$ ----- (2)	(2) نوجد $d^-(a+h)$ ----- (2)
حيث h كمية صغيرة جداً $h \leftarrow 0$ عندما $s \leftarrow a$	
(3) نطرح (1) من (2) $d(a+h) - d(a)$	(3) نطرح (1) من (2) $d(a+h) - d(a)$
(4) $d^+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{d(a+h) - d(a)}{h}$	(4) $d^-(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{d(a+h) - d(a)}{h}$
$m =$	$k =$

- تكون الدالة قابلة للاشتقاق إذا كانت $m = k$

- تكون الدالة غير قابلة للاشتقاق إذا كانت \neq ك
- إذا كان نها \leftarrow $\frac{د(أ) - د(هـ + ١)}{هـ} = \frac{\text{عدد}}{٠} = \infty$
- ∴ الدالة غير قابلة للاشتقاق.

مثال: ابحث قابلية اشتقاق الدالة $د(س) = \begin{cases} س^٣ + س^٢ + ٣ & س > ١ \\ س^٣ + ٢ & س < ١ \end{cases}$

الحل

أولاً : المشتقة اليمنى للدالة عندما $س = ١$

$$\begin{aligned} د(س) = س^٣ + س^٢ + ٢ \text{ بوضع } س = ١ + هـ \text{ بدلاً من } س ، هـ \leftarrow ٠ \text{ عندما } س \leftarrow ١ \\ \therefore د(١ + هـ) = (١ + هـ)^٣ + (١ + هـ)^٢ + ٢ = ٢ + (١ + هـ)^٣ + ٢ + هـ^٢ + ٥ = ٥ + هـ^٣ + ٣هـ + ٥هـ^٢ + هـ^٣ \\ د(١) = ٢ + ٣ = ٥ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore د(١ + هـ) - د(١) = ٥ + هـ^٣ + ٣هـ + ٥هـ^٢ + هـ^٣ - ٥ = هـ^٣ + ٣هـ + ٥هـ^٢ + هـ^٣ \\ \therefore د(١)^+ \text{ نها } \leftarrow = \frac{د(١ + هـ) - د(١)}{هـ} = \frac{٥ + هـ^٣ + ٣هـ + ٥هـ^٢ + هـ^٣ - ٥}{هـ} = \frac{هـ^٣ + ٣هـ + ٥هـ^٢ + هـ^٣}{هـ} \end{aligned}$$

ثانياً : المشتقة اليسرى للدالة عند $س = ١$

$$\begin{aligned} د(س) = س^٣ + س^٢ + ٢ \\ \text{بوضع } س = ١ + هـ \text{ هـ } \leftarrow ٠ \text{ عندما } س \leftarrow ١ \\ \therefore د(١ + هـ) = (١ + هـ)^٣ + (١ + هـ)^٢ + ٢ = ٢ + (١ + هـ)^٣ + ١ + هـ^٢ + ٢هـ + ٥ = ٥ + هـ^٣ + ٣هـ + ٥هـ^٢ + هـ^٣ \\ د(١) = ٢ + ١ + ١ = ٤ \\ د(١ + هـ) - د(١) = ٥ + هـ^٣ + ٣هـ + ٥هـ^٢ + هـ^٣ - ٤ = ١ + هـ^٣ + ٣هـ + ٥هـ^٢ + هـ^٣ \\ \therefore د(١)^- \text{ نها } \leftarrow = \frac{د(١ + هـ) - د(١)}{هـ} = \frac{١ + هـ^٣ + ٣هـ + ٥هـ^٢ + هـ^٣}{هـ} \\ = \frac{هـ(٣ + هـ)}{هـ} \text{ نها } \leftarrow = ٣ \end{aligned}$$

$$\therefore د(١)^+ = د(١)^- = ٣ \therefore \text{الدالة قابلة للاشتقاق عند } س = ١$$

مثال: بين هل الدالة $د$ قابلة للاشتقاق عند $هـ = ١$ أم لا

$$د(س) = \begin{cases} س^٢ + س^٢ + ١ & س \geq ١ \\ س^٢ - ١ & س < ١ \end{cases} \quad هـ = ١$$

الحل

أولاً : المشتقة اليمنى للدالة عندما $s = 1$

$$د(س) = 1 - 1 \times 1 = 0 \quad \therefore د(1) = 0$$

$$د(1+h) = 1 - (1+h) = -h$$

$$1 - (1+h) = -h \quad \therefore د(1+h) = -h$$

$$\therefore د(1) = 0 \quad \text{نها} \leftarrow \frac{د(1+h) - د(1)}{h} = \frac{-h - 0}{h} = -1$$

$$= \text{نها} \leftarrow \frac{د(1+h) - د(1)}{h} = \frac{-h - 0}{h} = -1$$

ثانياً : المشتقة اليسرى للدالة عندما $s = 1$

$$د(س) = 1 + 1 \times 1 = 2 \quad \therefore د(1) = 2$$

$$د(1+h) = 1 + (1+h) = 2+h$$

$$\therefore د(1) = 2 \quad \text{نها} \leftarrow \frac{د(1+h) - د(1)}{h} = \frac{2+h - 2}{h} = \frac{h}{h} = 1$$

$$= \text{نها} \leftarrow \frac{د(1+h) - د(1)}{h} = \frac{2+h - 2}{h} = 1$$

$$\therefore د(1) = 2 \quad \therefore \text{الدالة قابلة للاشتقاق عند } s = 1$$

مثال : أوجد قيم a ، b التي تجعل الدالة D حيث :

$$D(s) = \begin{cases} s & s > 1 \\ a + bs & s \leq 1 \end{cases} \quad \text{قابلة للاشتقاق عند } s = 1$$

الحل

$$\therefore \text{الدالة قابلة للاشتقاق عند } s = 1 \quad \therefore \text{الدالة متصلة عند } s = 1$$

$$\therefore د(1) = 1 \quad \therefore \text{نها} \leftarrow 1 = a + b \quad \therefore \text{نها} \leftarrow 1 = a + b$$

$$\therefore 1 = a + b \quad (1)$$

$$\therefore \text{الدالة قابلة للاشتقاق عند } s = 1 \quad \therefore د(1) = 1 \quad \therefore د(1) = 1$$

$$\therefore \text{نها} \leftarrow \frac{د(1+h) - د(1)}{h} = \frac{1 - 1}{h} = 0$$

$$\therefore \text{نها } \leftarrow \frac{أ(١+هـ) + ب - (أ+ب)}{هـ} = \text{نها } \leftarrow \frac{١ - (١+هـ)}{هـ}$$

$$\text{نها } \leftarrow \frac{أ + هـ + ب - أ - ب}{هـ} = \text{نها } \leftarrow \frac{١ + هـ + ١ - هـ^٢ - ١}{هـ}$$

$$\therefore \text{نها } \leftarrow ١ = \text{نها } \leftarrow ٢ + هـ$$

$$\therefore ٢ = ١ \quad \text{بالتعويض في (١)}$$

$$\therefore ١ = ٢ + ب \quad \therefore ب = ١ -$$

مثال : بين هل دالة القيمة المطلقة المعرفة بالمعادلة $د(س) = |س|$ - قابلة للاشتقاق عند $س = ٠$ أم لا.

الحل

$$د(س) = |س|$$

$$\text{تعريف الدالة } د(س) = \begin{cases} س & س < ٠ \\ س - & س > ٠ \end{cases}$$

$$د(٠) = ٠ \exists ح$$

$$\frac{د(هـ)}{هـ} = \frac{د(٠) - د(١+هـ)}{هـ}$$

إذا كانت $هـ > ٠$

$$\therefore \frac{د(هـ)}{هـ} = ١ \quad \therefore د'(٠) = ١$$

$$\therefore د'(٠) \neq د'(٠) \quad \therefore \text{غير قابلة للاشتقاق}$$

العلاقة بين الاتصال والاشتقاق

(١) الدالة متصلة \leftarrow قابلة للاشتقاق
 \leftarrow غير قابلة للاشتقاق

(٢) الدالة غير متصلة \leftarrow غير قابلة للاشتقاق

(٣) الدالة قابلة للاشتقاق \leftarrow الدالة متصلة

(٤) الدالة غير قابلة للاشتقاق \leftarrow متصلة
 \leftarrow غير متصلة

بحث اشتقاق الدالة	بحث اتصال الدالة
(١) نوجد $d^+(a)$ (٢) نوجد $d^-(a)$ نها $d \leftarrow$. $d^-(a) - d^+(a) = m$ (٣) نوجد $d^-(a)$ نها $d \leftarrow$. $d^-(a) - d^+(a) = k$ إذا كانت $m = k$. \therefore الدالة قابلة للاشتقاق إذا كانت $m \neq k$. \therefore الدالة غير قابلة للاشتقاق	(١) نوجد $d^+(a)$ (٢) نها $d \leftarrow$ $d^+(a)$ (س) النهاية اليمنى = م (٣) نها $d \leftarrow$ $d^-(a)$ (س) النهاية اليسرى = ن إذا كانت $m = n$ \therefore الدالة متصلة إذا كانت $m \neq n$ الدالة ليست متصلة

ملاحظة :

إذا كانت $m = \infty$ فإن الدالة غير قابلة للاشتقاق .

مثال: أثبت أن $d^+(a) = d^-(a)$ $\left\{ \begin{array}{l} m > 3 \\ m \leq 3 \end{array} \right.$ دالة متصلة عندما $m = 3$ ولكنها غير قابلة للاشتقاق عندما $m = 3$

الحل

نبحث اتصال الدالة:

$$\text{نها } \leftarrow \text{د}^+ = \text{د(س)} = \text{س} - 3 = 3 - 3 = 0 \text{ ----- (١)}$$

$$\text{نها } \leftarrow \text{د}^- = \text{د(س)} = \text{س} - 3 = 3 - 3 = 0 \text{ ---- (٢)}$$

من (١) ، (٢) \therefore الدالة متصلة عند $\text{س} = 3$

نبحث الاشتقاق :

$$\text{د}^+ = \text{د(س)} = \text{س} - 3 = (3) \text{ ، د}^+ = 3 - 3 = 0$$

$$\text{د}^+ = 3 - \text{هـ} + 3 = (3 + \text{هـ}) \text{ ، د}^+ = 3 - \text{هـ} + 3 = 6 - \text{هـ}$$

$$\text{د}^+ (3) = \text{نها } \leftarrow \text{د}^+ = \frac{\text{د}^+ - \text{د}^-(3)}{\text{هـ}} = \frac{6 - \text{هـ} - 0}{\text{هـ}} = \frac{6 - \text{هـ}}{\text{هـ}} \text{ ، نها } \leftarrow \text{د}^+ = 1$$

$$\text{د}^- = \text{د(س)} = \text{س} - 3 = (3) \text{ ، د}^- = 3 - 3 = 0$$

$$\text{د}^- = 3 - \text{هـ} - 3 = (3 - \text{هـ}) - 3 = (3 - \text{هـ}) - 3 = 0 - \text{هـ} = -\text{هـ}$$

$$\text{د}^- (3) = \text{نها } \leftarrow \text{د}^- = \frac{\text{د}^- - \text{د}^-(3)}{\text{هـ}} = \frac{0 - (-\text{هـ})}{\text{هـ}} = \frac{\text{هـ}}{\text{هـ}} = 1$$

$$\therefore \text{د}^+ (3) \neq \text{د}^- (3)$$

\therefore الدالة متصلة وغير قابلة للاشتقاق

\therefore الدالة غير قابلة للاشتقاق

$$\text{مثال : إذا كانت د(س) = } \left. \begin{array}{l} 3 - \text{س} \\ \text{س} \geq 3 \\ \text{س} < 3 \end{array} \right\}$$

اثبت أن الدالة متصلة عند $\text{س} = 3$ ثم ابحث قابلية اشتقاق الدالة عند $\text{س} = 3$

الحل

نبحث اتصال الدالة :

$$\text{د}^+ = \text{د(س)} = 3 - \text{س} = (3) \text{ ، د}^+ = 3 - 3 = 0$$

$$\text{نها } \leftarrow \text{د}^+ = \text{د(س)} = 3 - \text{س} = 3 - 3 = 0$$

$$\text{د}^- = \text{د(س)} = 3 - \text{س} = (3) \text{ ، د}^- = 3 - 3 = 0$$

$$\text{نها } \leftarrow \text{د}^- = \text{د(س)} = 3 - \text{س} = 3 - 3 = 0$$

∴ نها $\leftarrow^+ 2$ د(س) = نها $\leftarrow^- 2$ د(س)
 ∴ الدالة متصلة عند س = 2

- نبحث قابلية الدالة للاشتقاق :

النهاية اليمنى للدالة :

$$\begin{aligned} \text{د} (س) - 2 &= (س) - 2 = (س - 2) \text{ د} (1) \text{ ، د} (س - 2) = 2 - 2 = 0 \\ \text{د} (س - 2) - (س - 2) &= (س - 2) - (س - 2) = 0 \\ \text{د} (س - 2) - (س - 2) &= (س - 2) - (س - 2) = 0 \\ \text{د} (س - 2) - (س - 2) &= (س - 2) - (س - 2) = 0 \end{aligned}$$

النهاية اليسرى للدالة :

$$\begin{aligned} \text{د} (س) - 9 &= (س) - 9 = (س - 9) \text{ د} (1) \text{ ، د} (س - 9) = 9 - 9 = 0 \\ \text{د} (س - 9) - (س - 9) &= (س - 9) - (س - 9) = 0 \\ \text{د} (س - 9) - (س - 9) &= (س - 9) - (س - 9) = 0 \\ \text{د} (س - 9) - (س - 9) &= (س - 9) - (س - 9) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{د} (س - 9) \neq \text{د} (س - 9)$$

∴ الدالة غير قابلة للاشتقاق

تمرين (٣)

$$(١٣) \left. \begin{array}{l} \text{عندما } s \geq 2 \\ \text{عندما } s < 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1 - \frac{1}{s} \\ \frac{1}{s} \end{array} = (s) \text{ حيث } d$$

متصلة عند $s = 2$ فأوجد قيمة الثابت A ، ثم ابحث قابلية اشتقاق الدالة عند $s = 2$

$$(١٤) \left. \begin{array}{l} \text{عندما } s > 2 \\ \text{عندما } s = 2 \\ \text{عندما } s < 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} s^2 + As - 1 \\ 5 \\ 1 + B s \end{array} = (s) \text{ حيث } d$$

متصلة عند $s = 2$ فأوجد قيمة الثابتين A ، B ثم ادرس قابلية الاشتقاق للدالة d عند $s = 2$

$$(١٥) \left. \begin{array}{l} \text{عندما } s < 1 \\ \text{عندما } s \geq 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} s + 1 \\ s - 3 \end{array} = (s) \text{ حيث } d$$

متصلة عند $s = 1$ فأوجد قيمة A ثم ابحث قابلية الاشتقاق للدالة d للاشتقاق عند $s = 1$

(١٦) أوجد قيمة كل من A ، B التين تجعلان الدالة d حيث :

$$d = (s) \left. \begin{array}{l} \text{عندما } s < 1 \\ \text{عندما } s \geq 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} s^2 - 1 \\ 2As + B \end{array} \text{ قابلة للاشتقاق عند } s = 1$$

(١٧) ابحث الاتصال وقابلية الاشتقاق للدالة d المعرفة كالاتي :

$$d = (s) \left. \begin{array}{l} \text{عندما } s \geq 1 \\ \text{عندما } s = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} s^2 + 1 \\ s + 1 \end{array}$$

$$(١٨) \text{ أثبت أن الدالة : } d = (s) \left. \begin{array}{l} \text{عندما } s \geq 1 \\ \text{عندما } s < 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} s \\ \frac{1}{s} + s^2 \end{array}$$

متصلة وقابلة للاشتقاق مرة واحدة فقط عند $s = 1$

(١٩) إذا كانت الدالة د المعرفة كالتالي:

$$د(س) = \left. \begin{array}{l} س^٢ \text{ عندما } س > ١ \\ أس^٢ + ب س + ج \text{ عندما } س \leq ١ \end{array} \right\} \text{ قابلة للاشتقاق مرتين عند } س = ١ ,$$

فأوجد قيم الثوابت أ ، ب ، ج

$$(٢٠) \text{ إذا كانت د(س) = } \left. \begin{array}{l} ١ - (س-١) \text{ عندما } س \geq ١ \\ ١ + (س-١) \text{ عندما } س < ١ \end{array} \right\}$$

فابحث قابلية الدالة للاشتقاق عند س = ١

(٢١) إذا كانت الدالة د : ح ← ح معرفة بالقاعدة

$$د(س) = \left. \begin{array}{l} ٢ س^٢ - ٣ \text{ عندما } س \geq ١ \\ ٤ س - ٥ \text{ عندما } س < ١ \end{array} \right\}$$

$$(٢٢) \text{ إذا كان د(س) = } \left. \begin{array}{l} \frac{س^٢ - س - ٥ - س - ٣}{س - ٣} \text{ عندما } س \neq ٣ \\ ١ \text{ عندما } س = ٣ \end{array} \right\}$$

فأوجد قيمة أ لتكون الدالة قابلة للاشتقاق عند س = ٣ وأوجد معادلة العمودي للمنحنى

عند هذه النقطة .

الدالة الضمنية – الاشتقاق الضمني

❖ الدوال الضمنية :

هي الدوال التي تكون علي الصورة د (س، ص) = ٠

مثال : س^٢ - ٣ ص + ٤ = ٠ ، س + جتا ص = (س + ص)

العلاقات الضمنية :

$$١ = \frac{ص^٢}{٩} - \frac{س^٢}{١٦} ، ٢٥ = ص^٢ + س^٢$$

ملاحظات :

بعض الدوال والعلاقات الضمنية يمكن جعلها صريحة .

مثال ذلك : س^٢ + ص^٢ = ٢٥ ، ص^٢ - ٢٥ = س^٢ ∴ ص = ± √(٢٥ - س^٢)

والطريقة العملية لتفاضل الدوال الضمنية يتلخص في الآتي:

هو تفاضل س ، ص معا ولكن عند تفاضل ص يلزم ضربها في $\frac{ص}{ص}$ ثم استخلاص $\frac{ص}{ص}$ في الطرف الأيمن .

المشتقات العليا:

المشتقة الثانية يرمز لها بالرموز : $\frac{ص''}{ص}$ ، د (س) ، ص'

المشتقة الثالثة يرمز لها بالرموز : $\frac{ص'''}{ص}$ ، د^٢ (س) ، ص''

مثال : أوجد المشتقة الأولى للدالة الآتية : س^٢ - ٢ ص + ٢ ص^٢ = ٨

الحل

$$٠ = \frac{ص}{ص} (٢ ص + ٢ ص^٢ - ٢ س) + \frac{ص}{ص} (٢ ص - ٢ س)$$

$$٠ = \frac{ص}{ص} (٢ ص + ٢ ص^٢ - ٢ س) + \frac{ص}{ص} (٢ ص - ٢ س)$$

$$٠ = \frac{ص}{ص} ٢ + \frac{ص}{ص} ٢ ص + \frac{ص}{ص} ٢ ص - \frac{ص}{ص} ٢ س$$

$$\frac{ص}{ص} (٢ ص + ٢ ص^٢ - ٢ س) = \frac{ص}{ص} ٢ ص - \frac{ص}{ص} ٢ س$$

مثال: أوجد $\frac{ص^٦}{ص^٤}$ من المعادلة: $ص^٦ + ٥ ص^٥ + ٢ ص^٤ - ٧ = ٠$

الحل

$$ص^٦ + ٥ ص^٥ + ٢ ص^٤ - ٧ = ٠$$

$$٢ ص^٤ + \frac{ص^٤}{ص^٤} ٥ + [١ \times ص + \frac{ص^٤}{ص^٤} \times ص] ٥ + \frac{ص^٤}{ص^٤} ٦ = ٠$$

$$٢ ص^٤ + \frac{ص^٤}{ص^٤} ٥ + \frac{ص^٤}{ص^٤} ٥ + \frac{ص^٤}{ص^٤} ٦ = ٠$$

$$٢ ص^٤ + \frac{ص^٤}{ص^٤} ٥ + \frac{ص^٤}{ص^٤} ٥ = (٦ + ص^٤)$$

$$\frac{ص^٤}{ص^٤} (٢ ص^٤ + ٥ ص^٤) = (٦ + ص^٤)$$

$$\therefore \frac{(٢ ص^٤ + ٥ ص^٤)}{(٢ ص^٤ + ٥ ص^٤)} = \frac{ص^٤}{ص^٤}$$

مثال: إذا كان $ص^٣ + ٢ ص^٢ = ٢$ أثبت أن $ص^٢ + ص + ٢ = ٠$

الحل

$$٢ ص^٢ + ص^٢ = ٢ \quad \text{بالقسمة } ٢$$

$$\therefore ص^٢ + ص^٢ = ١ \quad \therefore ص^٢ + ص + ٢ = ٠$$

$$\therefore (ص^٢ + ص + ٢) = ٠$$

مثال: إذا كان $٢ ص^٢ = ٣ ص^٢$ اثبت أن: $ص^٢ + ص + ٢ = \frac{١}{ص}$

الحل

$$٦ ص^٢ = ٦ ص^٢ \quad \text{بالقسمة } ٦ \quad \therefore ص^٢ + ص^٢ = ١$$

$$\therefore ٢ ص^٢ + ص^٢ + ص^٢ = ١$$

$$٢ ص^٢ + ص^٢ + ص^٢ = ١ \quad \text{بالقسمة } ١$$

$$\therefore ٢ ص^٢ + ص^٢ + ص^٢ = \frac{١}{ص}$$

مثال: إذا كان $s^2 + s^2 = 9$ أثبت أن : $s^2 + s^2 = 9$ = صفر

الحل

$$s^2 + 2s^2 + s^2 = 0 \quad \text{بالقسمة } 6 \quad \therefore s^2 + s^2 = s$$

$$\therefore 2s^2 + s^2 + s^2 = 0 \quad \therefore 1 + (s^2) + s^2 + s^2 = 0$$

$$\therefore 1 + \left(\frac{s^2}{s} \right) + s^2 + s^2 = 0 \quad \therefore 1 + \frac{s^2}{s} + s^2 + s^2 = 0 \quad \text{بالضرب في } s$$

$$\therefore s^2 + s^2 + s^2 + s^2 = 9 \quad \therefore \text{صفر}$$

مثال: أوجد معادلتى المماس والعمودي : $s^2 + 2s^2 - 4s + 6s - 2s + 2s = 0$ عند (٣،١)

الحل

$$s^2 + 2s^2 - 4s + 6s - 2s + 2s = 0$$

$$\therefore 2s^2 - 4s + 6s - 2s + 2s = 0$$

$$\therefore \frac{2s^2 - 4s}{6 + 2s} = \frac{2s^2 - 4s}{6 + 2s}$$

$$\therefore \frac{2s^2 - 4s}{6 + 2s} = \frac{2s^2 - 4s}{6 + 2s} \quad \text{وعند النقطة (٣،١)}$$

العمودي	المماس
$6 - 2s$	$\frac{2 - 4}{6 + 2} = 1$
$6 - (3 - 1)$	$\frac{1}{6} = \frac{2}{12} =$
	$\therefore (3 - 1) - \frac{1}{6} = (1 - 1)$

مثال: إذا كان $s = (s + v)$ فاثبت أن $s = v$

الحل

$$s = v = s + v \Rightarrow s = s + v \Rightarrow 0 = v$$

$$(s - s) = (s + s + v) \Rightarrow 0 = (2s + v) \Rightarrow 0 = (s - s) \Rightarrow 0 = 0$$

$$\therefore s^2 = s^2 \quad \therefore s^2 = s^2 \text{ بالضرب } \times s$$

$$s^2 = s^2 \Rightarrow s^2 = s^2 \Rightarrow s^2 = s^2$$

$$\therefore s = s \Rightarrow s = s$$

مثال: إذا كانت $s = 2$ جتا $s - s$ جتا $s - s$ جتا $s + s = 2$ جتا s

الحل

$$s = 2 \text{ جتا } s - s \text{ جتا } s$$

$$\frac{s}{s} = 2 \text{ جتا } s - [(1) \text{ جتا } s + (-) \text{ جتا } s]$$

$$= 2 \text{ جتا } s - \text{جتا } s + s \text{ جتا } s = s \text{ جتا } s + s \text{ جتا } s$$

$$\therefore s = s \Rightarrow s = s$$

$$= s \text{ جتا } s + s \text{ جتا } s = s \text{ جتا } s$$

$$\therefore s + s = s \text{ جتا } s + 2 \text{ جتا } s = 2 \text{ جتا } s$$

مثال: إذا كانت $s = \frac{\text{جتا } s}{s}$ اثبت أن : $s = 2 \text{ جتا } s + s = 0$

الحل

$$s = \frac{\text{جتا } s}{s} \Rightarrow s = s \text{ جتا } s$$

$$\therefore s = s \Rightarrow s = s \Rightarrow s = s$$

$$\therefore s = s \Rightarrow s = s \Rightarrow s = s$$

$$\therefore s = s \Rightarrow s = s \Rightarrow s = s$$

تمرين (٤)

- (١) إذا كان $s^1 + s^1 - s^5 + s^3 = 15$ - أوجد $\frac{s^6}{s^6}$
- (٢) إذا كان $s^1 + s^1 - s^5 = 6$ - أوجد $\frac{s^6}{s^6}$ عند النقطة (٣، ٢).
- (٣) إذا كان $s^1 = \frac{1}{s^5} + \frac{1}{s^5} - s^2 + s^7 - s^5$ - أوجد s^1 عندما $s^1 = 1$.
- (٤) إذا كانت $s^2 = \frac{s^2}{s^1 + 1}$ - أثبت أن : $\frac{s^3}{s^1} \times s^1 + s^1 = \text{صفر}$ (حيث $s^1 \neq 0$)
- (٥) إذا كانت $s^1 = (s^1 - s^1)$ حيث s^1 مقدار ثابت فاثبت أن :
- $s^1 = s^3 - s^1 + s^1 = \text{صفر}$
- (٦) إذا كان $s^1 = s^1 + s^1$ ، ب ثابتان - أثبت أن : $s^1 + s^1 = s^1 = 1$
- (٧) إذا كانت $s^2 = s^3 - s^1$ - أثبت أن : $s^1 + s^1 = s^1$ $\frac{1}{s^1} = \frac{1}{s^1}$
- (٨) إذا كان $s^1 = \sqrt{s^1 + 1} - 1$ - أثبت أن : $(s^1 + 1) s^1 + s^3 + s^1 = 0$
- (٩) أوجد إذا عرفت s^1 بالمعادلة :
- $s^3 = s^1 + s^1 - s^1 = \text{صفر}$
- (١٠) أوجد معادلتى المماس والعمودي للمنحنى :
- $s^1 + s^1 = 20$ عند النقطة ق (٣، ٢)

الباب الثالث

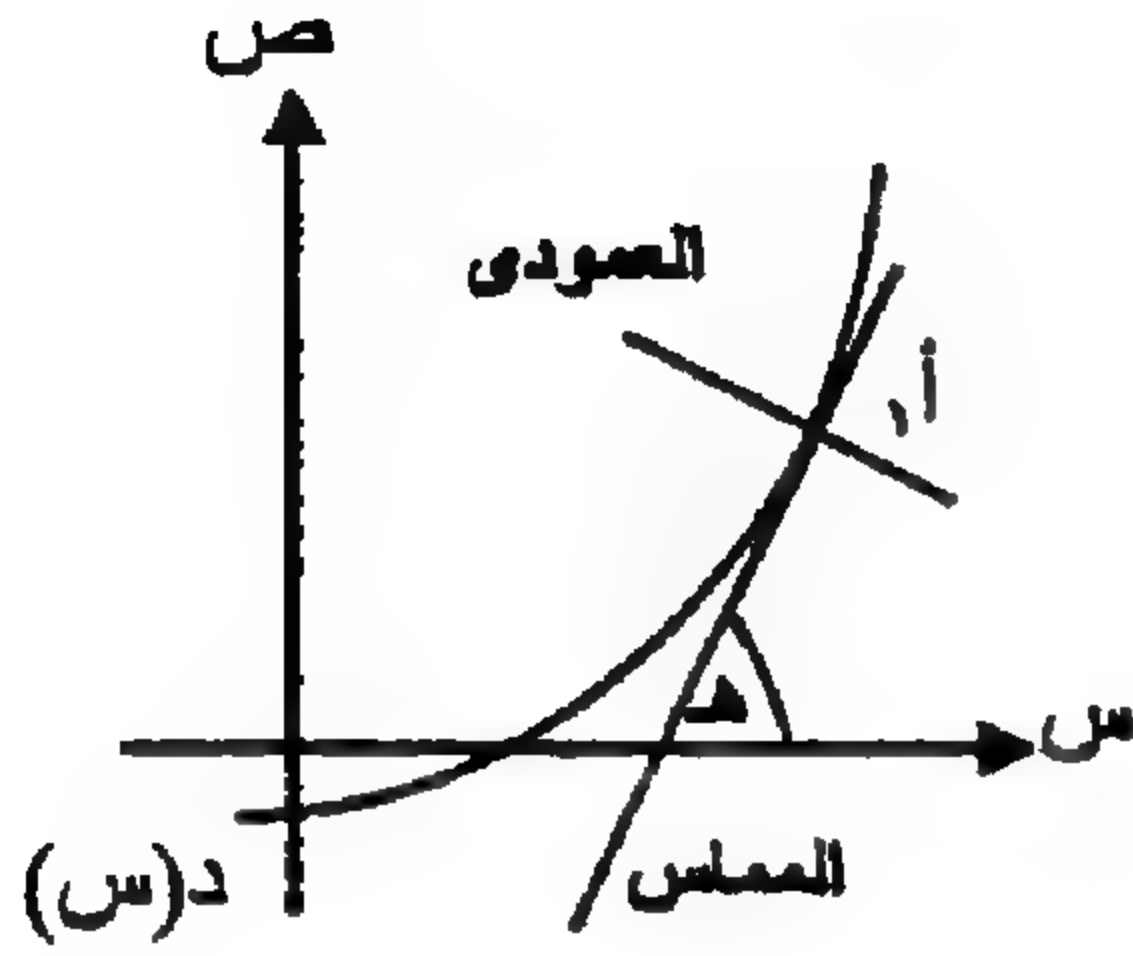
تطبيقات علي المشتقة الأولى

أولاً: التطبيق الهندسي

إذا كانت $v = d(s)$ دالة فإن ميل المماس عند النقطة (s_1, v_1) والتي تقع علي

بيان الدالة هو $v_1 = \frac{dv}{ds}$ وتكون معادلة المماس عند هذه النقطة هي :

$$v - v_1 = (s - s_1) \frac{dv}{ds}$$



ويكون ميل العمودي هو $-\frac{1}{\frac{dv}{ds}}$ ومعادلة العمودي هي :

$$v - v_1 = (s - s_1) \left(-\frac{1}{\frac{dv}{ds}} \right)$$

ملاحظات :

١- ميل المماس $m = \tan h$ حيث h هي الزاوية التي يصنعها المماس مع الإتجاه الموجب لمحور السينات .

٢- إذا كان المماس // المحور s فإن $m = \tan h = 0$ ، $h = 0^\circ$.

٣- إذا كان المماس \perp المحور s فإن $m = \tan h = \infty$ ، $h = 90^\circ$.

٤- عندما $m =$ موجب $\therefore h$ تكون زاوية حادة .

٥- عندما $m =$ سالب $\therefore h$ تكون زاوية منفرجة .

٦- إذا تقاطع منحنى d_1 مع منحنى d_2 فإن الزاوية بينهما = الزاوية h بين مماسيهما عند نقطة

التقاطع حيث نعين h من $\tan h = \left| \frac{\frac{dv_2}{ds} - \frac{dv_1}{ds}}{1 + \frac{dv_1}{ds} \frac{dv_2}{ds}} \right|$ حيث m_1 هو ميل المماس الأول ، m_2 هو ميل

المماس الثاني .

٧- عند تعامد مستقيمان ميل الأول m_1 وميل الثاني m_2 فإن $m_1 \times m_2 = -1$.

٨- عند توازي المستقيمان فإن $m_1 = m_2$.

أمثلة :

مثال: أوجد معادلتى المماس والعمودي للدالة $v = \frac{s^2}{1+s}$ عند النقطة $(-1, 1)$.

الحل

$$\frac{(1+s^2)s^2 - 2 \times (1+s^2)}{(1+s)} = m \therefore \frac{s^2}{1+s} = \text{ص} \therefore$$

$$\therefore \text{عند } s=1 \Leftarrow m = \frac{(1+1)(1-1) \times 2 - 2(1+1)}{(1+1)} = \frac{4+4}{4} = 2$$

\therefore معادلة المماس $\text{ص} - \text{ص} = 1 = m = (s - s) \Leftarrow \text{ص} + 1 = (s+1)^2 \Leftarrow \text{ص} = s^2 + 1$

معادلة العمودى هي : $\text{ص} + 1 = \frac{1-s}{2} = (1+m) \Leftarrow \text{ص} + 1 = s + 3 = 0$

مثال : أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة $\text{ص} = s + \text{جاس}$ عند النقطة $(0,0)$ وكذا معادلة العمودى عند نفس النقطة .

الحل

$$\text{ميل المماس} = \frac{d \text{ص}}{d s}$$

$$= 1 + \text{جتا } s \text{ عند النقطة } (0,0)$$

$$\text{ميل المماس} = 1 + \text{جتا } 0 = 1 + 1 = 2$$

$$\text{معادلة المماس هي } \frac{\text{ص} - 0}{s - 0} = 2$$

$$\text{ص} = 2s \text{ ، } \text{ص} - 2s = \text{صفر}$$

$$\text{معادلة العمودى هي } \frac{1-s}{2} = \frac{\text{ص} - 0}{s - 0}$$

$$\text{ص} - 2s = \text{ص} + 2s = \text{صفر}$$

مثال : أثبت أن المنحنى $\sqrt{3} = \text{ص}$ يتقاطع على التعمد مع المنحنى $\text{ص} = 2 - 2s$ أوجد نقط التقاطع .

الحل

$$\therefore s \text{ ص} = \sqrt{3} \text{ --- (1) } \therefore s \text{ ص} = \frac{\text{ص} \cdot \text{ص}}{s} + \text{ص} = 0 \therefore \frac{\text{ص} - \text{ص}}{s} = 0$$

$$\therefore \text{ص}^2 - 2s = 2 \text{ --- (2) } \therefore 2 \text{ ص} = \frac{\text{ص} \cdot \text{ص}}{s} - 2s = 0$$

$$\therefore m_1 \times m_2 = -1$$

$$\therefore m = \frac{s}{v}$$

\therefore المنحنيان يتقاطعان متعامدين

لكي نوجد نقط التقاطع من (١) $\therefore s = \frac{\sqrt{3}}{v}$ نعوض في (٢)

$$\therefore v^2 - \frac{3}{v^2} = 1 \quad \therefore v^2 - 3 = v^2$$

$$\therefore (v^2 - 1)(1 + v^2) = 0 \quad \therefore v^2 = 1 \text{ مرفوض} \quad \therefore v^2 = 3$$

$$\therefore v = \pm \sqrt{3} \quad \therefore \text{من (١)} \quad \therefore \text{عند } v = \pm \sqrt{3} \quad \therefore s = \pm 1$$

\therefore نقط التقاطع هي $(\pm 1, \pm \sqrt{3})$ أي $(1, \sqrt{3})$ ، $(-1, -\sqrt{3})$

مثال: أثبت أن المنحنيين $s = \frac{m}{3-2}$ ، $v = [2-m]^2 (1-2)$ متماسان عند النقطة $(1, -1)$ - ثم أوجد معادلة المماس المشترك عند تلك النقطة .

الحل

$$\therefore s = \frac{m}{3-2} \quad \therefore m = \frac{s}{v} = \frac{3-2}{s}$$

$$\therefore (1) \quad s = 1 = v$$

$$v = (s-2)^2 (1-2)$$

$$\therefore m = \frac{s}{v} = \frac{3-2}{s} \quad \therefore (2) \quad s = 1 = v$$

$$\therefore (2) \quad s = 1 = v$$

$$\therefore m = 1 \quad \therefore \text{المنحنيين متماسين}$$

$$\text{معادلة المماس المشترك : } v = 1 = m (s-1) \quad \therefore v = 1 + (s-1)$$

$$\therefore 2 = 3 - v \quad \therefore \text{معادلة المماس المشترك}$$

مثال: أوجد النقطة التي عندها المماس يوازي المحور s للمنحنى $v = 2 - s$ ، $s < 0$

الحل

$$v = 2 - s \quad \therefore \frac{v}{s} = \frac{2-s}{s} \quad \therefore v = 2 - s$$

، \therefore المماس // المحور s $\therefore m = 0$ \therefore جتا $2 = s = 0$

$$\therefore 2 = s = \frac{ط}{4} \Leftarrow s = \frac{ط}{4} \text{ حيث } ط < s < 0$$

$$\therefore \text{من (1)} \Leftarrow ص = جا 2 \times \frac{ط}{4} = 1$$

$$\therefore \text{النقطة هي } \left(1, \frac{ط}{4} \right)$$

مثال: إذا كان المماس للمنحنى $ص = s$ (ب - s^2) عند النقطة $s = 2$ يصنع زاوية $هـ$ حيث $ظا هـ$ حيث $ظا هـ = 2 -$ أوجد قيمة $ب$.

الحل

$$\therefore ص = ب - s^2 \Leftarrow (1) \therefore \frac{ص}{س} = \frac{ص}{س} = ب - 2s \therefore ب - 2s = \frac{ص}{س}$$

$$\text{ولكن } م = 2 \text{ عند النقطة } s = 2$$

$$\therefore ب - 2 = 4 \times 3 \therefore ب = 14$$

مثال: إذا كان المنحنى $د(س) = أس^3 + ب س^2 + ج س$ ممس محور السينات عند النقطة $(0, 1)$ وأن ميل المماس لهذا المنحنى عند النقطة $(0, 0)$ يساوي 2 فأوجد قيم كل من $ا، ب، ج$

الحل

$$\therefore ص = أس^3 + ب س^2 + ج س \Leftarrow (1)$$

$$، \frac{ص}{س} = م = 3أس^2 + 2ب س + ج \Leftarrow (2)$$

$$\text{عند } (0, 0) \Leftarrow 2 = م \therefore 2 = ج + 0 + 0 \therefore ج = 2$$

$$\text{عند } (0, 1) \text{ المنحنى ممس المحور } s \therefore م = 0$$

$$\therefore \text{من (2)} : 0 = 2 + 2 + 0 \Leftarrow (3)$$

النقطة $(0, 1)$ تحقق معادلة المنحنى

$$\therefore 0 = 2 + 2 + 0 \Leftarrow (4) \text{ بالضرب } \times (-2) \text{ والجمع مع (3)}$$

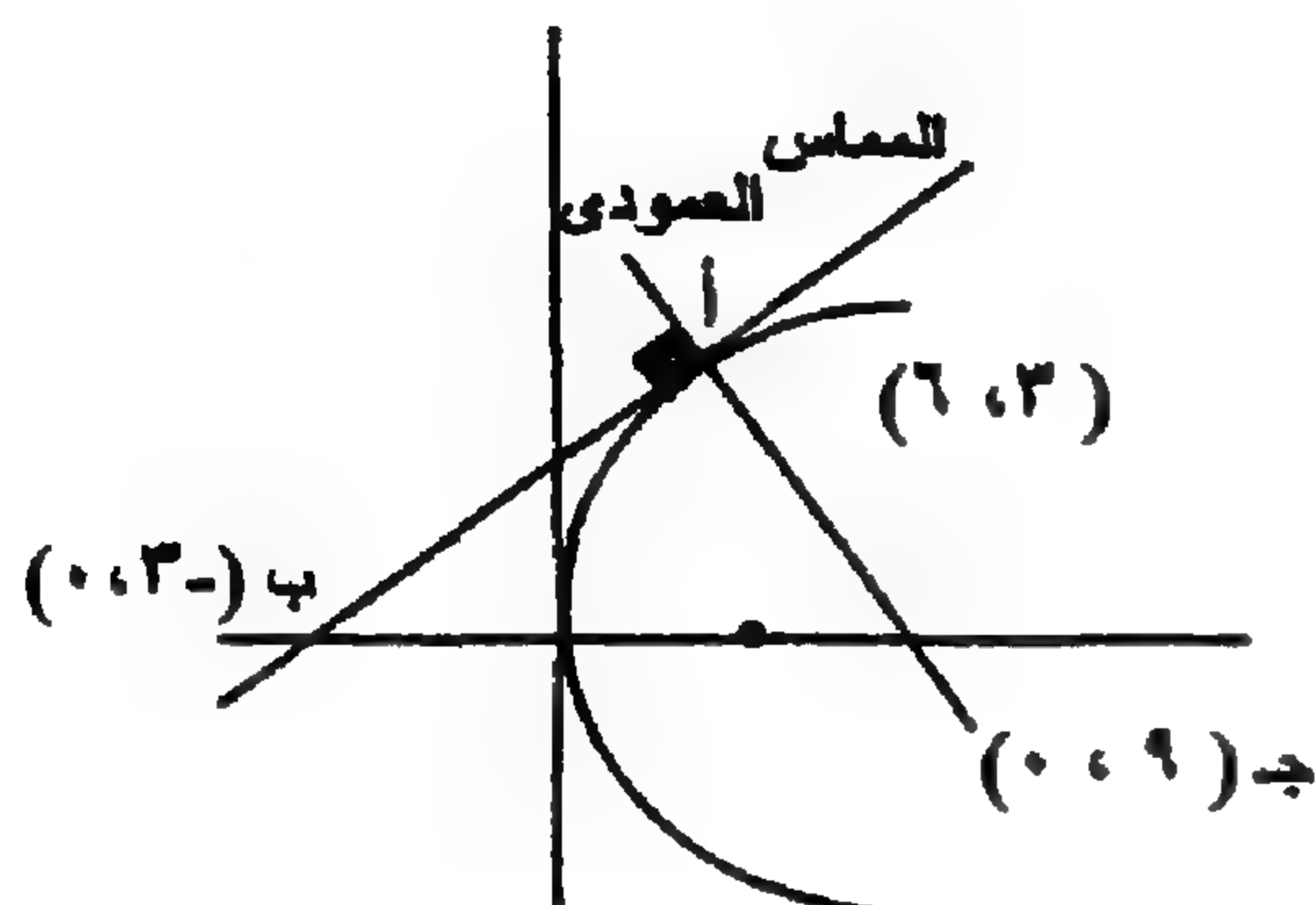
$$\therefore 0 = 2 - 4 \therefore 2 = 1$$

$$\text{من (4)} : ب = 4$$

مثال : أوجد رؤوس المثلث الذي أضلاعه هي كل من المحور س ، والمماس والعمود لمنحنى

ص^٢ = ١٢ س عند النقطة (٦ ، ٣)

الحل



∴ ص^٢ = ١٢ س — (١)

∴ حيث أن أ = (٦، ٣) هي نقطة التماس

$$١٢ = \frac{ص^٢}{س}$$

$$٦ = \frac{٦}{ص} \quad \text{عند ص} = ٦$$

$$١ = م$$

$$ص - ٦ = ١ \times (٣ - س) \Leftrightarrow ص = س + ٣ \text{ — (٢)}$$

معادلة العمود هي ص - ٦ = ١ - (س - ٣) $\Leftrightarrow ص + س = ٩$ — (٣)

∴ تقاطع المماس مع المحور س نضع ص = ٠ ∴ س = ٣ -

∴ الرأس ب = (٠ ، ٣ -)

تقاطع العمود مع المحور س يعطى الرأس جـ وهي (٠ ، ٩) وهي رؤوس المثلث أ، ب، جـ

مثال : أثبت أن معادلة المماس لمنحنى الدالة التي معادلتها $١ = \frac{ص^٢}{ب} + \frac{س^٢}{ا}$ عند النقطة

$$(١، ١) \text{ الواقعة عليه هي } ١ = \frac{ص^٢}{ب} + \frac{س^٢}{ا}$$

الحل

$$١ = \frac{ص^٢}{ب} + \frac{س^٢}{ا} \quad \therefore \text{بالاشتقاق}$$

$$٠ = \frac{٢ص}{ب} \times \frac{١}{ب} + \frac{٢س}{ا} \times \frac{١}{ا}$$

$$\therefore \frac{٢ص}{ب} = -\frac{٢س}{ا} = -\frac{ص}{س}$$

$$\therefore \left(\frac{ص_1}{ص_2} \right) = \frac{ص_1}{ص_2} = \frac{ص_1}{ص_2} = \frac{ص_1}{ص_2}$$

معادلة المماس بمعلومية ميل ونقطة ص - ص₁ = م (ص - ص₁)

$$\therefore ص - ص_1 = \frac{ص_1}{ص_2} (ص - ص_1)$$

$$\therefore ص - ص_1 = \frac{ص_1}{ص_2} (ص - ص_1)$$

$$\therefore ص - ص_1 = \frac{ص_1}{ص_2} (ص - ص_1)$$

$$\therefore \text{النقطة } (ص_1, ص_1) \text{ واقعة على المنحنى } 1 = \frac{ص_1}{ص_2} + \frac{ص_1}{ص_2}$$

$$\therefore ص - ص_1 = \frac{ص_1}{ص_2} (ص - ص_1)$$

بالتعويض في (1)

$$\therefore ص - ص_1 = \frac{ص_1}{ص_2} (ص - ص_1)$$

$$\therefore 1 = \frac{ص_1}{ص_2} + \frac{ص_1}{ص_2} \text{ وهو المطلوب}$$

تمرين (٥)

❖ أوجد ميل المماس لكل من منحنيات الدوال الآتية عند النقطة المبينة أمام كل منها :

$$(١) \text{ ص} = \text{س}^4 + ٣ \text{س}^2 - ٦ \text{ عند } (١, -٢)$$

$$(٢) \text{ ص} = \frac{1}{\sqrt{\text{س}}} \text{ عند } (١, ١) \text{ حيث } \text{س} < ٠$$

$$(٣) \text{ س}^2 - \text{س} + \text{ص} = ٢٧ \text{ عند } (٦, ٢)$$

(٤) $\text{ص} = (\text{س} - ١)(\text{س} + ٢)(\text{س} - ٣)$ عند نقط تقاطعة مع محور السينات - أوجد قياس الزاوية التي يصنعها المماس لكل من منحنيات الدوال الآتية مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة المبينة أمام كل منها .

$$(٥) \text{ ص} = \text{س}^2 - \text{س} + ١ \text{ عند النقطتين } (١, ١), (١, ٠)$$

$$(٦) \text{ ص} = \frac{4}{1 + \text{س}} \text{ عند النقطة } (١, ٢)$$

$$(٧) \text{ س}^2 + \text{ص}^2 - ٢ \text{س} + ٦ \text{ص} + ٢ = ٠ \text{ عند النقطة } (٣, ١)$$

(٨) أوجد النقط على منحنى الدالة $\text{ص} = ٢ \text{س}^2 - ٣ \text{س}^2 - ١٢ \text{س} + ١$ التي يكون عندها المماس موازياً لمحور السينات .

(٩) أوجد النقط على منحنى الدالة $\text{ص} = (\text{س}^2 - ٣)(\text{س}^2 - ٦ + ٣)$ التي يكون عندها المماس موازياً لمحور السينات .

(١٠) أوجد النقط على منحنى الدالة $\text{ص} = \frac{٢-١}{٢-٣} \text{س}$ التي يكون عندها المماس موازياً للمستقيم $٣ \text{س} - \text{ص} = ٠$

(١١) أوجد النقط على منحنى الدالة $\text{ص} = ٢ \text{س}^3 - ٣ \text{س} + ٥$ التي يكون عندها المماس أولاً: موازياً للمستقيم $٣ \text{س} + \text{ص} = ٥$

ثانياً : عمودياً على المستقيم $٩ \text{ص} - ٨ = ٠$

(١٢) إذا كان قياس الزاوية بين المماس لمنحنى الدالة $\text{ص} = \text{أ} \text{س}^2 + \text{ب} \text{س}^2 - ٢ \text{س} + ٦$ عند النقطة (١, ٢) الواقعة عليه والاتجاه الموجب لمحور السينات هو $\frac{٣\pi}{4}$ فأوجد كل من أ، ب .

(١٣) أوجد قيم أ، ب، ج حتى يكون لمنحني الدالتين $ص = أ س^٢ + ب س$ ، $ص = ج س^٢$ من مماس مشترك عند النقطة (١، ٢) .

(١٤) أوجد معادلة المماس ومعادلة العمودى لكل من منحنيات الدوال الآتية عند النقطة المبينة أمام كل منها : وبالصورة المطلوبة .

أ- $ص = س^٢ + ٢ س - ٤$ عند النقطة (١، ٤) الاتجاهية .

ب- $ص = \frac{س+١}{س-١}$ عند النقطة (٢، ٣) الاحداثية .

ج- $ص = \frac{٨}{٣س+٤}$ عند النقطة التي إحداثيها السيني ٢ الاتجاهية .

د- $ص = س^٢ + ٢ س - ٣$ عند النقطة (٢، ١) الاحداثية .

هـ- $ص = س^٢ - ٣ س - ٥$ عند النقطة التي إحداثيها السيني ٣ الاتجاهية .

(١٥) أثبت أن العمودى على منحنى الدالة $ص = ٣ - ٦ س - ٥ س^٢$ عند النقطة (١، $\frac{١}{٣}$) يمر بنقطة الأصل .

(١٦) أوجد معادلة المماس للمنحنى $ص = ٢٠ - ٢ س$ الذى يصنع مع المحور $س$ زاوية قياسها $\frac{\pi}{٤}$.

(١٧) أوجد معادلتى المماسين للدائرة $ص = ١ + ٢ س - ٥ س^٢$ الموازيين للمستقيم $ر = (١، ١) + ك(٣، ٢)$.

(١٨) أوجد معادلة المماس للمنحنى $ص = س^٢ - ٣ س$ العمودى على المستقيم $ص + ٢٩ = ٠$.

(١٩) أثبت أن المنحنيين $ص = ٢ س^٢ - ٣ س + ٨$ ، $ص = س^٢ - ٣ س + ٩$ يتقاطعان على التعامد عند النقطة (١، ٧) .

(٢٠) أثبت أن المنحنيين $ص = س^٢ - ٢ س + ٢$ ، $ص = ٣ س - س^٢$ متماسين - ثم أوجد معادلة المماس المشترك لهما عند نقطة تماسهما .

ثانياً : المعادلات الزمنية المرتبطة

في هذه الحالة يوجد عدد من المتغيرات التابعة مرتبطة معاً بواسطة متغير مستقل هو ن وذلك يكون في علاقة دالية واحدة ويطبق هذا في إيجاد معدل التغير في المساحا أو الحجم وغيرها.

مثال: يتساقط رمل على سطح الأرض مكوناً كومة على شكل مخروط دائري قائم ارتفاعه =

$\frac{3}{4}$ نصف قطر قاعدته وذلك بمعدل ٢٧ قدم^٣ / دقيقة - فاوجد :

(أ) معدل الزيادة في نصف القطر في اللحظة التي يكون عندها نق = ٦ قدم .

(ب) معدل الزيادة في المساحة الجانبية .

الحل

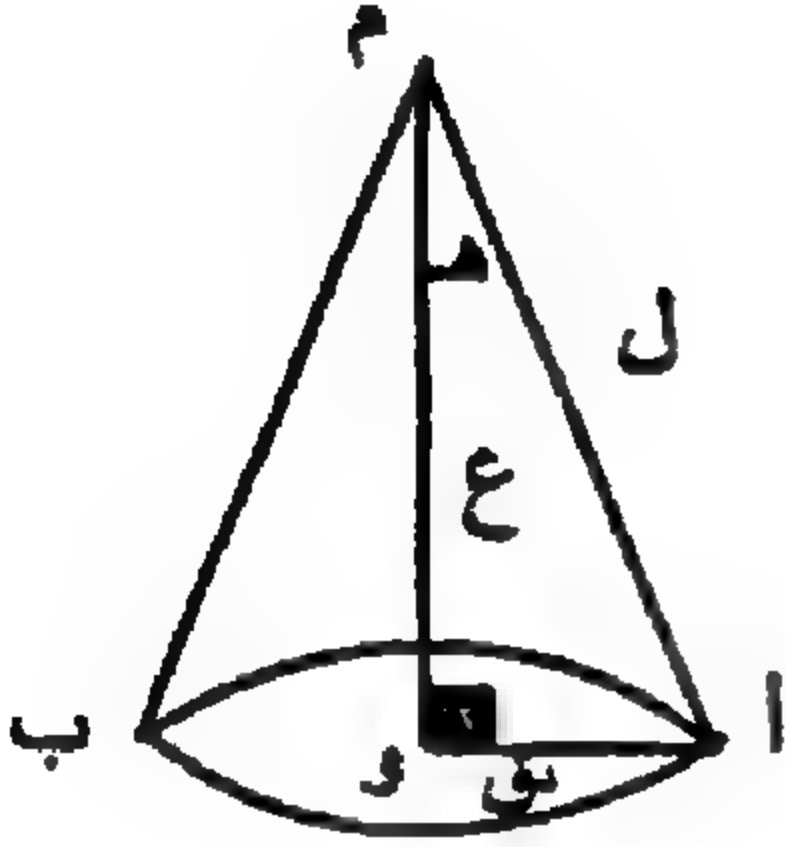
(أ) ح المخروط = $\frac{1}{3}$ ط نق^٢ × ع ، ∴ ع = $\frac{3}{4}$ نق ∴ ح = $\frac{1}{4}$ ط نق^٢ --- (١)

$$\therefore \frac{د ح}{د ن} = \frac{3}{4} ط نق^٢ \cdot \frac{د نق}{د ن}$$

$$\text{لكن نق} = ٦ ، \frac{د ح}{د ن} = ٢٧$$

$$\therefore ٢٧ = \frac{3}{4} ط \times ٦$$

$$\therefore \frac{د نق}{د ن} = \frac{١}{٦} ط \text{ قدم / ث}$$



(ب) ∴ ع = $\frac{9}{16}$ نق ، ل = نق + ع

$$\therefore ل = نق + \frac{9}{16} نق = \frac{25}{16} نق \leftarrow ل = \frac{5}{4} نق$$

$$\therefore م الجانبية = ط نق ل = ط \times \frac{5}{4} نق$$

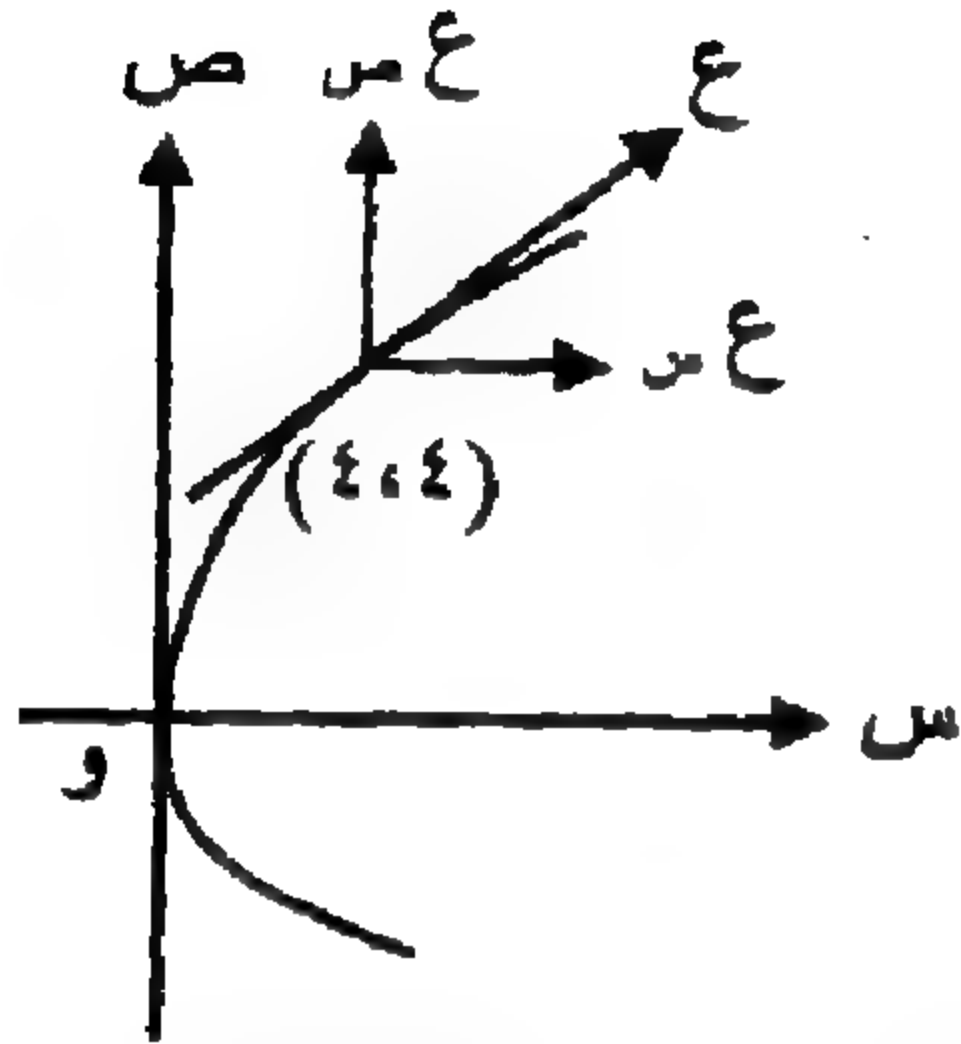
$$\therefore \frac{د م}{د ن} = \frac{5}{4} ط \times ٢ نق \times \frac{د نق}{د ن} = ١٥ قدم^٢ / دقيقة$$

مثال: تتحرك نقطة مادية على القطع المكافئ $s^2 = 4s$ على الجزء الواقع في الربع الأول بسرعة ثابتة $= 5$ قدم / ث ، فإذا كانت الحركة مبتداه من نقطة الأصل.

- فأوجد s, \dot{s} عند النقطة $(4, 4)$

الحل

$$s^2 = 4s \quad \therefore \dot{s} = \frac{ds}{dt} = \frac{4s}{2s} = 2 \quad \text{عند } (4, 4)$$



$$\therefore \dot{s}^2 = 4 \quad \therefore \dot{s} = 2 \quad \text{عند } (4, 4) \quad (1)$$

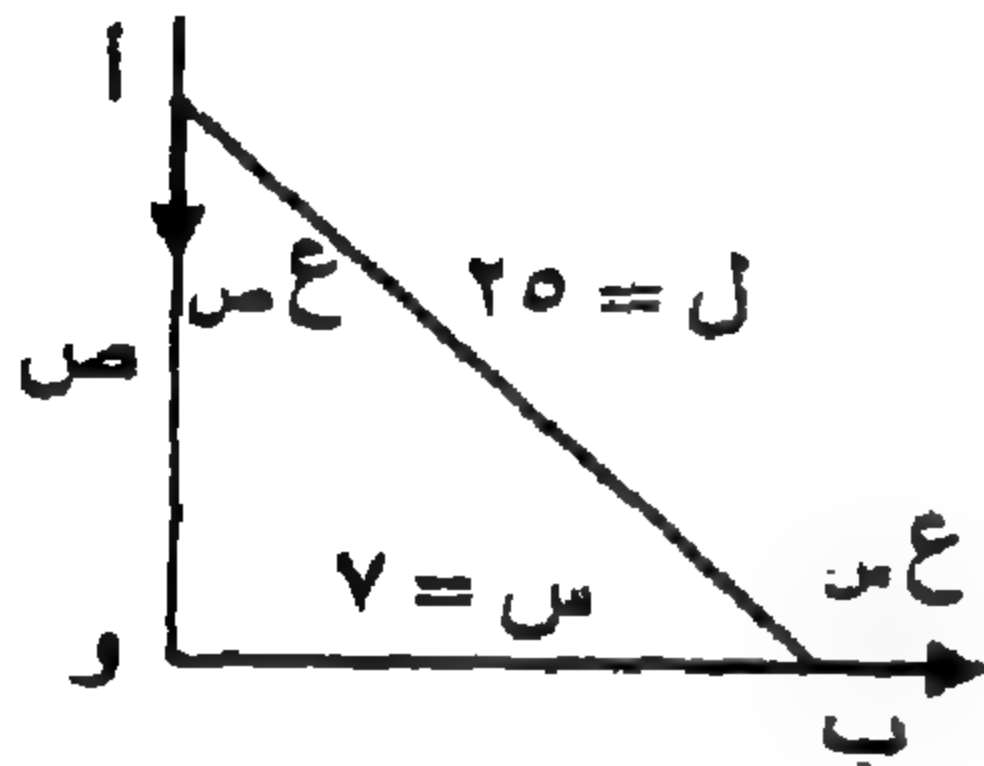
$$\text{ولكن } \dot{s} = 5 \quad \therefore \sqrt{\dot{s}^2 + \dot{s}^2} = 5 \quad \text{بالتربيع}$$

$$\text{ومن (1)} \quad \therefore 25 = \dot{s}^2 + \dot{s}^2 = 4 \quad \therefore \dot{s} = 5$$

$$\therefore \dot{s} = 5 \quad \text{و } \dot{s} = 2 \quad \text{وحدة سرعة}$$

مثال: ا ب سلم طوله ٢٥ قدم يرتكز طرفه أ على حائط رأس وطرفه ب على أرض أفقية تحرك الطرف ب مبتدأ عن الحائط بمعدل ١٢ قدم / ث - فأوجد سرعة انزلاق الطرف العلوي أ عندما يكون الطرف ب يبعد ٧ قدم من الحائط.

الحل



بفرض $\dot{s} = 12$ قدم / ث سرعة الطرف ب

، $\dot{s} = ?$ سرعة انزلاق الطرف أ

$$L^2 = s^2 + s^2 \quad \therefore L = 25 \quad \therefore \dot{L} = 0 \quad \therefore \dot{s}^2 + \dot{s}^2 = 0 \quad (1)$$

$$\text{عند } s = 7 \quad \therefore \dot{s}^2 + \dot{s}^2 = 0 \quad \therefore \dot{s}^2 = -\dot{s}^2 \quad \therefore \dot{s} = 12$$

$$\text{بتفاضل (1)} \quad \therefore \dot{s}^2 + \dot{s}^2 = 0 \quad \therefore \dot{s}^2 = -\dot{s}^2 \quad \therefore \dot{s} = 12$$

$$\therefore \text{صفر} = \dot{s}^2 + \dot{s}^2 = \frac{ds}{dt} + \frac{ds}{dt} = 0$$

$$\therefore 24 = \frac{ds}{dt} \quad \therefore \dot{s} = 12 \quad \therefore \dot{s} = 12$$

مثال: أ ب سلم طوله ٥٠ قدم يرتكز طرفه أ على حائط رأسي وطرفه ب على أرض أفقية فإذا

تحرك الطرف ب بعيداً عن الحائط بسرعة ٣ قدم / دقيقة - فابعد :

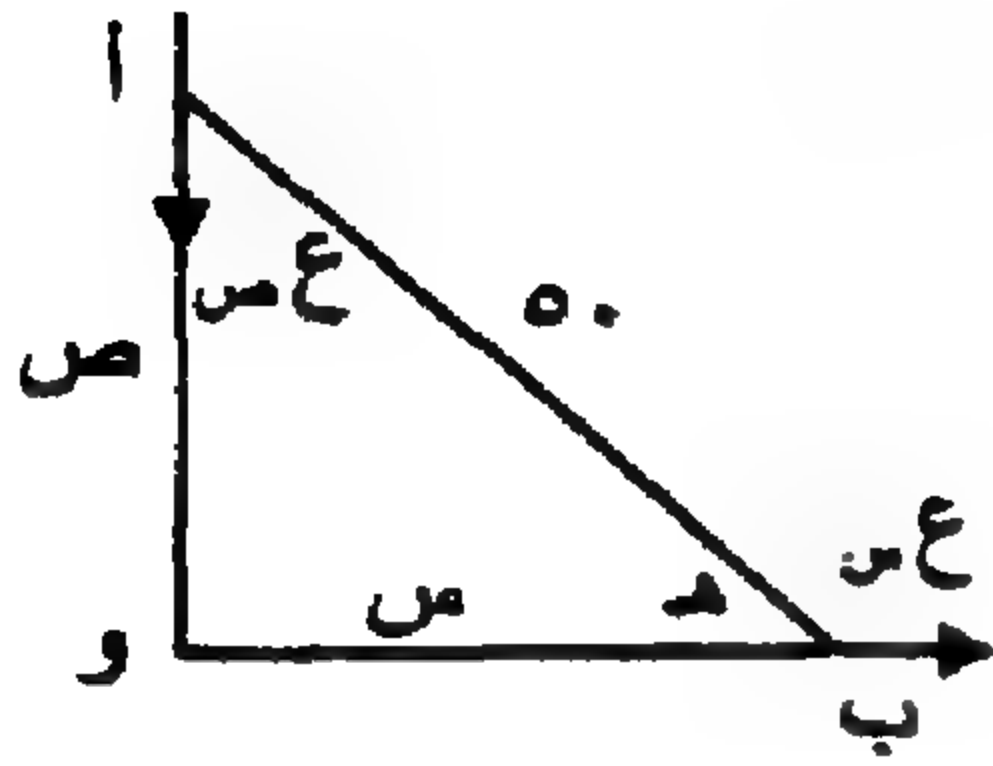
(أ) سرعة أ عندما تكون ب على بعد ١٤ قدم من الحائط .

(ب) بعد ب عن الحائط عندما تكون $|ع ب| = |ا ع|$ ومنه أوجد ميل السلم على الأرض .

(ج) بعد ب ن الحائط عندما تكون سرعة أ لأسفل = ٤ قدم / دقيقة .

الحل

(أ) انظر المثال السابق .



$$(ب) \quad ٥٠^2 = ص^2 + س^2 \quad (١)$$

$$(٢) \quad ٠ = ع \cdot ص + ٣ \cdot س \quad (٢)$$

$$\text{عند } |ع ب| = |ا ع|$$

$$\text{من (٢) } \therefore س = -ص \text{ أي أن } |س| = |ص|$$

$$\therefore \text{ من (١) } \therefore ٥٠^2 = ص^2 + ص^2 \therefore س = \sqrt{٢٥٠} \text{ قدم}$$

$$\therefore \text{ بعد ب عن الحائط } = س = \sqrt{٢٥٠} \text{ قدم ثانياً}$$

$$\text{جنا } \leftarrow \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{٢٥٠}}} = \frac{\sqrt{٢٥٠}}{٥٠} = ٠.٤٥$$

$$(ج) \quad \therefore ع = ٣ \text{ قدم/ث} \quad ع = ٤ \text{ قدم/ث} \therefore \text{ نعوض في (٢)}$$

$$\therefore س = \frac{٣}{٤} \text{ من نعوض في (١)}$$

$$\therefore ٥٠^2 = \frac{٩}{١٦} + ١٦$$

$$\therefore ٠ = ٤ \times ص + ٣ \times س$$

$$\therefore ٥٠^2 = \frac{٩}{١٦} + ١٦$$

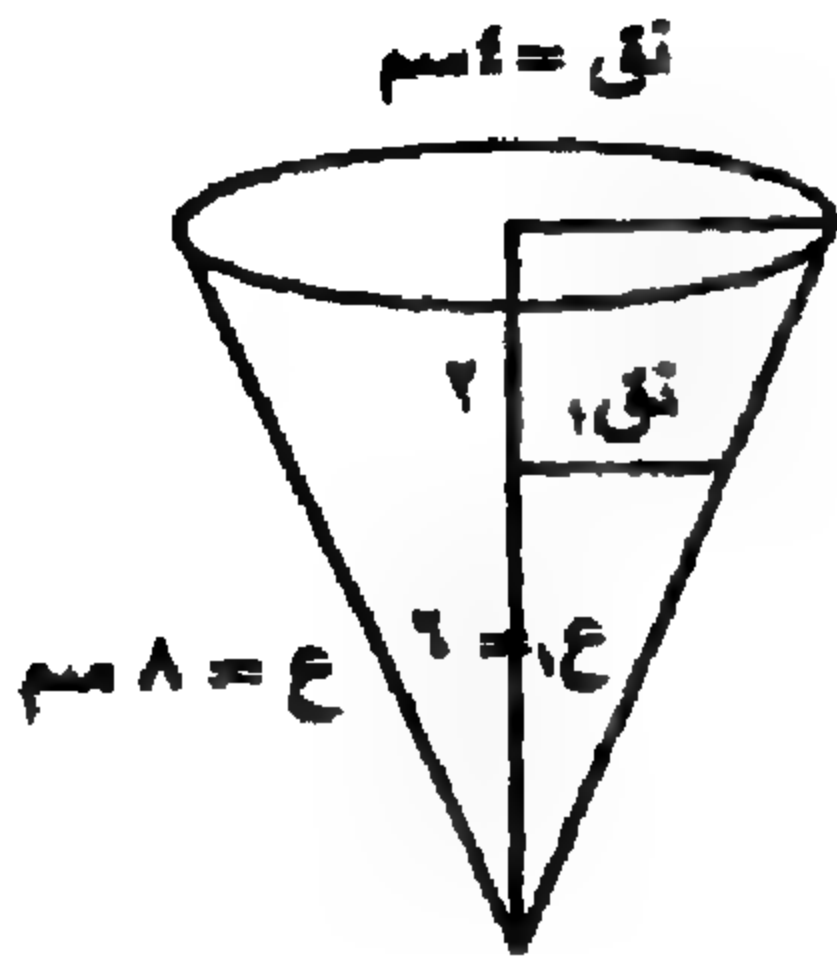
$$\therefore ١٠٠ \times ١٦ = ٢$$

$$\therefore ٤٠ = س$$

$$\therefore \text{ بعد ب عن الحائط } = ٤٠ \text{ قدم}$$

مثال: وعاء مخروطي رأسه إلى أسفل ارتفاعه = ٨ سم ، نصف قطر قاعدته = ٤ سم يتسرب سائل منه بمعدل ١ سم^٣/ث- أوجد معدل انخفاض سطح السائل عندما يكون على بعد ٢ سم من قاعدة الوعاء .

الحل



$$\text{من التشابه} \quad \frac{\text{نق}^1}{4} = \frac{\text{ع}^1}{8} \quad \therefore \text{نق}^1 = \frac{1}{2} \text{ع}^1$$

$$\therefore \text{نق}^2 = \frac{1}{4} \text{ع}^2$$

$$\therefore \text{ح} = \frac{1}{3} \text{ط} \text{نق}^2 \text{ع}^1 = \frac{1}{3} \text{ط} \frac{1}{4} \text{ع}^2 \times \frac{1}{2} \text{ع}^1 = \frac{1}{24} \text{ط} \text{ع}^3$$

$$\therefore \frac{\text{ح}^2}{\text{دن}} = \frac{1}{12} \text{ط} \times \frac{1}{4} \text{ع}^2 \times \frac{1}{2} \text{ع}^1 = \frac{\text{ع}^3}{24 \text{دن}}$$

$$\text{عندما يكون ع}^1 = ٦ \text{ سم} , \frac{\text{ح}^2}{\text{دن}} = ١ \text{ سم}^3/\text{ث}$$

$$\therefore ١ = \frac{1}{4} \text{ط} \times \frac{\text{ع}^3}{24 \text{دن}} \quad \therefore \frac{1}{\text{دن}} = \frac{\text{ع}^3}{9 \text{ط}} \text{ سم}^3/\text{ث}$$

مثال : يتحرك جسم أفقيا حسب المعادلة $\frac{\text{ن}^3}{1 + \text{ن}} = \text{سم} / \text{ثانية}$ من نقطة وأوجد :
(أ) ع. عند ن = ٠ (ب) أين ومتى يوقف الجسم لحظيا .

الحل

$$(١) \quad \frac{\text{ن}^3}{1 + \text{ن}} = \text{ف} \quad \text{---} (١)$$

$$\therefore \text{ع} = \frac{\text{د ف}}{\text{دن}} = \frac{\text{ن}^3 - (1 + \text{ن}) \text{ن}^2}{(1 + \text{ن})} \quad \text{---} (٢)$$

$$\therefore \text{ع} = \frac{(1 - \text{ن}) \text{ن}^2}{(1 + \text{ن})} \quad \text{---} (٢)$$

$$\therefore \text{ع} = \frac{(1 - ٠) \text{ن}^2}{(1 + ٠)} = ٣ \text{ سم} / \text{ث} \quad \text{عند } ٠$$

(ب) نضع ع = ٠ في (٢)

$$\therefore ٠ = \frac{\text{ن}^3 - \text{ن}^2}{(1 + \text{ن})}$$

$$\therefore \text{ن} = ١ \pm$$

$$\therefore \text{ن}^2 = ١$$

\therefore عند ن = ١ ث يوقف الجسم لحظيا نعوض في (١)

$$\therefore \text{ف} = \frac{1 \times 3}{1 + 1} = \frac{١}{2} \text{ سم وعلى بعد } \frac{1}{2} \text{ سم عن النقطة}$$

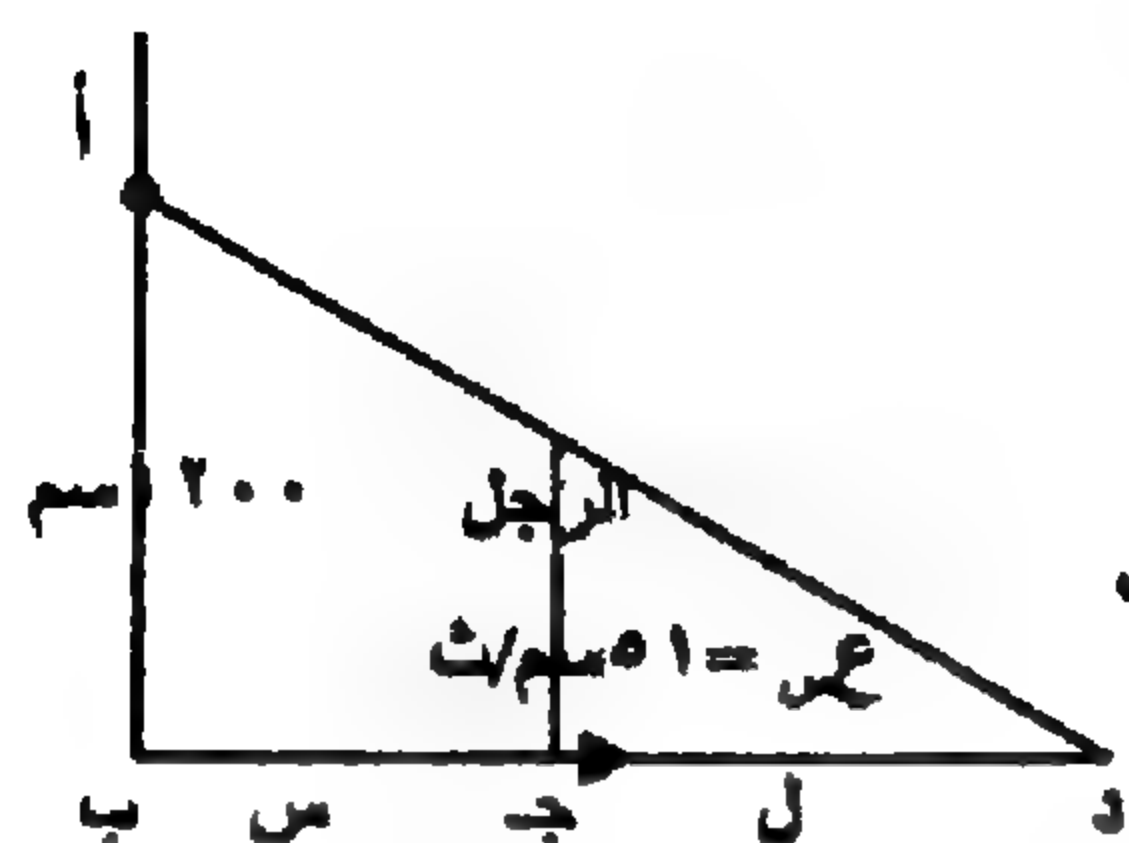
مثال : يتحرك رجل طوله ١٨٠ سم على سطح الأرض مبتعداً عن مصباح على ارتفاع ١٢ متر عن سطح الأرض وذلك بسرعة = ٥١ سم/ث عن موضع مسقط المصباح على الأرض . أوجد معدل ازدياد طول ظل الرجل على سطح الأرض .

الحل

بفرض أن طول ظل الرجل = ك ، س بعد الرجل عن النقطة ب .

$$\text{من التشابه } \therefore \frac{ل}{١٢٠٠} = \frac{ل + س}{١٨٠} \text{ حيث } \frac{ل}{ل + س} = \frac{١٨٠}{١٢٠٠}$$

$$\therefore ١٧ ل = ٣ س$$



$$\therefore \frac{د ل}{د ن} = \frac{٣}{١٧} \times \frac{د س}{د ن} = \frac{٣}{١٧} \times ٥١ = ٩ \text{ سم/ث}$$

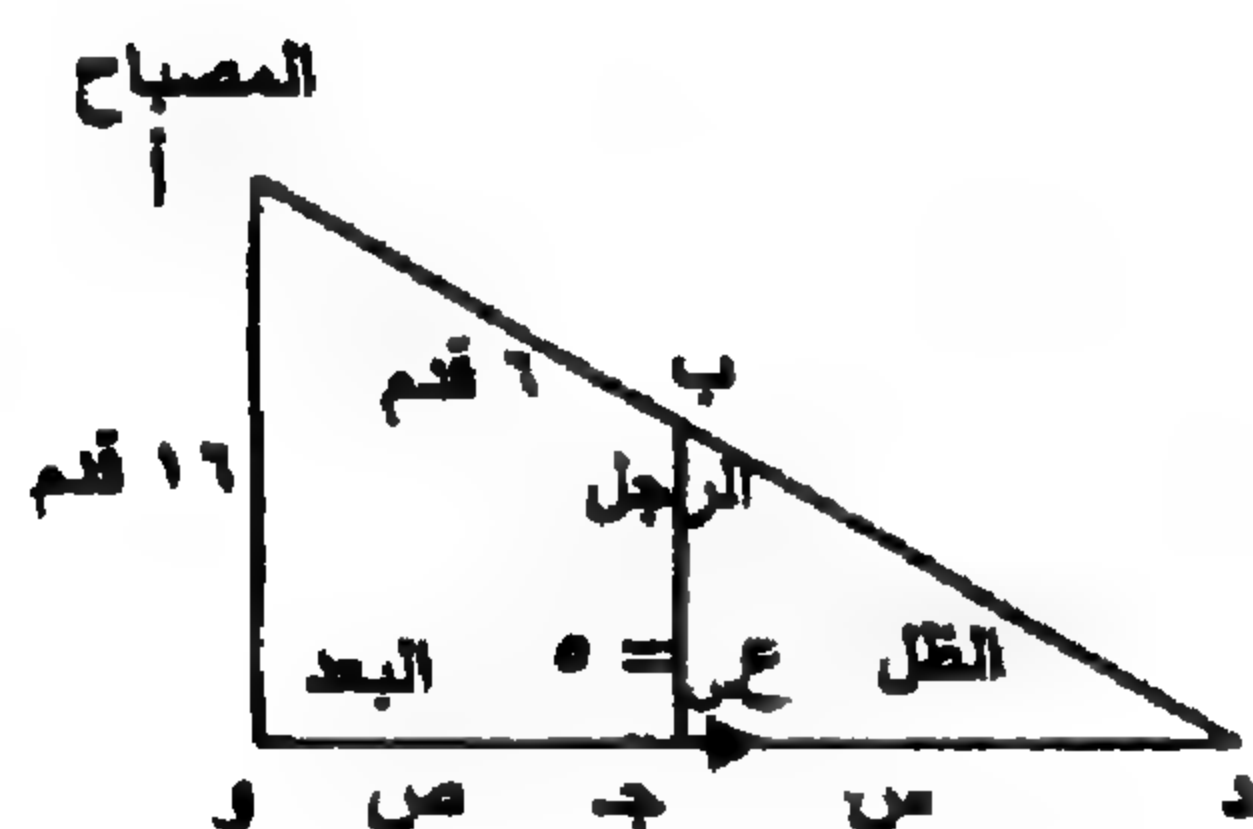
$$\text{حيث } \frac{د س}{د ن} = ٥١ \text{ سم/ث}$$

مثال : رجل طوله ٦ أقدام يتحرك بسرعة ٥ قدم / دقيقة نحو مصباح يطو عن سطح الأرض بمقدار ١٨ قدم - أوجد : (أ) معدل تناقص ظل الرجل .

(ب) بعد الرجل عن الحائط عندما يكون طول ظل الرجل = ٨ قدم .

الحل

$$(١) \quad \frac{س}{س + ص} = \frac{٦}{١٨} = \frac{١}{٣} \therefore ٢ س = ص \text{ --- (١)}$$



$$٢ \frac{د ص}{د ن} = \frac{د ص}{د ن} \Rightarrow ٢ \frac{د س}{د ن} = ٥$$

$$\therefore \text{معدل تناقص الظل} = \frac{٥}{٢} \text{ قدم / ث}$$

(ب) من (١) عندما ص = ٨

$$\therefore س = ٤ \text{ قدم}$$

مثال : يتزايد نصف قطر كرة بمعدل ٠.٠٣ بوصة / ث - فأوجد معدل تزايد حجم الكرة . ثم أوجد معدل تزايد مساحة سطح الكرة عندما يكون نصف القطر = ٣ بوصات .

الحل

$$\therefore \text{ح} = \frac{4}{3} \text{ ط بق}^2 \Leftarrow \frac{\text{د ح}}{\text{دن}} = \frac{4}{3} \text{ ط بق}^2 \cdot \frac{\text{دن}}{\text{دن}}$$

$$\therefore \frac{\text{د ح}}{\text{دن}} = \frac{4}{3} \text{ ط} \times 9 \times \frac{3}{100} = 1,08 \text{ بوصة}^2 / \text{ث}$$

$$\text{م} = \text{مساحة سطح لكرة} = \frac{4}{3} \text{ ط بق}^2 \quad \therefore \frac{\text{د م}}{\text{دن}} = 8 \text{ ط بق} \cdot \frac{\text{دن}}{\text{دن}}$$

$$\therefore \text{بق} = 3 \text{ بوصة} , \frac{\text{دن}}{\text{دن}} = 0,03 \text{ بوصة}^2 / \text{ث}$$

$$\therefore \frac{\text{د م}}{\text{دن}} = 8 \text{ ط} \times 3 \times \frac{3}{100} = 72 \text{ و ط بوصة}^2 / \text{ث}$$

مثال: أ ب ج مثلث قائم في ب ، فإذا كان طول أ ب = ١٦ سم و ينقص بمعدل ٢ سم/ث وطول

ب ج = ٩ سم ويزداد بمعدل ٣ سم/ث - فأوجد معدل التغير في مساحة المثلث بعد ٢ ثانية.

الحل

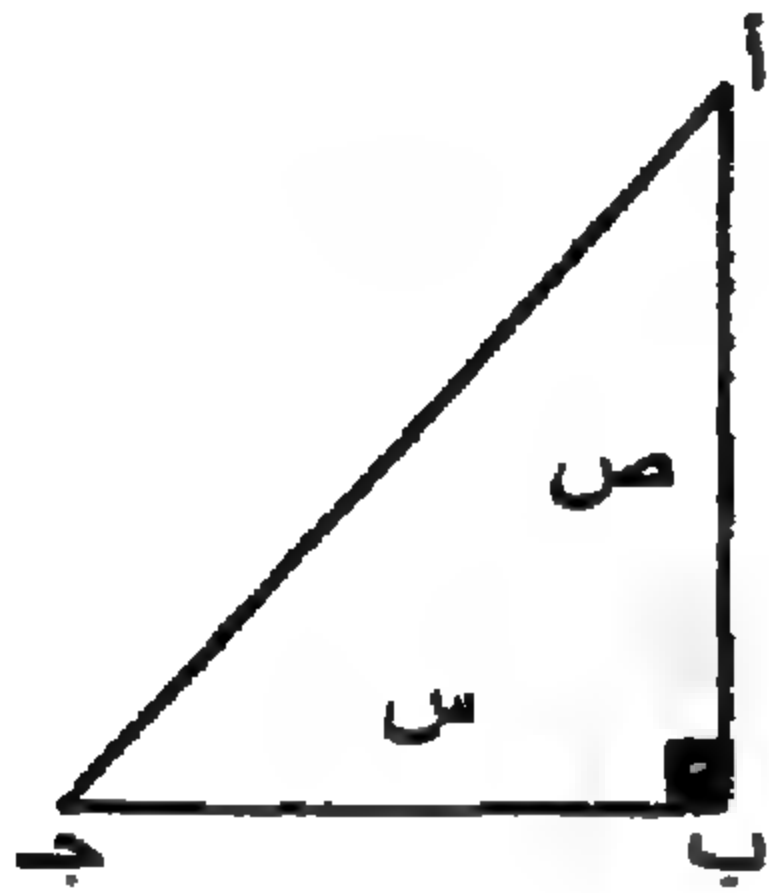
$$\text{بعد ٢ ثانية} \quad \therefore \text{أ ب} = \text{ص} = 16 - 2 \times 2 = 12 \text{ سم}$$

$$\text{ب ج} = \text{س} = 9 + 3 \times 2 = 15 \text{ سم}$$

$$\text{م} = \frac{1}{2} \text{ س} \cdot \text{ص}$$

$$\therefore \frac{\text{د م}}{\text{دن}} = \frac{1}{2} \left[\frac{\text{د ص}}{\text{دن}} \cdot \text{ص} + \frac{\text{د س}}{\text{دن}} \cdot \text{ص} \right]$$

$$\therefore \frac{\text{د م}}{\text{دن}} = \frac{1}{2} [3 \times 12 + (-2) \times 15] = 18 - 15 = 3 \text{ سم}^2 / \text{ث}$$



مثال: يتزايد ضلعان متقابلان من مستطيل بمعدل ٤ سم / ث ويتناقص الضلعان الآخران بحيث

تبقى مساحة المستطيل ثابتة = ٦٠ سم^٢ ، المطلوب :

(أ) معدل تغير محيط المستطيل عندما يكون طول الضلع المتزايد = ٨ سم .

(ب) أوجد بعد المستطيل عندما يتوقف المحيط عن التناقص .

الحل

(أ) نفرض أن الضلع المتزايد = س

$$\therefore \frac{\text{د س}}{\text{دن}} = 4 \text{ سم} / \text{ث} \text{ الضلع الآخر حيث}$$

= ؟ = معدل تناقص الضلع الآخر

$$\therefore \text{المساحة} = \text{س} \cdot \text{ص} = 60 \Leftarrow \text{ص} = \frac{60}{\text{س}} = \frac{1}{7} \text{ سم}$$



∴ بالتفاضل الضمني ∴ س · دص + ص · دس = ٠ ---- (١)

$$\therefore ٨ \times \frac{دص}{دن} = - \frac{١٥}{٢} \text{ سم / ث} \therefore$$

∴ المحيط ح = ٢ (س + ص)

$$\therefore \frac{دح}{دن} = ٢ \left(\frac{دص}{دن} + \frac{دس}{دن} \right) = (٢ - \frac{٣}{٤}) \quad (٢) \text{ ---}$$

$$= ٢ \times \frac{١}{٤} = \frac{١}{٢} \text{ سم / ث هـ . ط . ت}$$

ب) عندما يكون التغير في المحيط = صفر ∴ $\frac{دح}{دن} = \text{صفر}$ ∴ من (٢)

$$\therefore = \text{من (١)}$$

∴ من (١) س = ص

$$\text{لكن س} \times \text{ص} = ٦٠ ، \therefore \text{س} = \text{ص} = ٦٠$$

$$\therefore \text{س} = \text{ص} = \sqrt{١٥٧٢} \text{ سم وهما بعد المستطيل}$$

مثال: يتساقط رمل على أرض أفقية بمعدل ٩٦ سم^٢ / ثي مكونا مجسم على شكل مخروط

ارتفاعه = $\frac{١}{٣}$ قطر قاعدته . فاوجد :

أ- معدل التغير في ارتفاعه عندما يكون نصف قطر القاعدة = ١٢ سم

ب- معدل التغير في المساحة الجانبية للمجسم الناتج عند ث = ١٢ سم

الحل

$$(١) \therefore ع = \frac{١}{٣} \text{ القطر} = \frac{٢}{٣} \text{ ثق} \therefore ع = \frac{٢}{٣} \times ١٢ = ٨ \text{ سم}$$

$$\text{، ثق} = \frac{٢}{٣} ع \quad (١) \text{ ---}$$

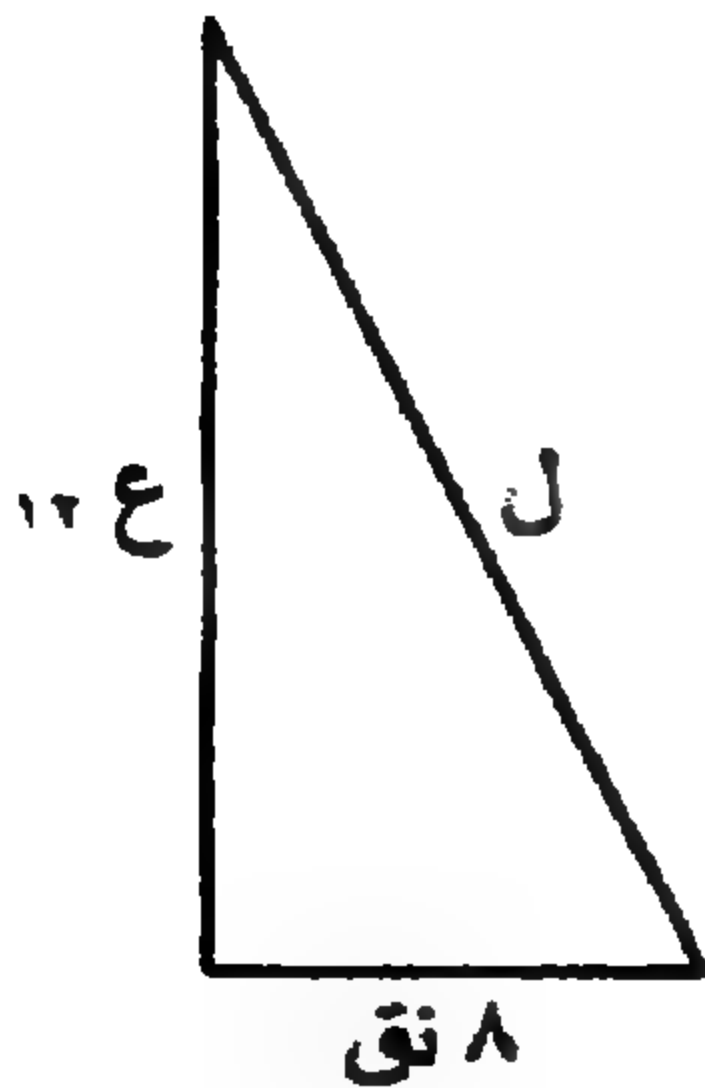
$$\therefore ح = \frac{١}{٣} ط \text{ ثق} = ع = \frac{١}{٣} ط \times \frac{٢}{٣} ع = \frac{٢}{٩} ط ع$$

$$\therefore \frac{دح}{دن} = \frac{٢}{٩} ط \times ٢ ع = \frac{٤}{٩} ط ع \times \frac{دع}{دن}$$

$$\text{ولكن } \frac{دح}{دن} = ٩٦ \text{ سم / ثق} ، ع = ٨ \text{ سم}$$

$$\therefore ٩٦ = \frac{٩}{٤} ط \times \frac{دع}{دن} \times ٦٤$$

$$\therefore \frac{دع}{دن} = \frac{٢}{٣} ط \text{ سم / ثق}$$



$$(ب) \quad \frac{\text{دنق}}{\text{دن}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\text{دع}}{\text{دن}} = \frac{1}{\text{ط}} \cdot \text{سم} / \text{ق}$$

م الجانبية = ط نق . ل \therefore ل = 'ع + 'نق

$$\text{من (1)} \quad \frac{4}{9} = \text{ل} = \text{ل} = \text{نق} + \text{نق}$$

$$\therefore \text{ل} = \frac{\sqrt{137}}{3} \text{ نق}$$

$$\therefore \text{م} = \frac{\sqrt{137}}{3} \text{ ط نق} \quad \therefore \frac{\text{د م}}{\text{دن}} = \frac{\sqrt{1372}}{3} \text{ ط نق} \cdot \frac{\text{دنق}}{\text{دن}}$$

$$، \quad \therefore \text{نق} = 12 \text{ سم} = \text{سم} / \text{ق}$$

$$\therefore \frac{\text{د م}}{\text{دن}} = \frac{\sqrt{1372}}{3} \text{ ط} \times 12 \times \frac{1}{\text{ط}} = \frac{1}{\text{ط}} \times 12 \times \sqrt{1378} \text{ سم} / \text{ق}$$

مثال: قطعة من الشمع أسطوانية الشكل تنصهر بمعدل ١٠٨ سم^٣ / ق محتفظة بشكلها الأسطواني

- فاوجد ما يأتي عندما يكون الارتفاع = ٤٥ سم :

(أ) معدل التغير في الارتفاع ونصف القطر .

(ب) معدل التغير في المساحة الجانبية مع العلم أن الارتفاع يساوى $\frac{3}{4}$ نصف القطر دائما .

الحـل

$$(أ) \quad \therefore \text{ع} = \frac{3}{4} \text{ نق} \quad \therefore \frac{\text{دع}}{\text{دن}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\text{دنق}}{\text{دن}} \quad \text{--- (1)}$$

$$\therefore \text{ح} = \text{ط نق} = \text{ع} = \frac{3}{4} \text{ ط نق}$$

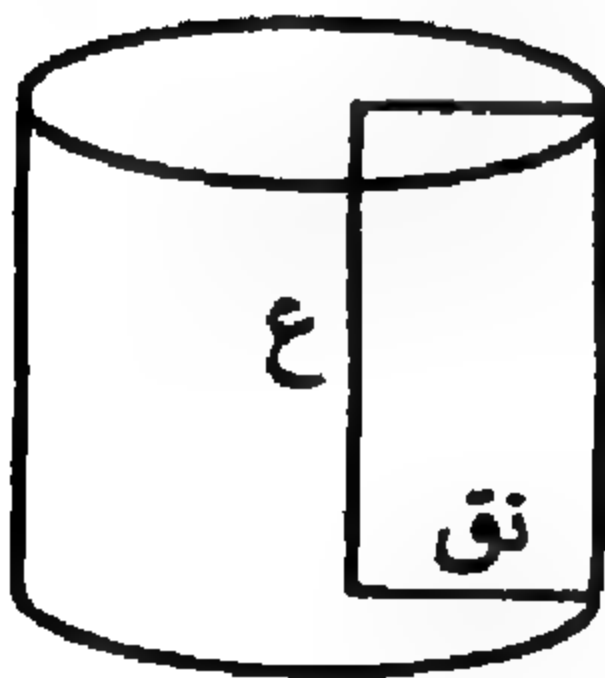
$$\therefore \frac{\text{د ح}}{\text{دن}} = \frac{9}{4} \text{ ط نق} = \text{ع} \quad \text{--- (2)}$$

$$\text{ولكن } \frac{\text{د ح}}{\text{دن}} = 108 \text{ سم}^3 / \text{ق} = \text{نق} = \frac{\text{ع} \times 4}{3} = \frac{45 \times 4}{3} = 60 \text{ سم}$$

$$\text{من (2)} \quad \frac{9}{4} \text{ ط} \times 60 \times 60 \cdot \frac{\text{دنق}}{\text{دن}} = 108$$

$$\therefore \frac{\text{دنق}}{\text{دن}} = \frac{1}{\text{ط} 75} \text{ سم} / \text{ق}$$

$$\therefore \frac{\text{دع}}{\text{دن}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{\text{ط} 75} = \frac{1}{\text{ط} 100} \text{ سم} / \text{ق}$$



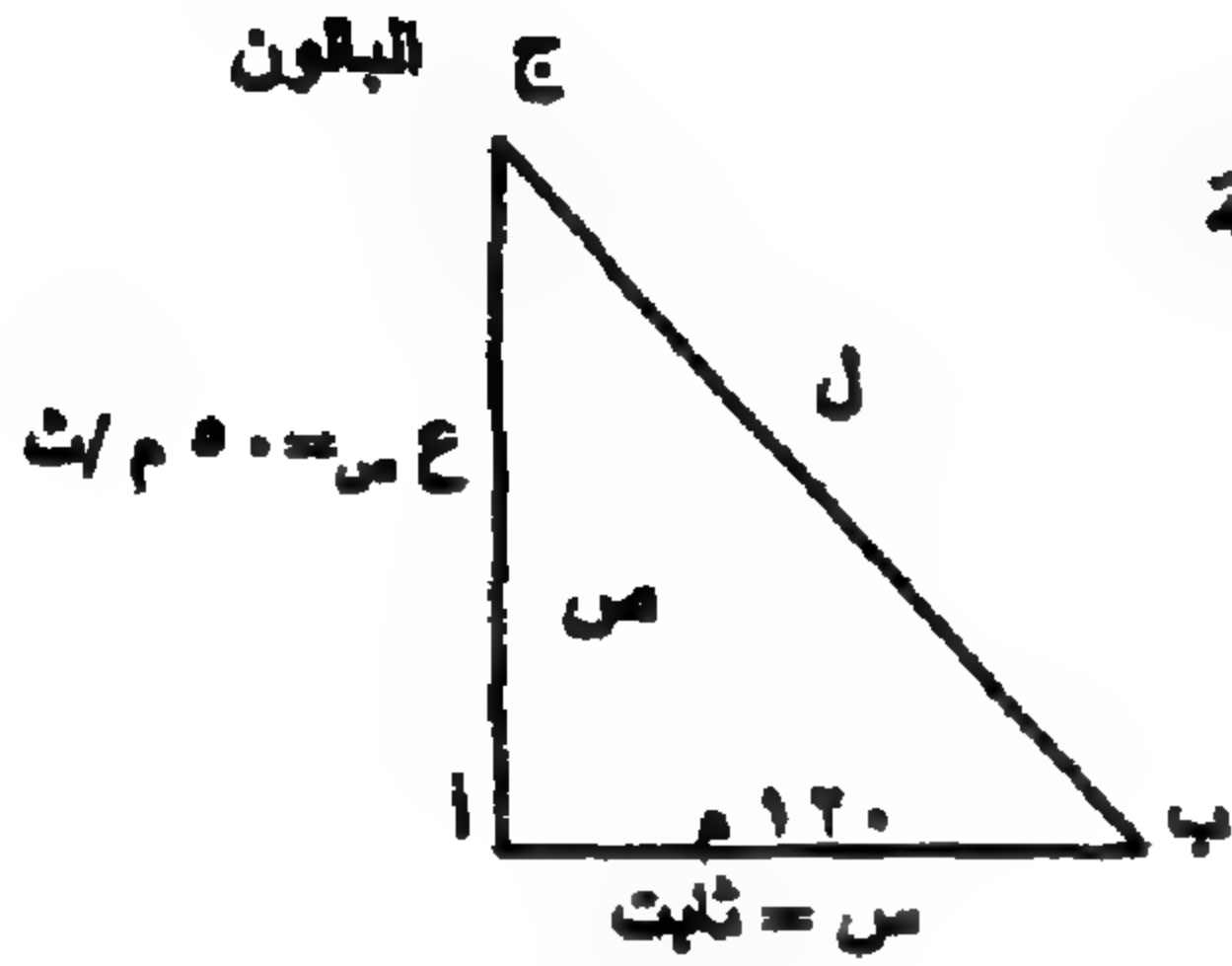
$$(ب) \quad \therefore \text{م الجانبية} = 2 \text{ ط نق} = \text{ع} = 2 \text{ ط نق} \times \frac{3}{4} = \text{نق} = \frac{3}{4} \text{ ط نق}$$

$$\therefore \frac{د}{د ن} = \frac{٣}{٤} ط \times ٢ نق. \frac{د نق}{د ن}$$

$$\therefore \frac{د}{د ن} = \frac{٣}{٤} ط \times ٦٠ \times \frac{١}{٧٥} = \frac{١٢}{٥} سم^٢ / ق$$

مثال: يقف رجل على سطح أرض أفقية على بعد ١٢٠ متر من نقطة أ تقع على سطح الأرض أيضاً فإذا تحرك بالون رأسياً إلى أعلى من النقطة أ بسرعة ١٠ متر / ث - فابعد معدل تباعد البالون عن الرجل بعد ٥ ث من بدء الحركة .

الحـل



من الرسم نجد أن ل هو بعد البالون عن الرجل عند أي لحظة

$$\therefore ل = س + (١٢٠) = ص + (١٢٠) \quad (١)$$

$$\therefore ل^٢ = ٢ ص \cdot \frac{د ص}{د ن} \quad (٢)$$

بعد ٥ ثانية $\therefore ص = ٥٠ م$

$$\text{من (١) } ل = س + (١٢٠) = (٥٠) + (١٢٠) = ١٧٠ م$$

$$\therefore ل = ١٣٠ م$$

$$\therefore \frac{د ل}{د ن} = \frac{١٠ \times ٥٠}{١٣٠} = \frac{٥٠}{١٣} م / ث$$

وهو تباعد البالون عن الرجل بعد ٥ ثانية من بدء الحركة

تمرين (٦)

- (١) تتحرك نقطة علي المنحنى $s^2 + s + v = 7$ وكان معدل تغير إحداثيها السيني بالنسبة للزمن عند النقطة $(-3, 1)$ يساوي 0.1 - أوجد : معدل تغير إحداثيها الصادي بالنسبة للزمن عند نفس النقطة .
- (٢) تتحرك نقطة (s, v) علي المنحنى $s = s^2 + 4s - 3$ عين موضع النقطة عند اللحظة التي تكون فيها سرعة إحداثيها الصادي ضعف سرعة إحداثيها السيني .
- (٣) تتحرك نقطة (s, v) علي الدائرة $s^2 + v^2 + 4s - 8 = 10$ عين موضع النقطة عند اللحظة التي يكون فيها معدل تغير إحداثيها السيني بالنسبة للزمن مساويا لمعدل تغير إحداثيها الصادي بالنسبة للزمن .
- (٤) قطعة من المعدن مستطيلة الشكل يزيد طولها عن عرضها بمقدار 20 سم تنكمش بالتبريد بحيث يظل طولها يزيد عن عرضها بمقدار 20 سم ، فإذا كان الطول ينكمش بمعدل 0.025 سم / ث عندما يكون العرض 80 سم ، أحسب معدل تغير المساحة عند هذه اللحظة .
- (٥) سقط حجر في ماء ساكن فتكونت موجة دائرية يتزايد نصف قطرها بمعدل 2 سم / ث - أوجد معدل الزيادة في مساحة سطح الموجة في نهاية 10 ثواني .
- (٦) يستند سلم طوله 6.5 متر بأحد طرفيه علي أرض أفقية و بطرفه الآخر علي حائط رأسي . فإذا إنزلق الطرف السفلي للسلم مبتعدا عن الحائط بمعدل 30 سم / دقيقة عندما يكون علي بعد 2.5 متر من الحائط - أوجد : عندئذ معدل إنخفاض الطرف العلوي للسلم . ثم أوجد: بعد الطرف العلوي للسلم عن الأرض عندما يتحرك الطرف العلوي و الطرف السفلي بنفس المعدل .
- (٧) وضع مصباح كشاف علي ارتفاع 8 أمتار فوق طريق يسير عليه رجل طوله 1.6 متر مبتعدا عن الضوء بسرعة 2 متر / دقيقة . أوجد :
- (أ) معدل إزدياد طول ظل الرجل . (ب) سرعة تحرك نهاية ظل الرجل .
- (٨) ونش رأسي طوله 6 أمتار يتحرك بسرعة 5 أمتار / ثانية في إتجاه مصباح علي ارتفاع 16 متر، أوجد: (أ) معدل تحرك نهاية ظل النوش . (ب) معدل تغير طول ظل النوش .
- (ج) معدل تغير بعد نهاية النوش العليا عن المصباح عندما يكون النوش علي بعد 10 أمتار من قاعدة المصباح .

(٩) إذا كانت ح المساحة المحصورة بين دائرتين متحتى المركز نصف قطرهما نق_١ ، نق_٢ ، حيث نق_٢ < نق_١ ، فأوجد معدل تغير ح بالنسبة للزمن عند اللحظة التى عندها نق_١ = ٤سم ويتزايد بمعدل ٠.٢ سم / ث ، نق_٢ = ٧ سم ويتناقص بمعدل ٠.١ سم / ث .

(١٠) فى لحظة ما كان طولاً ضلعى القائمة فى مثلث قائم الزاوية هما ٨سم ، ٦ سم - إذا كان الضلع الأول ينقص بمعدل ١ سم / دقيقة وكان الضلع الثانى يزداد بمعدل ٢ سم / دقيقة - فأوجد معدل التغير فى مساحة المثلث بعد دقيقتين.

(١١) أ ج ، ب ج طريقان متعامدان ، أ ج = ٩٠ متر ، ب ج = ٧٠ متر - يسير رجلان الأول من أ نحو ج بسرعة منتظمة ٦ أمتار / ث والثانى من ب نحو ج بسرعة منتظمة ٨ أمتار / ث أثبت أن البعد ف بين الرجلين بعد مضي ن ثانية من لحظة إنطلاقهما معا يعطى بالعلاقة $F = 100(22 - N + 130)$ ثم إستنتج معدل تغير ف بالنسبة إلى ن عندما ن = ٨ ثوانى .

(١٢) فى الساعة الثامنة صباحاً كانت سفينة تقع على بعد ٦٠ كم شرق ميناء معين وتقترب منه بسرعة ١٠ كم / ساعة وفى الساعة التاسعة صباحاً خرجت من الميناء سفينة أخرى متجهة نحو الجنوب بسرعة ٣٠ كم / ساعة - أوجد معدل تغير البعد بين السفينتين فى الساعة العاشرة صباحاً وهل تقترب السفينتان أم تبتعدا حينئذ ؟

(١٣) عمود إنارة طوله ١٥ متر أعلاه مصباح قنفت كرة رأسياً إلى أعلى بسرعة ٥ أمتار / ث من مسافة قدرها ١٢ متر م قاعدة العمود - وجد معدل ابتعاد ظل الكرة على الأرض من قاعدة العمود عند منتصف الثانية الأولى .

(١٤) كرة جوفاء يزداد نصف قطرها الداخلى بمعدل ١ سم / ث بحيث يبقى حجم مادة الكرة ثابتاً وذلك عند اللحظة التى يكون فيها نصلى قطريها ٣ ، ٩ سم - أوجد عند هذه اللحظة :
(أ) معدل تغير نصف قطرها الخارجى . (ب) معدل تغير مساحة سطحها الخارجى .
(ج) معدل تغير سمكها .

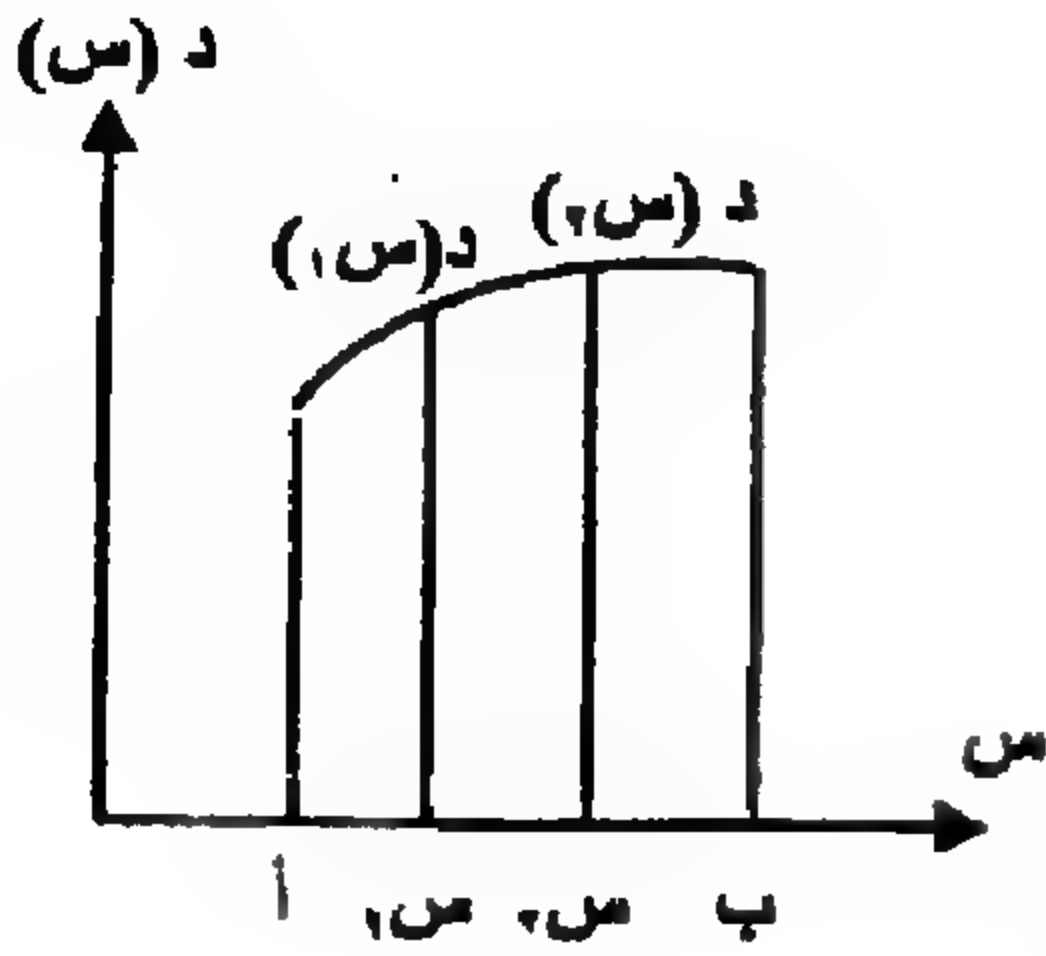
(١٥) تتمدد قطعة من المعدن على هيئة متوازي مستطيلات طول ضلع قاعدته يزيد عن عرضه ٢ سم وارتفاعها ثلاثة أمثال عرضه بالتسخين بحيث تظل أبعادها محتفظة بهذه النسبة فإذا كان الحجم يزداد بمعدل ٠.٦ سم^٣ / دقيقة عندما يزداد العرض بمعدل ٠.١ سم / دقيقة - فأوجد أبعاد قطعة المعدن .

تمارين غير محلولة

١. إذا كان طول اسطوانة مساوياً $\frac{7}{12}$ من طول نصف قطر قاعدتها فأوجد معدل تغير قطر القاعدة إذا كان معدل تغير الحجم يساوى 2π قدماً $\frac{1}{2}$ / ثانية عندما يكون القطر $= 12$ قدماً.
٢. يحتوى إناء رأسى على سائل حجمه H ، يعطى بدلالة H بعد سطح السائل عن المستوى المار بالحافة بالمعادلة $H = 50 - 2H + 3$ ، فإذا كان بقاعدة الإناء ثقب يتسرب منه السائل بعشر وحدات مكعبة / ثانية وكان معدل زيادة H يساوى 2 وحدة / ثانية - فأوجد البعد H فى هذه اللحظة .
٣. صندوق من المعدن على شكل متوازى مستطيلات النسب بين أبعاده هي $3:2:1$ فإذا تمدد الصندوق بالحرارة فاحسب معدل زيادة الحجم بالنسبة للزمن وكذلك معدل زيادة السطح بالنسبة للزمن فى هذه اللحظة التى يكون فيها معدل زيادة أصغر أبعاده 0.02 سم / ثانية وطول هذا البعد 10 سم .
٤. يتساقط رمل على الأرض مكوناً كومة على شكل مخروط دائرى قائم ارتفاعه $\frac{3}{4}$ نصف قطر قاعدته بمعدل 27 قدماً مكعباً فى الدقيقة، فأوجد معدل الزيادة فى نصف قطر القاعدة فى اللحظة التى يكون فيها مساوياً 6 أقدام .
٥. إذا كان الضغط V بالأرطال على البوصة المربعة من كتلة معطومة حجمها H بوصة مكعبة مرتبطبين بالعلاقة : $V = 80 - H$ أوجد معدل نقص الضغط بالنسبة إلى الزيادة فى الحجم عندما يكون الحجم 80 بوصة مكعبة .
٦. أ ب سلم طوله 50 قدماً يرتكز بطرفه أ على حائط رأسى وبطرفه ب على أرض أفقية فإذا تحرك الطرف ب مبتعداً عن الحائط بسرعة مقدارها 3 أقدام / دقيقة - فأوجد :
 - أ- سرعة أ عندما تبعد ب عن الحائط بمقدار 14 قدماً .
 - ب- بعد ب عن الحائط عندما تتساوى مقدار سرعة كل من أ ، ب .
 - ج- بعد ب عن الحائط عندما يتحرك الطرف أ إلى أسفل بسرعة مقدارها 4 أقدام / دقيقة .

الباب الرابع

أولاً: تزايد الدالة وتناقصها :



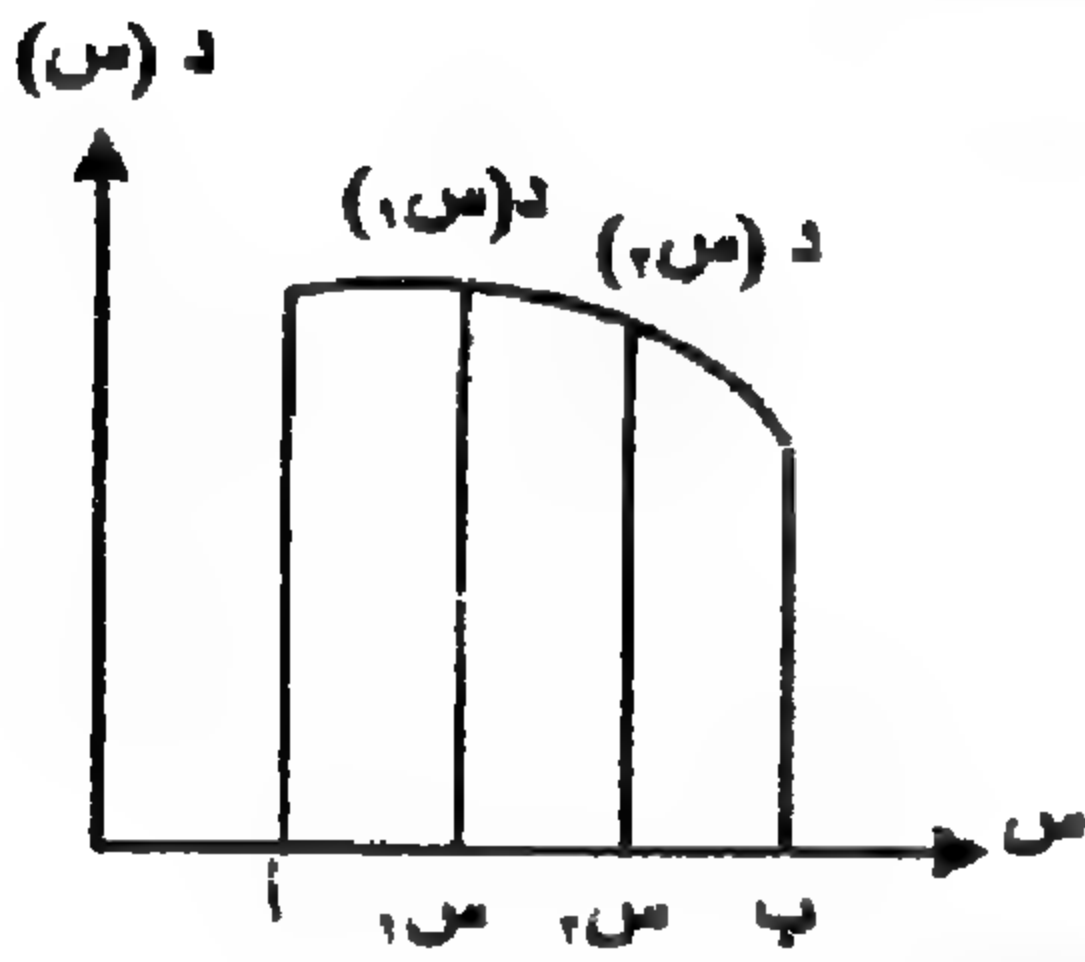
تعريف :

يقال أن الدالة d متزايدة في الفترة $[a, b]$ إذا كانت معرفة فيها وكان $d(s_2) > d(s_1)$ لكل $s_1 < s_2$ في هذه الفترة .

∴ تكون الدالة متزايدة عندما تتزايد قيمتها مع زيادة s في الفترة .

ملاحظة :

يقال أن الدالة d مطردة التزايد إذا كان $d(s_2) \geq d(s_1)$ لكل $s_1 < s_2$ في هذه الفترة .
∴ الدالة مطردة التزايد إذا كانت قيمتها تتزايد أو تثبت مع زيادة s .



تعريف :

يقال أن الدالة d متناقصة في الفترة $[a, b]$ إذا كانت معرفة فيها وكان $d(s_2) < d(s_1)$ في هذه الفترة لكل $s_1 < s_2$ في هذه الفترة .

∴ تكون الدالة متناقصة في فترة ما عندما تتناقص قيمتها

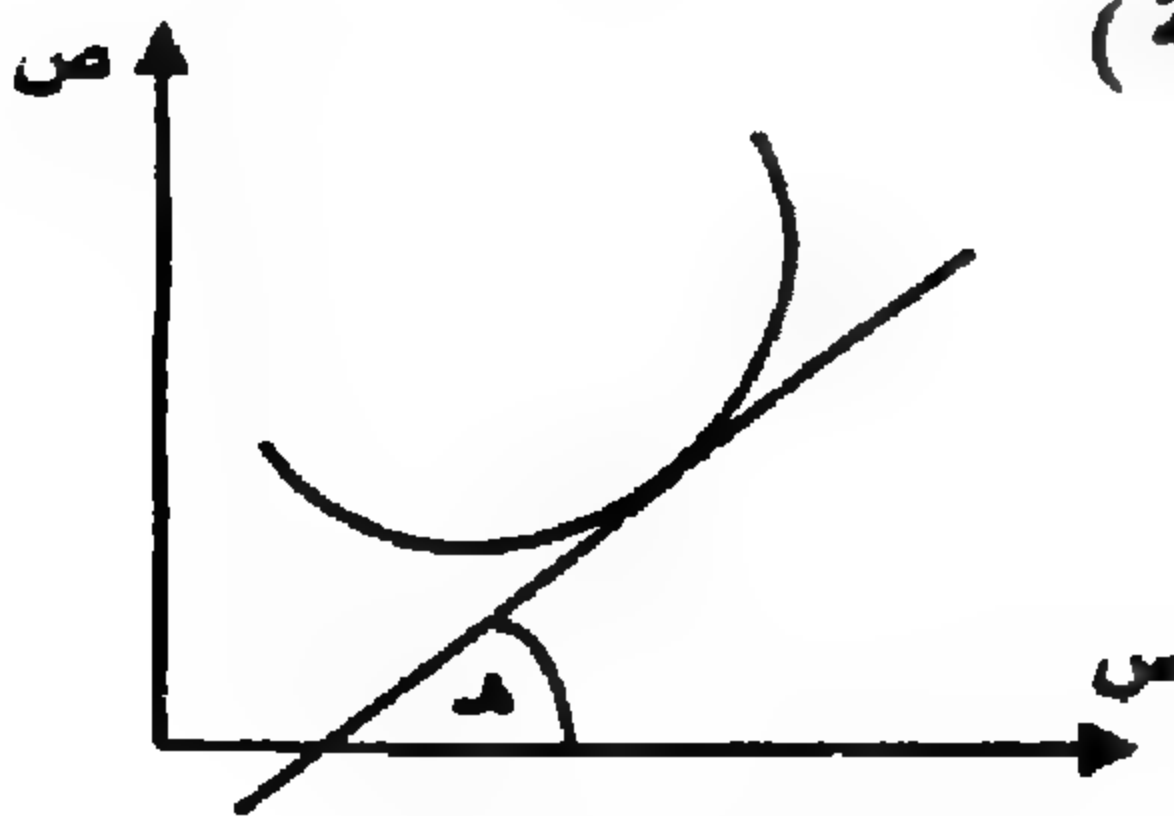
مع زيادة s في الفترة – أي عندما دالة العدد الأقل < دالة العدد الأكبر .

ملاحظة :

يقال أن الدالة d مطردة التناقص إذا كان $d(s_2) \leq d(s_1)$ لكل $s_1 < s_2$ في هذه الفترة .
∴ الدالة مطردة التناقص إذا كانت قيمتها تتناقص أو تثبت مع تزايد s .

لتحديد فترات التزايد مستخدماً المشتقة :

في الفترة التي تكون فيها الدالة متزايدة ،يصنع المماس لمنحنى الدالة (زاوية حادة) مع الاتجاه الموجب لمحور السينات وظل الزاوية الحادة (كمية موجبة)



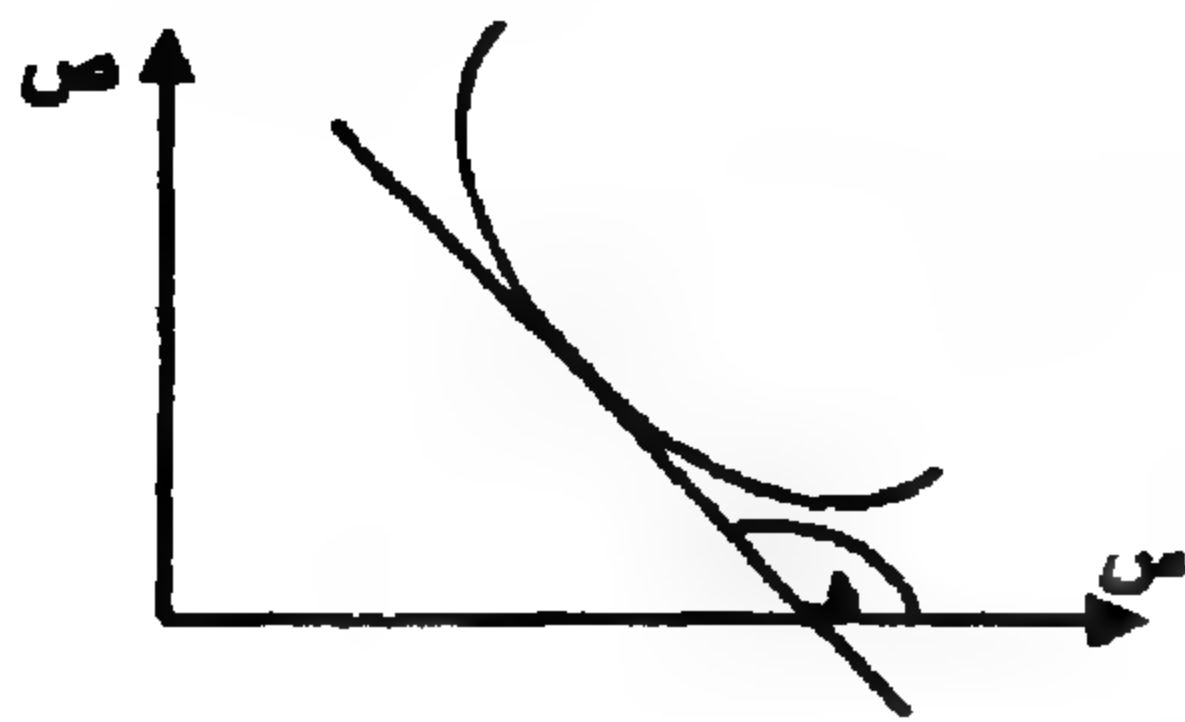
∴ $m = \tan \theta = d'(s)$

∴ عند فترات التزايد $d'(s) > 0$

∴ لتحديد فترات التزايد نحل المعادلة $d'(s) = 0$

لتحديد فترات التناقص مستخدما المشتقة :

في الفترة التي تكون فيها الدالة متناقصة ، يصنع المماس لمنحنى الدالة (زاوية منفرجة) مع الاتجاه الموجب لمحور السينات وظل الزاوية المنفرجة (كمية سالبة)



$$\therefore \text{م} = \text{ظا هـ} = \text{د}^{\circ} (\text{س})$$

\therefore عند فترات التناقص $\text{د}^{\circ} (\text{س}) > \text{صفر}$

\therefore لتحديد فترات التناقص نحل المتباينة $\text{د}^{\circ} (\text{س}) > 0$

لتحديد فترات التزايد والتناقص في د :

- ١- نحدد مجال الدالة
 - ٢- نوجد $\text{د}^{\circ} (\text{س})$
 - ٣- نوجد قيم س والتي يكون عندها $\text{د}^{\circ} (\text{س}) = 0$ ، غير معرف وتسمى النقاط الحرجة .
 - ٤- نرسم خط الأعداد ونبين عليه مجال الدالة والنقاط الحرجة .
 - ٥- نعين إشارة $\text{د}^{\circ} (\text{س})$ في كل فترة جزئية من مجال الدالة .
- فالفترة التي فيها $\text{د}^{\circ} (\text{س})$ موجبة هي فترة تزايد والفترة التي فيها $\text{د}^{\circ} (\text{س})$ سالبة هي فترة تناقص .

مثال: حدد فترات التزايد والتناقص للدالة : $\text{ص} = 3\text{س}^2 - \text{س}^3$

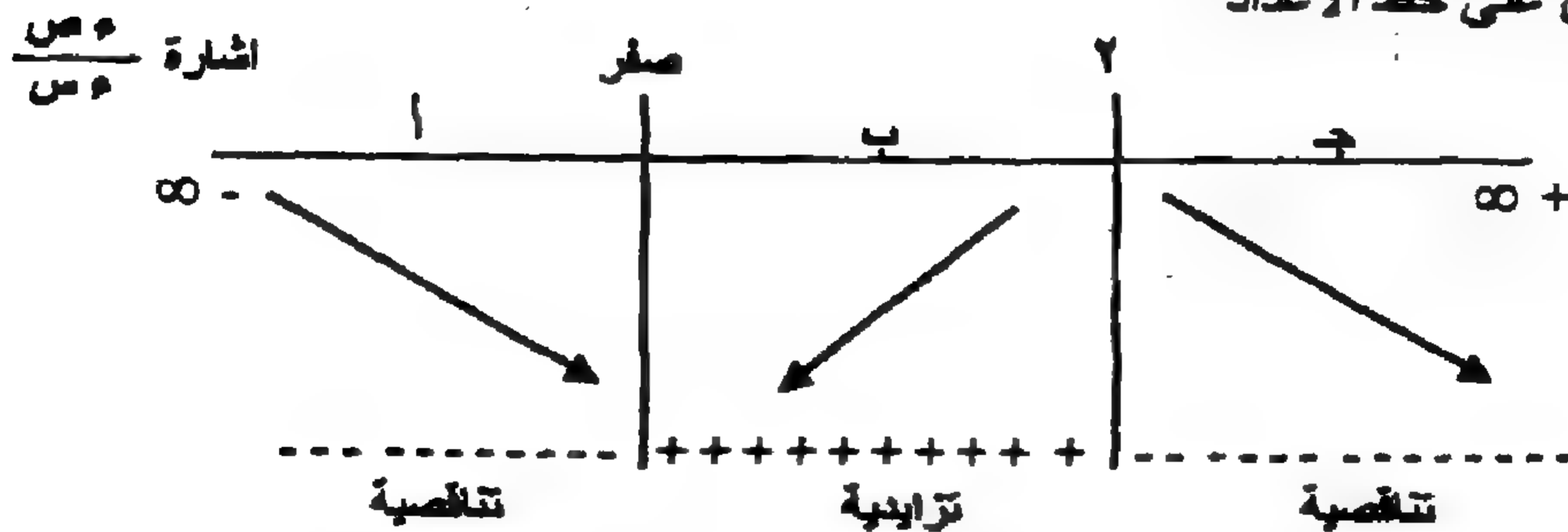
الحل

$$(1) \text{ نوجد } \text{ص}^{\circ} \therefore \text{ص}^{\circ} = 6\text{س} - 3\text{س}^2$$

$$(2) \text{ نضع } \text{ص}^{\circ} = 0 \therefore 6\text{س} - 3\text{س}^2 = 0 \therefore 3\text{س}(2 - \text{س}) = 0$$

$$\therefore \text{س} = 0 \text{ ، } \text{س} = 2$$

(3) نحدد قيم س على خط الأعداد



الفترة أ [٠ ، ∞ -]

نأخذ س = ١- ثم نبحث عن إشارة ص = ٦س - ٣س^٢

∴ ص = ٦- = ٣-٦- = ٩- (سالب) تناقصية

الفترة ب [٢+ ، ٠] نأخذ س = ١ ∴ ص = ٦- = ٣-٦- = ٣+ = ٢+ ترايدية

الفترة ج [∞ ، ٢] نأخذ س = ٣ ∴ ص = ٦س - ٣س^٢ = ١٨ - ٢٧ = ٩- تناقصية

مثال : أوجد فترات التزايد والتناقص للدالة : د(س) = س | س - ٢ |

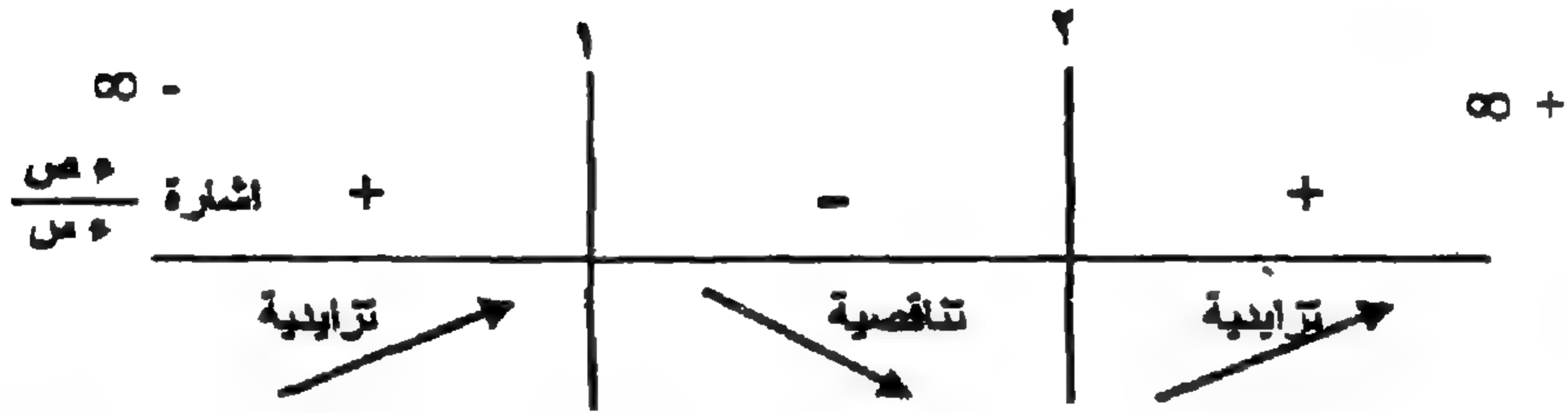
الحل

$$د(س) = \begin{cases} س^٢ - ٢س & \text{عندما } س \leq ٢ \\ -س^٢ + ٢س & \text{عندما } س > ٢ \end{cases}$$

$$\text{المجال هو ح} \quad \therefore د(س) = \begin{cases} س^٢ - ٢س & \text{عندما } س \leq ٢ \\ -س^٢ + ٢س & \text{عندما } س > ٢ \end{cases}$$

وعندما د(س) = ٠ ∴ س = ١

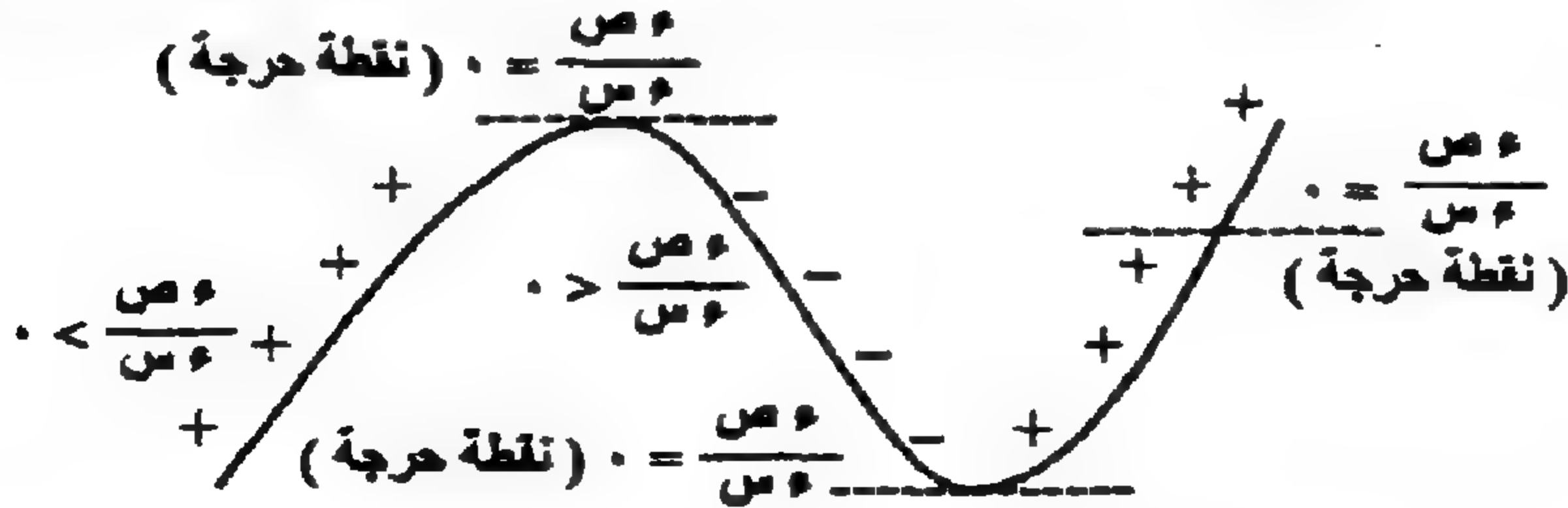
∴ يوجد ثلاث فترات



النقطة الحرجة للدالة :

هي التي يكون عندها $\frac{د(س)}{س} = ٠$ وقد تكون قيمة عظمى وقد تكون قيمة صغرى وقد تكون غير

ذلك .



والقيم الحرجة هي جميع الأعداد التي يكون عندها د(س) = ٠ أي حلول هذه المعادلة .

ويقال أن s ، نقطة حرجة للدالة d إذا تحقق أي أحد الشرطين الآتيين :

(١) $d'(s)$ بها وجود وتساوى صفر .

(٢) $d'(s)$ ليس لها وجود .

مثال : أوجد النقط الحرجة والقيم الحرجة للدالة : $v = s^3 - 6s^2 + 9s + 1$

الحل

نوجد v' : $v' = 3s^2 - 12s + 9$

بوضع $v' = 0$ لإيجاد النقط الحرجة : $0 = 3s^2 - 12s + 9$

: $s^2 - 4s + 3 = 0$: $s = 1$ ، $s = 3$

: $s = 1$ ، $s = 3$: $v(1) = 1$ ، $v(3) = 5$ نقط حرجة

لإيجاد القيم الحرجة نعوض في الدالة الأصلية بقيم s

: $v = s^3 - 6s^2 + 9s + 1$

عندما $s = 1$: $v = 1 - 6 + 9 + 1 = 5$

، عندما $s = 3$: $v = 27 - 54 + 27 + 1 = 1$

تمرين (٧)

❖ عن فترات التزايد والتناقص للدوال التالية :

(١) $v = 1 - 4s - s^3$

(٢) $v = (s-2)^3$

(٣) $d(s) = (s+4)^2$

(٤) $d(s) = s^3 (s-3)$

(٥) $v = \frac{s}{s-2}$ ، $s \neq 2$

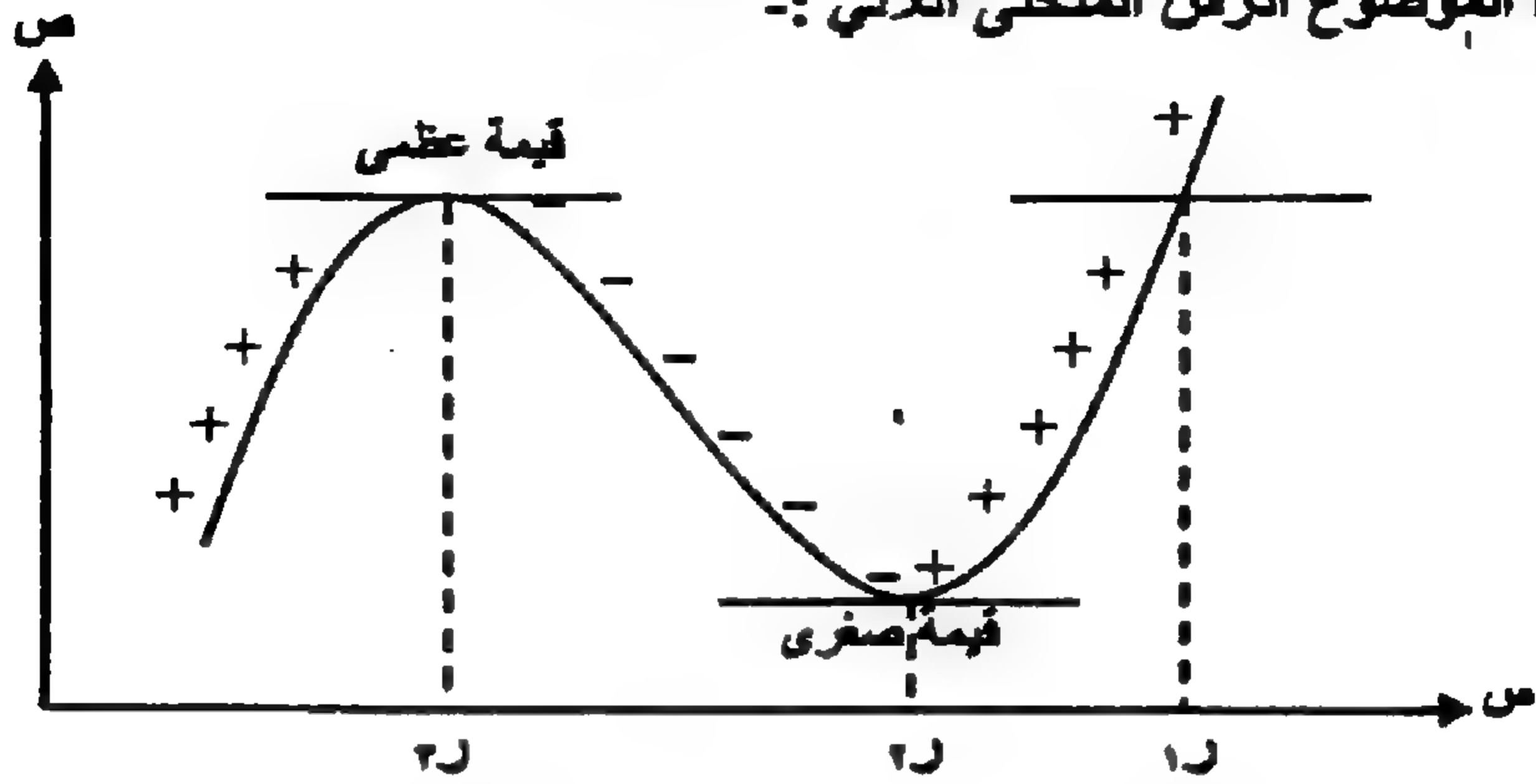
(٦) $v = \frac{1}{s} - \sqrt{s}$

(٧) $v = |s|$

(٨) $d(s) = \left. \begin{array}{l} s^2 + 2 \\ s^2 + 1 \end{array} \right\}$ عندما $s \geq 1$
عندما $s < 1$

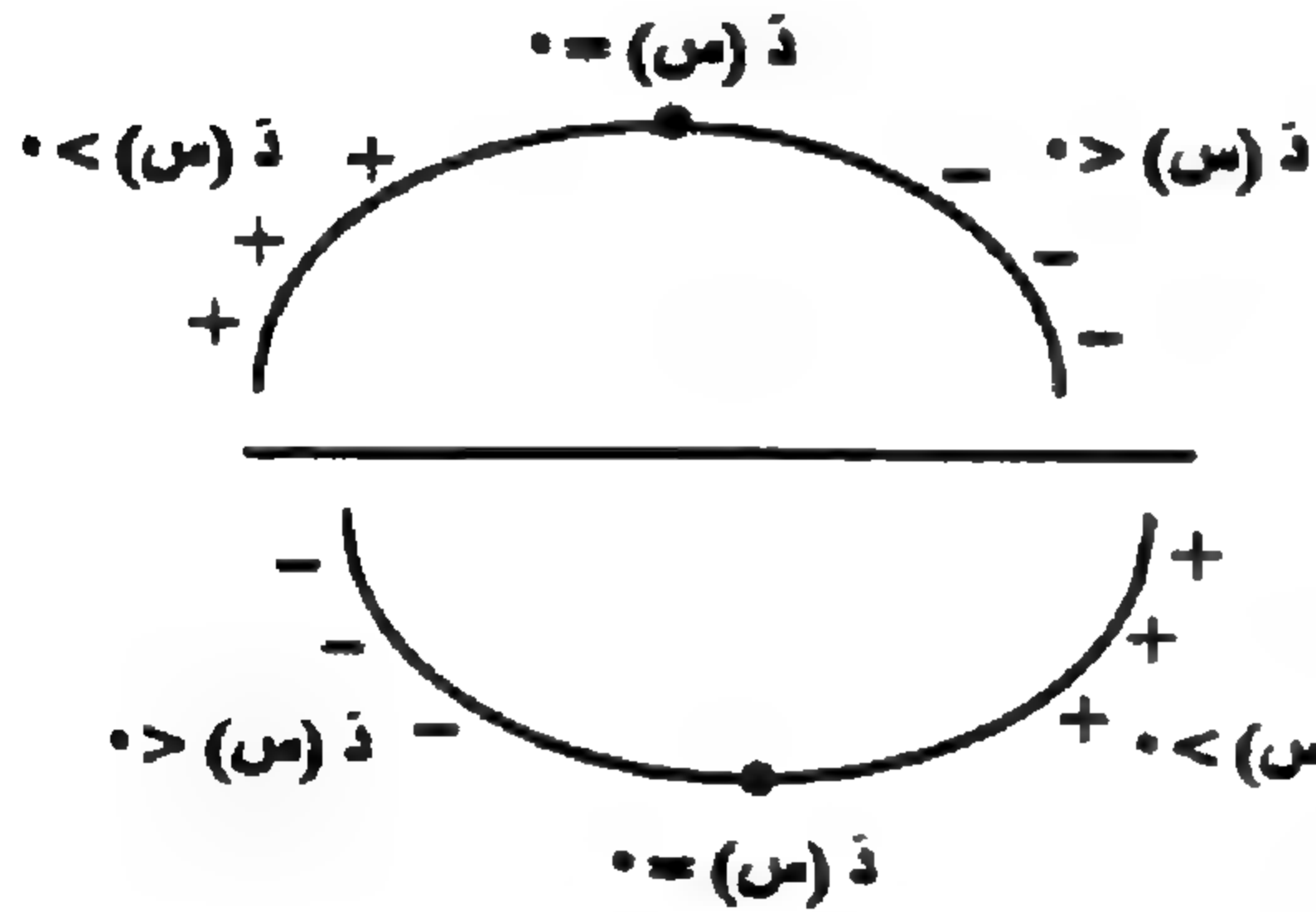
النهايات العظمى والنهايات الصغرى

لدراسة هذا الموضوع أدرس المنحنى الآتي :-



النقطة الحرجة هي التي يكون عندها $f'(x) = 0$ أو $f'(x)$ غير معرفة وقد تكون نهاية عظمى و نهاية صغرى أو غير ذلك حيث $f'(x) = 0$ وهي نهاية عظمى ، $f'(x) = 0$ وهي نهاية صغرى ، $f'(x) = 0$ وهي ليست عظمى ولا صغرى .

لاحظ أن:



- ❖ النهاية العظمى هي أكبر قيمة للدالة إذا قورنت بقيمتها عند النقط الواقعة في الجوار المباشر من كلا الجانبين . (ما قبلها وبعدها تتناقص) .
- ❖ النهاية الصغرى هي أصغر قيمة للدالة إذا قورنت بقيمتها عند النقط الواقعة في الجوار المباشر في كلا الجانبين (ما قبلها متناقص وبعدها متزايد) .

كيفية إيجاد النهايات العظمى والصغرى للدالة :

١. نوجد $f'(x)$ للدالة .
٢. نضع $f'(x) = 0$ فنحصل على قيم x .
٣. نعوض بقيم x في معادلة المنحنى الأصلي فنحصل على قيم y المناظرة فتكون x_1 ، x_2 ، هي قيم النهايات ويكون (x_1 ، x_2) ، (x_3 ، x_4) ، هي موضع النهايات وتسمى النقط الحرجة .

معرفة نوع النهاية :

أولاً : الاختبار الأول :-

■ نأخذ قيمة أقل من s ، بمقدار صغير

ونعوض في حق وتبحث إشارته .

■ نأخذ قيمة أكبر من s ، بمقدار صغير

ونعوض في صَ وَنَبِحثُ إِشارته .

- فعند أ إذا كتبت إشارة ص موجبة ، عند ب إذا كتبت إشارة ص = صفر وعند ج إذا كتبت إشارة

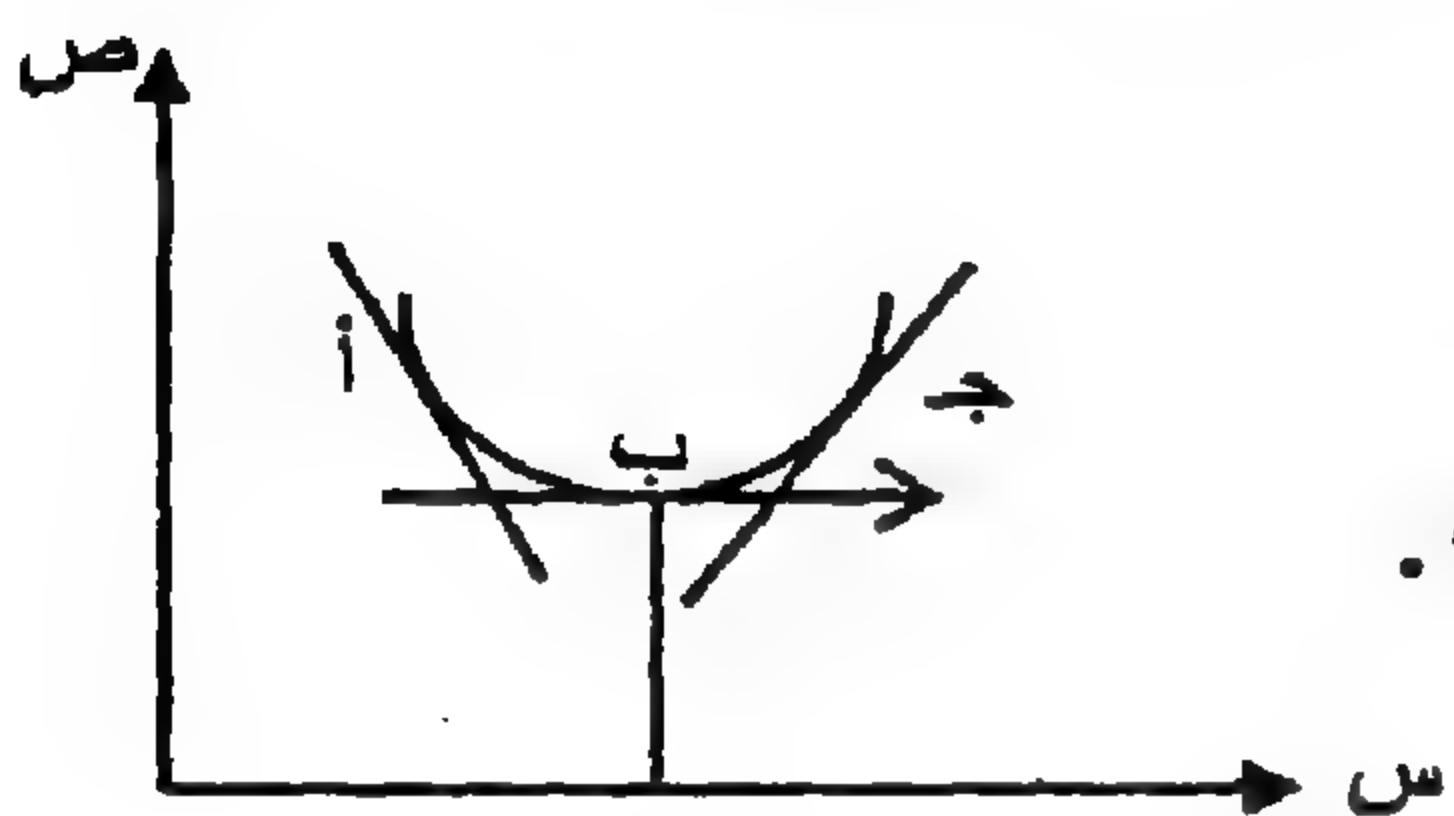
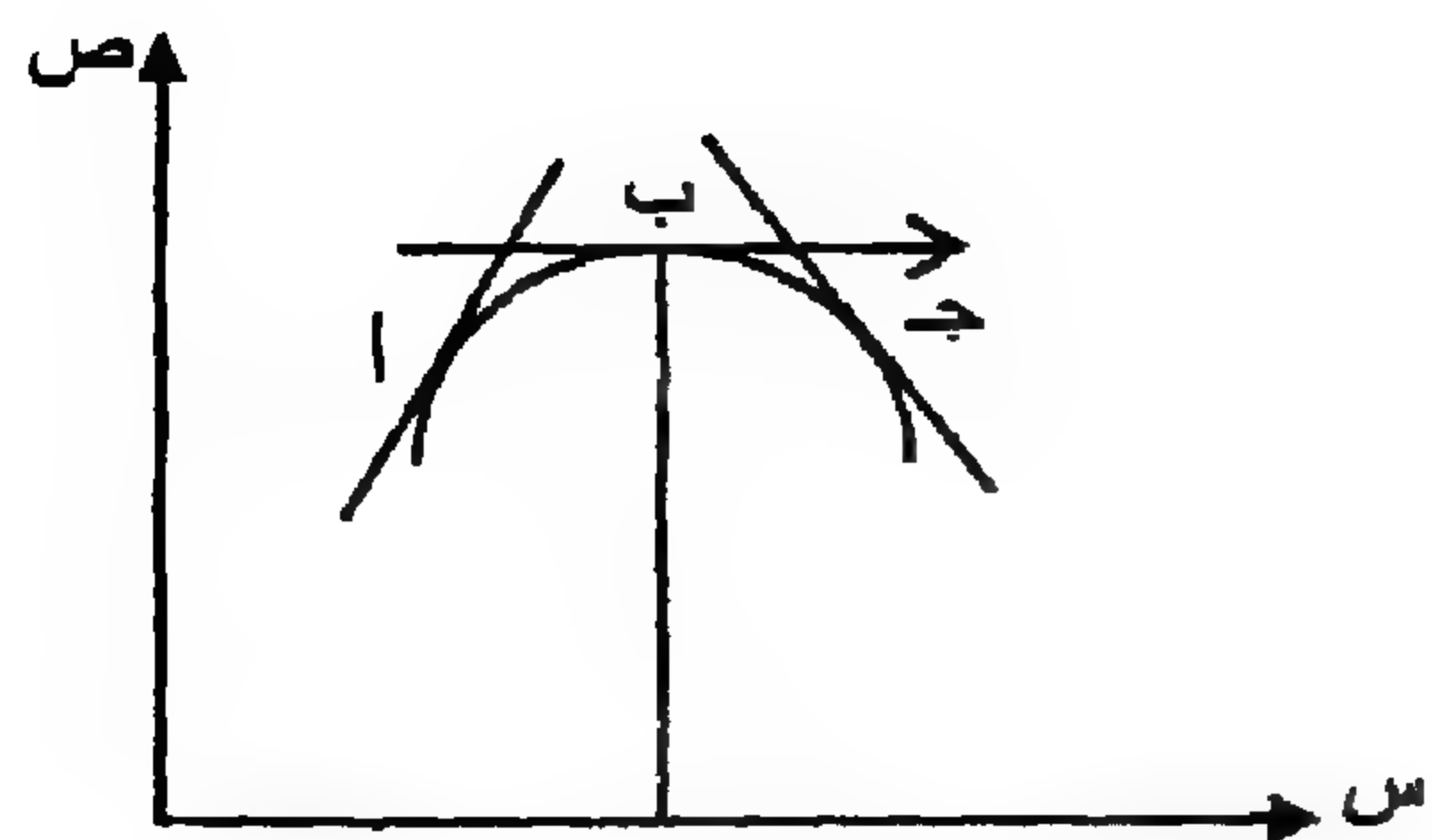
من سألني

∴ النهاية عظمى محلية.

- أما إذا كان عند إشارة ص سلبية ،

عند ب إشارة ص = صفر وعند ج إشارة ص موجبة .

∴ النهاية صغرى محلية.



مثال: أوجد النهايات العظمى والمحلية والصغرى المحلية للدالة $f(x) = x^3 - 3x^2 + 9x + 1$

الحل

$$\therefore \text{ص} = \text{س}^2 - 6\text{س}^1 + 9\text{س}^0 + 1$$

$$\therefore \text{ص} = 3\text{س} - 12\text{س} + 9$$

$$\therefore \text{س}^2 - 4 \text{س} + 3 = 0$$

۱ = س ، ۲ = س .

$$\therefore 3\text{س}^2 - 12\text{اس} + 9 = 0 \quad (3 \div)$$

$$\therefore (s-3)(s-1) = 0$$

إشارة $\frac{f'(x)}{f(x)}$

Interval	Sign of $\frac{f'(x)}{f(x)}$	Conclusion
$x < 0$	+	$f(x) = 0$
$0 < x < 2$	-	$f(x) = 2$
$x > 2$	+	$f(x) = 2$

∴ عند س = ١ عظمى محلية والقيمة العظمى نعوض في الدالة الأصلية عن س = ١

∴ القيمة العظمى (١ ، ٥) ، عند $s = ٣$ النهاية صغرى محلية والقيمة

الصغرى نعوض في الدالة الأصلية $\therefore \text{ص} = 1$. القيمة الصغرى $(1, 3)$

استخدام المشتقة الثانية لإيجاد القيمة العظمى المطلقة والقيمة الصغرى المطلقة :

(١) نوجد ص' ثم نضع ص' = ٠ لإيجاد النقط التي تقع على المنحنى .

(٢) نوجد ص''

(٣) نعوض في ص' من الناتج من الخطوة (١)

فإذا كانت إشارة ص' سالبة \therefore الدالة نهاية عظمى

وإذا كانت إشارة ص' موجبة \therefore الدالة نهاية صغرى

مثال : أوجد النهايات العظمى والصغرى للدالة : $ص = ص^3 - ٦ص^2 + ٩ص + ١$

الحل

$$\therefore ص = ص^3 - ٦ص^2 + ٩ص + ١$$

$$\therefore ص' = ٣ص^2 - ١٢ص + ٩$$

$$\therefore ص' = ٣ + ٤ص - ٣ = ٠$$

$$\therefore ص = ١ ، ص = ٣$$

$$\text{نوجد ص''} : \therefore ص'' = ٦ص - ١٢$$

$$\therefore ص' = ٣ص^2 - ١٢ص + ٩ = ٠$$

$$\therefore (٣ - ص)(١ - ص) = ٠$$

نعوض في الدالة الأصلية

$$\therefore ص = ص^3 - ٦ص^2 + ٩ص + ١$$

$$٥ = ١ + ٩ + ٢٧ - ٢٧ =$$

$$\therefore \text{إحداثى الصغرى } (١ ، ٥)$$

$$\therefore ص = ص^3 - ٦ص^2 + ٩ص + ١$$

$$٥ = ١ + ٩ + ٦ - ١ =$$

$$\therefore \text{إحداثى العظمى } (٣ ، ٥)$$

ملاحظة :

النهايات العظمى والصغرى هي نقط الرجوع

مثال: أوجد نقط الرجوع للدالة : $ص = حاس + حتاس$ ، $س \in [٠, ٢ ط]$

الحل

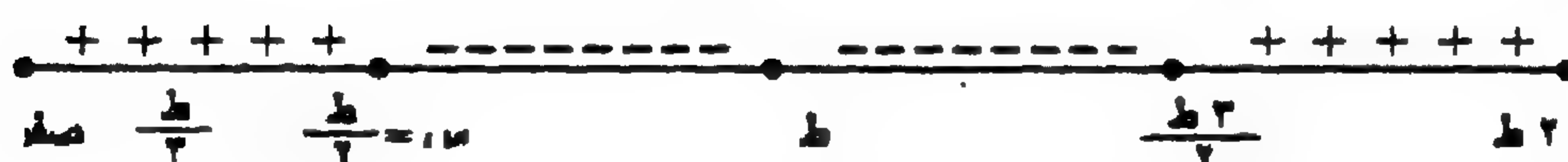
$$\begin{aligned} \therefore ص = حاس + حتاس & \quad \therefore ص = حتاس - حاس \\ \text{يوضع } ص = 0 & \quad \therefore حتاس - حاس = 0 \\ \therefore حتاس = حاس & \quad \therefore طاس = 1 \\ \therefore س = ٤٥ = \frac{ط}{٤} & \quad , س = ٢٢٥ = \frac{٥ ط}{٤} \\ ص = - حاس - حتاس & \end{aligned}$$

$س = \frac{٥ ط}{٤}$	$س = \frac{ط}{٤}$
$ص = - حاس - حتاس$ $= - [حاس + حتاس] = - \frac{٢}{٢\sqrt{}}$ \therefore نهاية صغرى $(\frac{٥ ط}{٤}, -\frac{٢}{٢\sqrt{}})$	$ص = - حاس - حتاس$ $= - [حاس + حتاس] = - \frac{٢}{٢\sqrt{}}$ \therefore نهاية عظمى $(\frac{ط}{٤}, -\frac{٢}{٢\sqrt{}})$

مثال: أوجد نقط الرجوع للدالة $ص = حاس$ في الفترة $[٠, ٢ ط]$

الحل

$$\begin{aligned} ص = حاس \\ \therefore ص = حتاس \\ \text{يوضع } ص = 0 & \quad \therefore حتاس = 0 \\ \therefore حتاس = 0 & \quad \therefore س = ٩٠ \\ , س = ٢٧٠ & \quad \text{ولتحديد ما إذا كانت عظمى أو صغرى.} \end{aligned}$$



$$\therefore \text{النهية العظمى عندما } س = \frac{١}{٢} \Leftarrow د \left(\frac{ط}{٢} \right) = 1$$

$$\therefore \text{إحداثى النهاية } (١, \frac{ط}{٢})$$

$$, \text{النهية الصغرى عندما } س = \frac{٣ ط}{٢} \Leftarrow د \left(\frac{٣ ط}{٢} \right) = -1$$

$$\therefore \text{إحداثى النهاية } (١-, \frac{٣ ط}{٢})$$

حل آخر باستخدام المشتقة الثانية

مثال: إذا كانت الدالة د معرفة بالمعادلة :

د(س) = ٢ حاس + حتا ٢ حاس حيث س ∈ [٠، ٢٠] فأوجد القيمة العظمى و الصغرى للدالة د

الحل

$$\therefore \text{ص} = ٢ \text{ حاس} + \text{حتا } ٢ \text{ حاس} \quad \therefore \text{ص} = ٢ \text{ حتا س} - ٢ \text{ حاس}$$

$$، \quad \therefore \text{حاس} = ٢ \text{ حتا س} \quad (\text{قانون})$$

$$\therefore \text{ص} = ٢ \text{ حتا س} - ٢ \text{ حاس} = ٢ \text{ حتا س} - ٢ (٢ \text{ حتا س})$$

$$\therefore ٢ \text{ حتا س} - ٤ \text{ حتا س} = ٠$$

$$\therefore \text{س} = ٩٠ \text{ أو } ٢٧٠$$

إما حتا س = صفر

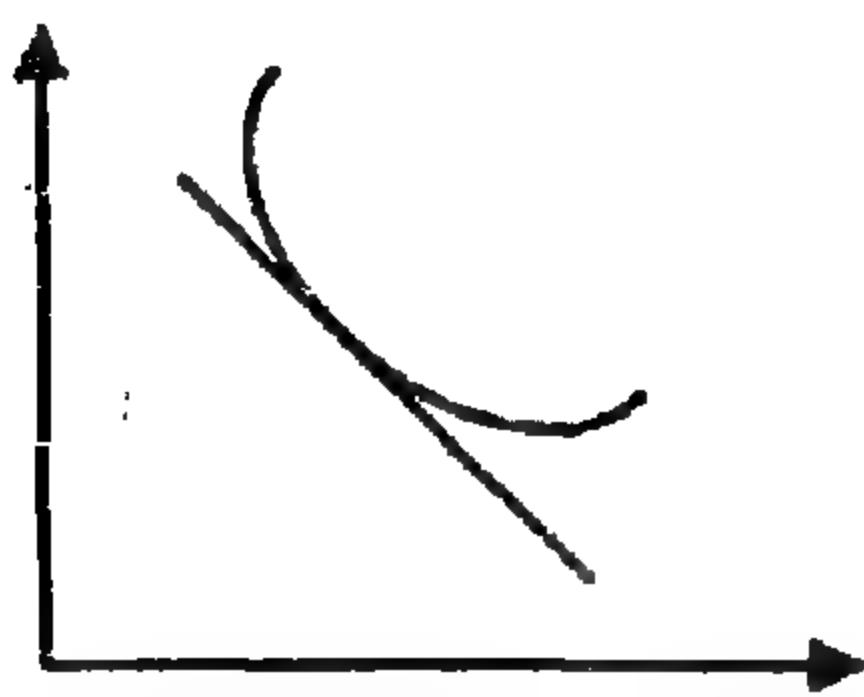
$$\text{أو } ١ - ٢ \text{ حاس} = ٠ \quad \therefore \text{حاس} = \frac{١}{٢} \quad \therefore \text{س} = ٣٠ \text{ أو } ١٥٠$$

$$\therefore \text{ص} = ٢ \text{ حتا س} - ٤ \text{ حتا س}$$

س = ٢٧٠	س = ٩٠	س = ١٥٠	س = ٣٠
$\therefore \text{ص} = ٢ \text{ حتا } ٢٧٠$	$\therefore \text{ص} = ٢ \text{ حتا } ٩٠$	$\therefore \text{ص} = ٢ \text{ حتا } ١٥٠$	$\therefore \text{ص} =$
$- ٢٧٠ \times ٢$	$- ٩٠ \times ٢$	$- ١٥٠ \times ٢$	$- ٣٠ \times ٢$
$= ٦ \text{ صغرى}$	$= ٢ \text{ صغرى}$	$= ٢ \text{ صغرى}$	$= ٣ \text{ صغرى}$

التحديب إلى أعلى والتحدب إلى أسفل ونقطة الانقلاب :-

إذا كان منحنى الدالة متصلًا في فترة [أ، ب] فإن :-



المنحنى محدب إلى أسفل
إذا كان أعلى مماساته



المنحنى محدب لأعلى
إذا كان أسفل مماساته

استخدام المشتقة الثانية في اكتشاف نوع التحدب

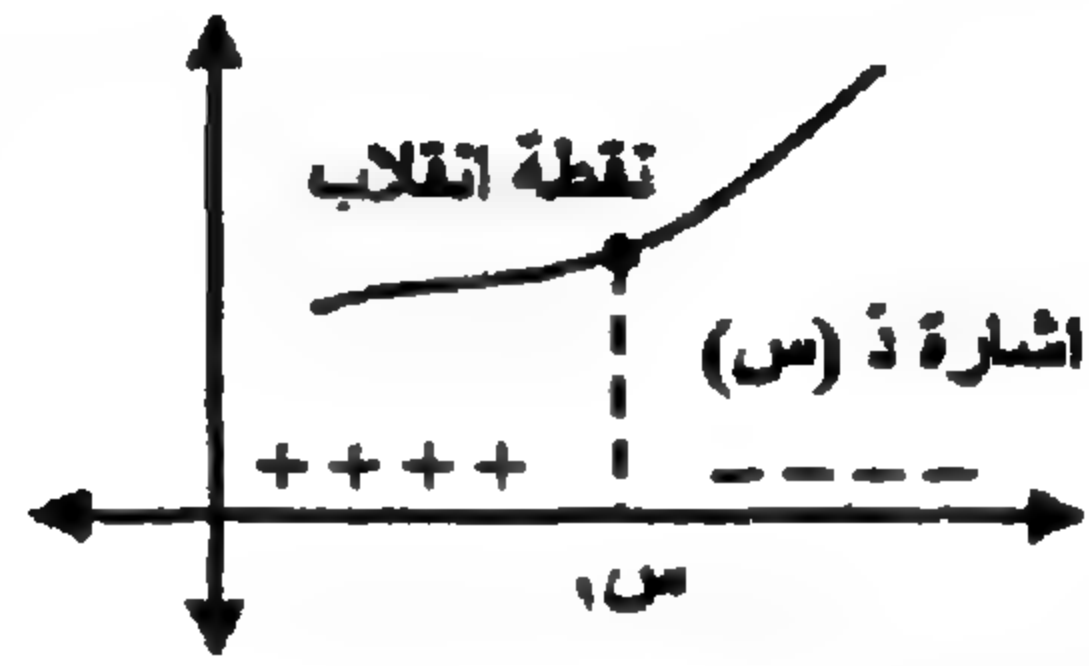
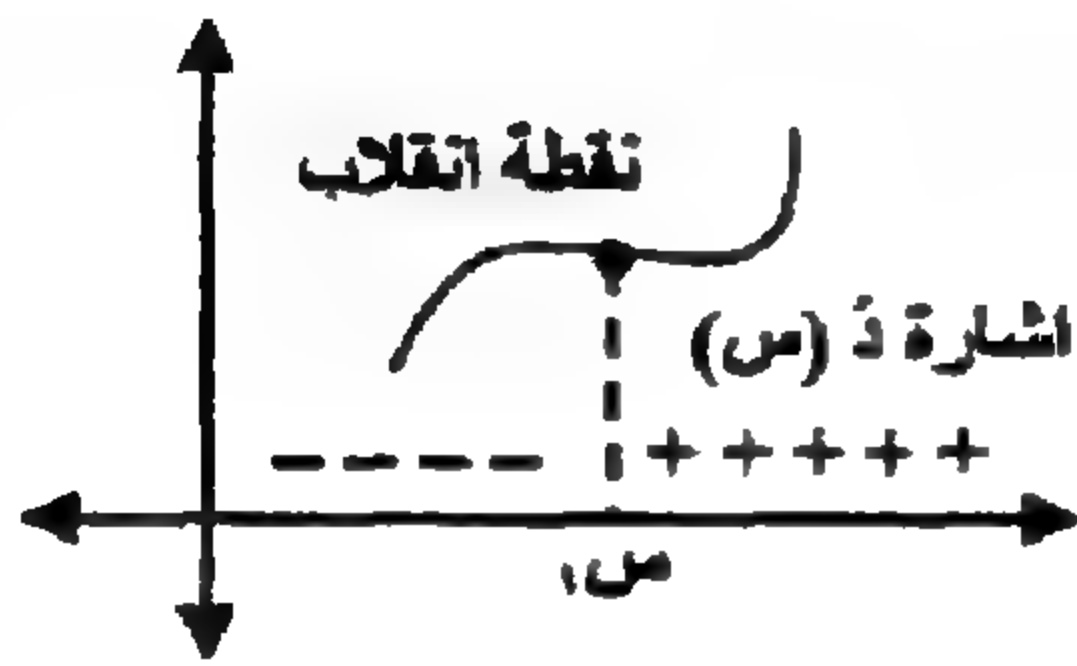
إذا كانت الدالة قابلة للاشتقاق مرتين في فترة فإن:

١. المنحنى يكون محدباً لأعلى في الفترة إذا كانت $D''(x) > 0$
٢. المنحنى يكون محدباً لأسفل في الفترة إذا كانت $D''(x) < 0$

نقطة الانقلاب :-

هي النقطة التي تفصل بين فترة تحدب إلى أعلى وفترة تحدب إلى أسفل وعندها يمكن رسم مماس يوازي محور السينات .

- ويكون للدالة نقطة انقلاب عند x_1 إذا كان : $D''(x_1) = 0$ وإشارة $D''(x)$ (س) يمين النقطة خلافاً يسار النقطة .



طريقة الكشف عن نقط الانقلاب :-

(١) نوجد $D''(x)$ (٢) نوجد $D''(x)$

(٣) نضع $D''(x) = 0$ لإيجاد النقطة الحرجة عند x_1

(٤) نختبر كل من النقط باستعمال الاختبار التالي وهو يعتمد على إشارة $D''(x)$ قبل وبعد النقطة .

بعداً	قبلها	إشارة $D''(x)$	النتيجة
$D''(x) = -$	$D''(x) = +$	موجبة قبل x_1 سالبة بعد x_1	توجد نقط الانقلاب
$D''(x) = +$	$D''(x) = -$	سالبة قبل x_1 موجبة بعد x_1	توجد نقط الانقلاب
$D''(x) = +$	$D''(x) = +$	$D''(x)$ لم تغير إشارتها	لا توجد نقط انقلاب

مثال : ابحث وجود نقطة انقلاب للمنحنى :

ص = س^٣ - س^٢ - ٢٤ س + ٧٢ موضحاً اتجاه المنحنى

الحل

$$\therefore \text{ص} = \text{س}^3 - \text{س}^2 - 24\text{س} + 72 \quad \therefore \text{ص} = \text{س}^3 - \text{س}^2 - 24\text{س} + 72$$

$$\text{ص} = 6 - \text{س} \quad \text{بوضع ص} = 0 \quad \therefore 6 - \text{س} = 0$$

$$\therefore 6 = (\text{س} - 1) \quad \therefore \text{س} = 1 \quad \therefore \text{س} = 1$$



نعوض في ص عندما س = 0

$$\therefore \text{ص} = 6$$

عندما س = 2

$$\therefore \text{ص} = 6 +$$

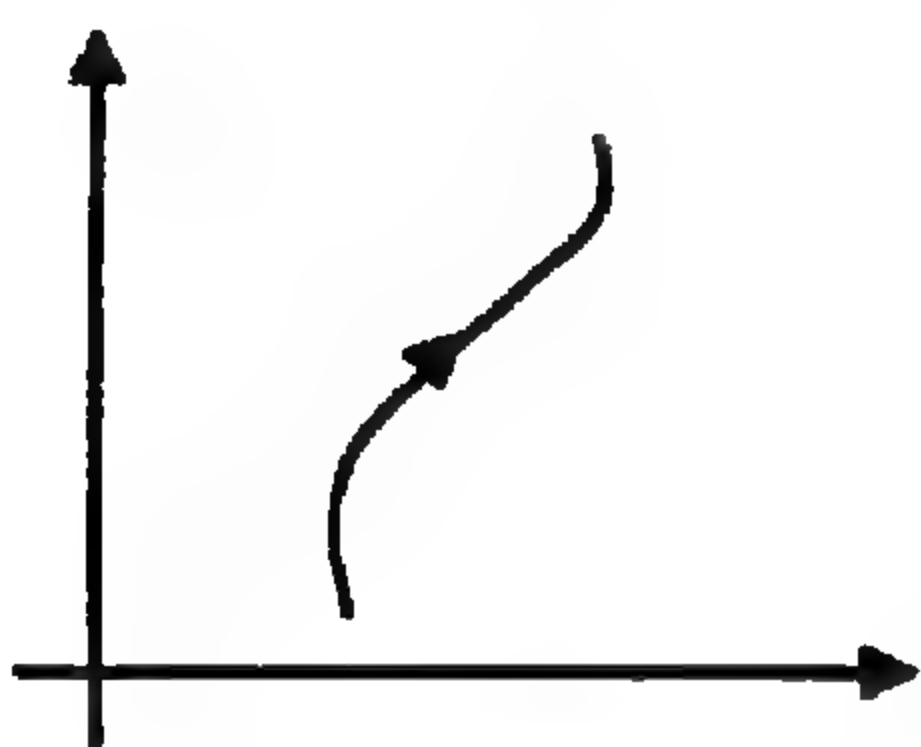
\therefore تغيرت الإشارة حول س = 1

\therefore توجد نقطة انقلاب

، \therefore ص إشارته + حيث ص = 6 +

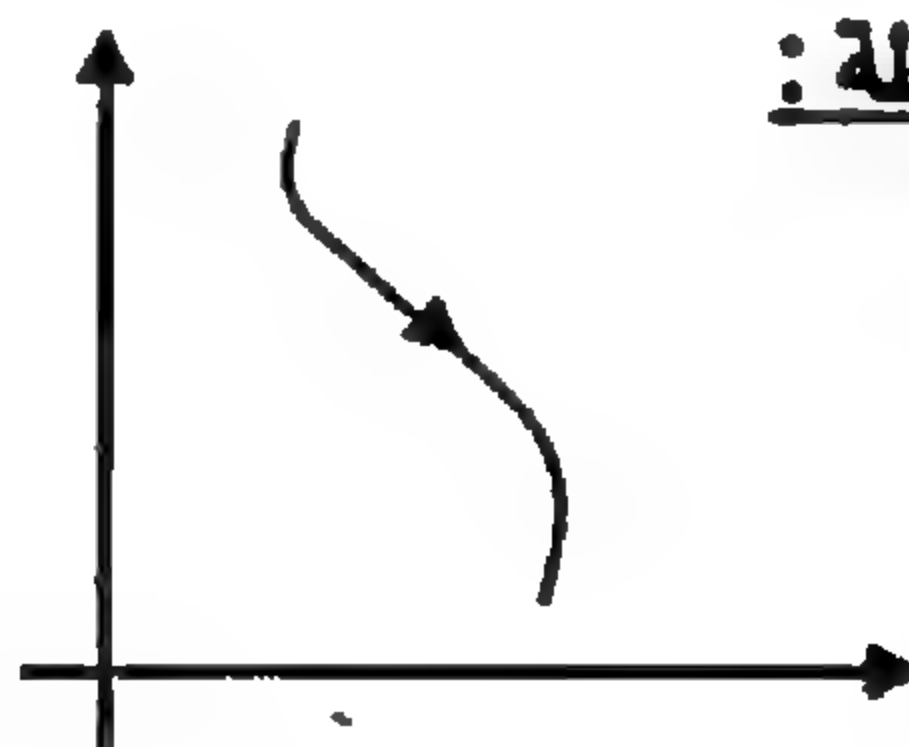
\therefore المنحنى ينقلب من أسفل إلى أعلى

ملاحظة:



ص ≡ إشارتها +

المنحنى ينقلب من أسفل لأعلى



ص ≡ إشارتها -

المنحنى ينقلب من أعلى لأسفل

مثال: أوجد نقط الانقلاب للمنحنى ص = س^٤

الحل

$$\therefore \text{ص} = \text{س}^4 \quad \therefore \text{ص} = \text{س}^4 = \text{س}^2 \quad \therefore \text{ص} = 12\text{س}^2$$

$$\therefore \text{ص} = 0 \Leftrightarrow 12\text{س}^2 = 0 \quad \therefore \text{س} = 0 \quad \therefore \text{س} = 0$$



عندما س = 1

$$\therefore \text{ص} = 12 + , \text{عندما س} = 1 \quad \therefore \text{ص} = 12 +$$

\therefore لا توجد نقط انقلاب

الحل

نوجد ص : $\therefore \text{ص} = \text{أحنا} \text{أس}$

عندما $s = 90$ \therefore ص $= 2$ ح $= 180$ نهاية عظمى

نضع ص = ٠ ∴ حنا ٢ ص = ٠ ∴ ٢ ص = ٩٠ ∴ ص = ٤٥



$$\therefore \text{من } 2 = 30 \times 2 \text{ حتا } 2 = 60 \times 2 = 120$$

∴ توجد نقطة انقلاب عند $s = 40$

$$\therefore \text{نقطة الانقلاب } \left(\frac{1}{4}, \frac{5}{4} \right) \quad \left(\frac{1}{4} \right) = {}^2 \left(\frac{1}{4\sqrt{2}} \right) = {}^2 (45^\circ) = \text{ص}$$

الحسين

ص: ١٦ س + ٢ ب --- (٣) ، : س = $\frac{1}{4}$ نقطة انقلاب

، عند س = ١ مماس أفقي \therefore ص عند س = ١ = ٠

من (۲) $\therefore ۱۳ - ۲ب + ج = ۰$ ---- (۵)

، ∴ المنحنى يمر بالنقطة (١٣، ١) فهي تحقق معادلته

من (١) $\therefore \text{أ} + \text{ب} + \text{ج} = ١٣$ --- (٦) ، من (٥) ، (٦) بالطرح

$$13 = 1 \frac{2}{7} + 12 \therefore 1 \frac{2}{7} = \text{ب (4) من} , 13 = \text{ب3} - 12 \therefore$$

∴ $a = 2$ ، $b = 3$ وبالتعويض في (٦) ∴ $c = 12$

تطبيقات عملية على القيم العظمى والصغرى للدالة

المسائل من هذا النوع تعرف بمسائل إيجاد القيم العظمى (أو الصغرى) ، كما أن هذه المسائل تسمى فى كثير من الأحوال بمسائل التعظيم نظراً لأن الغرض من حلها هو إيجاد القيمة الأكثر موافقة أو الأفضل . وفى كل المسائل سنعتبر أن القيمة العظمى للدالة هي القيمة العظمى المحلية ، القيمة الصغرى للدالة هي القيمة الصغرى المحلية .

وعلى ذلك نتبع الخطوات الآتية عند حل هذه التمارين :

- (١) نفرض رمزا للمتغير المطلوب قيمته العظمى أو الصغرى وليكن ص أو ح .
- (٢) نفرض رموزاً للمتغيرات الأصلية مثل س، ع ، ل ،
- (٣) نوجد القاتون أو العلاقة الذي يربط المتغير التابع ص والمتغيرات الأصلية باستخدام قوانين المساحات أو الحجوم أو نظرية هندسية أو التشابه.
- (٤) نعبر عن جميع المتغيرات الأصلية بدلالة أحدها س مثلاً لنحصل على ص كدالة في س أي ص = د(س) .

(٥) نوجد ص ثم نضع ص = ٠ لإيجاد القيم :

[أ] التي تعطى (أكبر قيمة) نهاية عظمى .

[ب] التي تعطى (أصغر قيمة) نهاية صغرى .

بعض القوانين الهامة :

- ١- محيط المستطيل = (الطول + العرض) \times ٢ ، مساحة المستطيل = الطول \times العرض
- ٢- محيط المربع = ٤ طول ضلعه ، مساحة المربع = طول الضلع \times نفسه
- ٣- محيط المعين = ٤ طول ضلعه ، مساحة المعين = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب قطريه
- ٤- محيط المثلث = مجموع أطوال أضلاعه ، مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ طول القاعدة \times الارتفاع
- مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب ضلعين متجاورين \times جيب الزاوية بينهما
- ٥- محيط المثلث المتساوي الأضلاع = ٣ ل ، مساحته = $\frac{1}{2}$ ل جا ٦٠
- ٦- محيط الدائرة = ٢ ط نق و مساحتها ط نق^٢
- ٧- حجم المكعب = ل^٣ ، مساحته الجانبية الكلية = ٦ ل^٢
- ٨- حجم متوازي المستطيلات = س ص ع ، مساحته = ٢ (س ص + ص ع + ع س)
- ٩- حجم الاسطوانة = ط نق^٢ ع ، مساحتها الجانبية = ٢ ط نق والكلية م ج + ٢ مساحة القاعدة
- ١٠- حجم المخروط = $\frac{1}{3}$ ط نق^٢ ع ، مساحته الجانبية ط نق ل ، والكلية = ط نق ل + ط غ^٢
- ١١- حجم الكرة = $\frac{4}{3}$ ط نق^٣ ، مساحته السطحية = ٤ ط نق^٢

مثال : عددان موجبان مجموعهما ٢٠ أوجد العددين إذا كان حاصل ضربيهما اكبر ما يمكن .

الحل

نفرض ان العددين س ، ٢٠ - س

حاصل الضرب ح = س (٢٠ - س) = ٢٠س - س^٢

$$\therefore \frac{H}{S} = 20 - S = صفر \quad \therefore 20 = 2S \quad \therefore S = 10$$

\therefore العددان ١٠ ، ١٠

مثال : أوجد حجم اكبر اسطوانة دائرية قائمة مساحتها السطحية ٢٤ ط وحدة مربعة .

الحل

المساحة السطحية للأسطوانة = ٢ ط نق ع + ٢ ط نق^٢

$$\therefore 24 = 2 ط نق ع + ٢ ط نق^٢ \quad \text{بالقسمة علي ٢ ط}$$

$$\therefore 12 = نق ع + نق^٢ \quad (١) -----$$

$$\therefore \text{حجم الاسطوانة} = ط نق^٢ ع \quad (٢) -----$$

$$\text{من (١)} \quad ع = \frac{12 - نق^٢}{نق} \quad (٣) -----$$

$$\therefore \text{نعوض (٣) في (٢)} \quad ح = ط نق^٢ \times \frac{12 - نق^٢}{نق}$$

$$\therefore ح = 12 ط نق - ط نق^٣$$

وعندما يكون الحجم اكبر ما يمكن $\therefore \frac{H}{S} = 0$

$$\therefore \frac{H}{S} = 12 ط - ٣ ط نق^٢ = 0$$

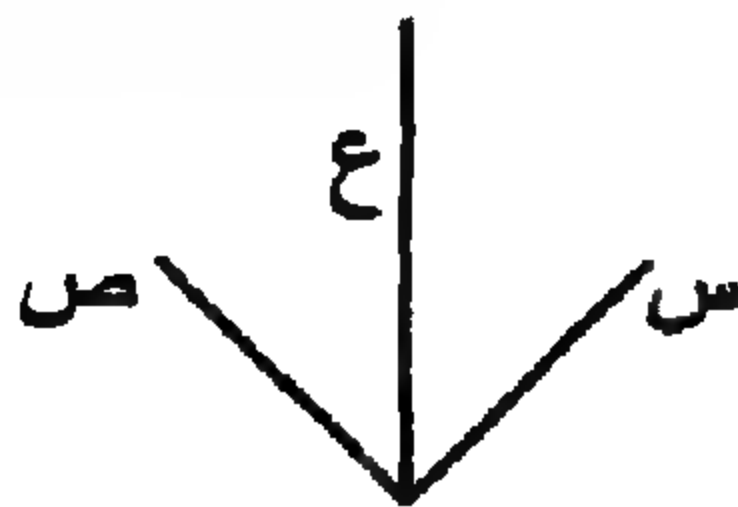
$$\therefore 3 ط نق^٢ = 12 ط \quad \therefore نق^٢ = 4 \quad \therefore نق = 2$$

$$\therefore ح = 12 ط (2) - ط (2)^3 = 16 ط \quad \text{وحدة مكعبة}$$

مثال : متوازي مستطيلات قاعدته مربعة الشكل مجموع أبعاده الثلاثة ٩٠ سم - أوجد أبعاده ليكون

حجمه اكبر ما يمكن .

الحل



نفرض ان أبعاده هي س ، س ، ٤ سم

$$\therefore 90 = ع + ٢س \quad \therefore ع = (90 - ٢س)$$

\therefore حجم متوازي المستطيلات = مساحة القاعدة \times الارتفاع

$$ح (س) = س^2 = (٩٠ - ٢)س = ٩٠س - ٢س^2$$

$$\therefore خ (س) = ١٨٠س - ٦س^2 = ٦س(٣٠ - س)$$

$$خ (س) = ٠ \quad \text{عند } س = ٣٠, \text{ مرفوض}$$

$$\therefore خ (س) = ١٨٠س - ١٨٠ = ٣٦٠ - ١٨٠ = ١٨٠ > ٠$$

$$\therefore \text{الحجم يكون أكبر ما يمكن عندما } س = ٣٠ \text{ سم} \quad \therefore ع = ٩٠ - ٦٠ = ٣٠ \text{ سم}$$

$$\therefore \text{الأبعاد هي } ٣٠, ٣٠, ٣٠ \text{ سم أى يصبح مكعب}$$

مثال: اسطوانة دائرية قائمة بدون غطاء حجمها ثابت صنعت قاعدتها من النحاس وسطحها الجانبى من الألمونيوم فإذا كان ثمن تكاليف الوحدة المربعة من النحاس ٦ أمثال ثمن تكاليف الوحدة المربعة من الألمونيوم .

- فبرهن أن: تكاليف هذه الأسطوانة تكون أقل ما يمكن عندما ارتفاعها مساويا ٣ أمثال قطر القاعدة .

الحل

نفرض $س$ نصف قطر قاعدة الأسطوانة ، $ع$ ارتفاعها

$$\therefore \text{حجم الاسطوانة} = طس^2 = ع = ك \quad \text{--- (١) حيث } ك \text{ ثابت}$$

نفرض $ث$ ثمن تكاليف الوحدة المربعة من الألمونيوم $ث$ فإن ثمن تكاليف الوحدة المربعة من النحاس $٦ث$.

$$\text{وإذا كان } د(س) \text{ ثمن تكاليف الأسطوانة فإن: } د(س) = طس^2 \times ٦ث + ٢طس \times ع \times ث$$

$$= ٢ث (طس^2 + \frac{ك}{س}) \quad [\text{لاحظ } طس = ع = \frac{ك}{س} \text{ من (١)}]$$

$$د(س) = ٢ث (طس^2 + \frac{ك}{س}) \quad \text{--- (٢)}$$

$$\text{نضع } د(س) = ٠ \quad \therefore ٦طس = \frac{ك}{س} \quad \therefore ٦س = \frac{ك}{طس} = ع \text{ من (١)}$$

$$\therefore \text{ارتفاع الاسطوانة} = \text{ثلاثة أمثال قطر القاعدة}$$

$$\text{وبالتالى فإن } د(س) = ٢ث (٦ط + \frac{٢ك}{س}) \text{ وهى موجبة دائما}$$

أى أن $د(س)$ تكون أصغر ما يمكن عندئذ . بمعنى أن تكاليف الأسطوانة أقل ما يمكن عندما يكون الارتفاع ثلاثة أمثال قطر القاعدة .

مثال: مصنع ينتج أجهزة تليفزيون عددها س جهازاً كل يوم وتتكلف $(\frac{1}{4}س + ٣٥ + ٢٥)$ جنيهاً ويبيع الجهاز بسعر $(٥٠ - \frac{1}{4}س)$ جنيهاً - أوجد عدد ما يجب أن ينتجه المصنع من الأجهزة يومياً حتى يحقق أقصى ربح وأثبت أن تكاليف إنتاج الوحدة حينئذ يكون أقل ما يمكن.

الحل

الفكرة: الربح = ثمن البيع - التكاليف ، ثمن البيع = عدد الأجهزة × ثمن بيع الجهاز

نفرض أن الربح = ص جنيهاً

$$\therefore ص = س(٥٠ - \frac{1}{4}س) - (\frac{1}{4}س + ٣٥ + ٢٥)$$

$$= ٥٠س - \frac{1}{4}س - (\frac{1}{4}س + ٣٥س + ٢٥س)$$

$$\therefore ص = -\frac{1}{4}س + ٢٥س - ١٥س$$

$$\therefore \frac{دص}{نس} = -\frac{1}{4}س + ١٥ \quad \therefore \frac{دص}{نس} = ٠ \text{ عندما}$$

$$- \frac{1}{4}س + ١٥ = ٠ \quad \text{أي } س = ١٠$$

$$ص = -\frac{1}{4}س + ١٥ > ٠ \quad \therefore ص \text{ تكون نهاية عظمى عندما } س = ١٠$$

وتكلفة (ت) إنتاج الوحدة = التكلفة الكلية ÷ عدد الأجهزة

$$= (\frac{1}{4}س + ٣٥ + ٢٥) \div س = \frac{1}{4}س + ٦٠$$

$$\therefore \frac{دت}{نس} = ٠ \text{ عندما } \frac{1}{4}س - \frac{٢٥}{س} = ٠ \text{ أي } س = ١٠$$

$$\therefore \frac{٥٠}{س} = \frac{١}{٤}س \text{ تكون } ١٠ \text{ عندما } س = ١٠ \text{ و } \frac{٥٠}{س} < \frac{١}{٤}س$$

$$\therefore ت \text{ نهاية صغرى عندما } س = ١٠$$

مثال: ينتج مصنع السلام للطماطم كمية من عصير الطماطم قدرها ص طنناً ومن الطماطم الأقل

جودة كمية قدرها س طنناً حيث $ص = \frac{٤٠ - ٥س}{١٠ - س}$ وإذا كان سعر النوع الجيد ضعف سعر

أنواع الأقل جودة - فأوجد الكمية إلى يجب على المصنع إنتاجها من كل صنف حتى يحصل المصنع على أكبر إيراد .

الحل

إيراد المصنع م = ص × ١٢ + س × ١ حيث أ سعر طن الطماطم الأقل جودة

$$١٢ = \frac{٥٠ - ٥}{١٠ - س} + س$$

$$١ + \frac{١٢٠ - ١٢٠}{(١٠ - س)} = ١ + \frac{(١٠ - س)(٥٠ - ٥) - (٥٠ - ٥)(١٠ - س)}{(١٠ - س)} \times ١٢ = \frac{٤٠ - ٤٠}{١٠ - س}$$

$$٢٠ = (١٠ - س) \therefore ٢٠ = ١٠ - س$$

$$\therefore ١٠ - س = ٢٠ \therefore س = ١٠ - ٢٠ = -١٠ \text{ أي س} = ١٠ \pm ٢ \times ٢,٢$$

$$\therefore س = ٥,٦ \text{ أو } س = ١٤,٤ \quad \frac{٤٠ - ٤٠}{(١٠ - س)} = \frac{٤٠ - ٤٠}{(١٠ - س)} \text{ عدد سالب}$$

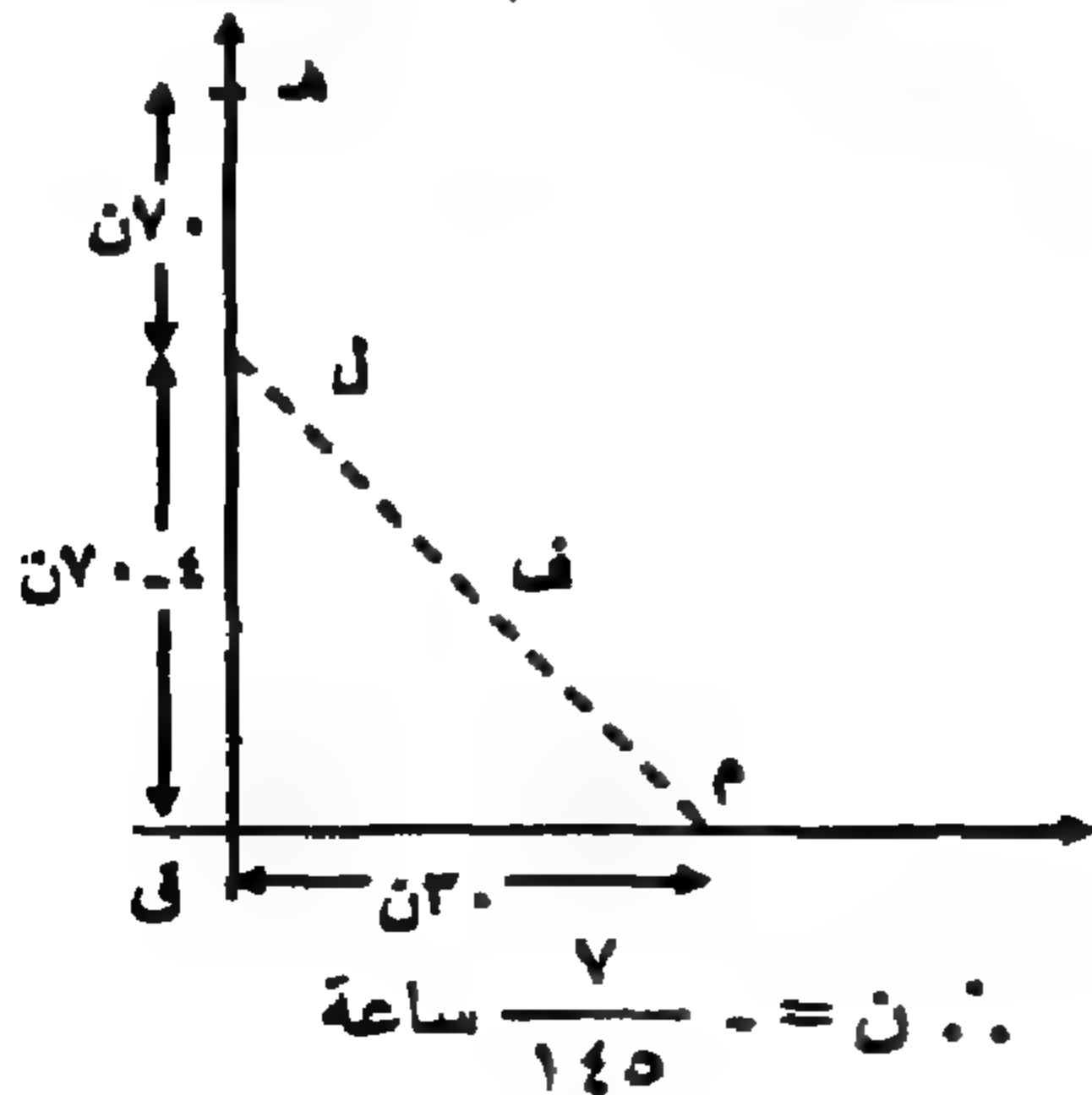
عند س = ٥,٦ طن تقريباً \therefore عند س = ٥,٦ يكون إيراد المصنع أكبر ما يمكن

$$\text{وعندها ص} = \frac{٢٨ - ٤٠}{٥,٦ - ١٠} = \frac{١٢}{٤,٤} = \frac{٣٠}{١١} = ٢,٧ \text{ طن}$$

مثال: طريقان أحدهما يتجه من الغرب إلى الشرق ، الآخر يتجه من الشمال إلى الجنوب يتقاطعان في نقطة ق . فإذا مرت سيارة أ بالنقطة ق عند الساعة الواحدة ظهراً متجهة نحو الشرق بسرعة منتظمة قدرها ٣٠ كم/س وفي نفس اللحظة مرت سيارة ب بنقطة تبعد ٤ كيلو مترات شمال النقطة ق متجهة جنوباً بسرعة منتظمة قدرها ٧٠ كم/س - أوجد الزمن إلى تكون فيه المسافة بين السيارتين أقصر ما يمكن .

الحل

عند الساعة الواحدة كانت السيارة أ عند النقطة ق والسيارة ب عند النقطة هـ التي تقع على بعد ٤ كم إلى الشمال من ق وبعد زمن ن ساعة قطعت السيارة أ مسافة قدرها ٣٠ ن كم شرقاً وقطعت السيارة ب مسافة ٧٠ ن كم جنوباً فتكون المسافة بين السيارتين :



$$f = \sqrt{(٣٠ن)^2 + (٧٠ - ٤)^2}$$

$$\therefore f^2 = ٥٨٠٠ - ٥٦٠ن + ١٦$$

$$\therefore f = \frac{٥٦٠ - ١١٦٠٠}{٥٦٠}$$

$$\therefore \frac{٢٨٠ - ٥٨٠٠}{(٣٠ن)^2 - (٧٠ - ٤)^2} = \frac{٢٨٠ - ٥٨٠٠}{٥٦٠}$$

$$\therefore \frac{٢٨٠ - ٥٨٠٠}{٥٦٠} = ٢٨٠ - ٥٨٠٠$$

$$\therefore \frac{٢٨٠ - ٥٨٠٠}{٥٦٠} > ٢٨٠ - ٥٨٠٠ \therefore \text{عند } \frac{٧}{١٤٥} \text{ ساعة تكون ف أقل ما يمكن}$$

مثال: يمر تيار كهربى في ملف طول نصف قطره = a فإذا وضع مغناطيس صغير بحيث يكون محوره عمودياً على مستوى الملف ماراً بمركزه - وكان (E) هو بعد المغناطيس عن المستوى المذكور عند لحظة ما . وكانت القوة المؤثرة على المغناطيس بواسطة التيار تتناسب مع $\frac{E}{(1+E)^2}$ - فلو جد E بحيث تكون القوة أكبر ما يمكن .

الحل

$$\begin{aligned} \therefore Q = \frac{E}{(1+E)^2} \times \theta \\ \therefore \frac{Q}{E} = \frac{\theta}{(1+E)^2} \quad \text{عندما } \frac{1}{4} = E \Leftarrow \frac{1}{4} = E \\ \therefore \frac{Q}{E} = 0 \end{aligned}$$

إشارة $\frac{Q}{E}$: $\leftarrow \frac{1}{4} \rightarrow$

$\therefore Q$ تتزايد في الفترة $[0, \frac{1}{4}]$ وتتناقص بعد ذلك
 $\therefore Q$ تكون أكبر ما يمكن عندما $E = \frac{1}{4}$

مثال : نافذة زجاجية علي هيئة مستطيل يعطوه نصف دائرة فإذا كان محيط تلك النافذة ٣٦ قدم - فلو جد نصف قطر الدائرة التي تجعل النافذة تسمح بدخول أكبر كمية من الضوء .

الحل



نفرض أن نصف قطر الدائرة = N
 \therefore طول المستطيل = $2N$ ونفرض عرضه E
 محيط النافذة = $2E + 2N + \pi N = 36$
 $\therefore E = \frac{36 - 2N - \pi N}{2}$ (١)
 مساحة النافذة :

$M = \text{مساحة المستطيل} + \text{مساحة نصف دائرة}$
 $M = 2N \times E + \frac{1}{2} \pi N^2$ (٢)

ومن (١) بالتعويض في (٢)

$$\therefore م = ٢ \text{ نق} - ٣٦ - \frac{١}{٢} (\text{نق} - ٢ \text{ نق}) + \frac{١}{٢} \text{ط نق}$$

$$م = ٢ \text{ نق} - ٣٦ - \frac{١}{٢} \text{نق} + \frac{١}{٢} \text{ط نق}$$

$$\therefore \frac{٤}{٢} \text{نق} = ٢ \text{ نق} - ٣٦ + \frac{١}{٢} \text{ط نق} \quad \therefore م أكبر ما يمكن = \frac{٤}{٢} \text{نق}$$

$$\therefore ٢ - ٣٦ - \text{نق} - \text{ط نق} = ٠ \quad \therefore \text{نق} = (٢ + \text{ط}) ٣٦$$

$$\therefore \text{نق} = \frac{٢ + \text{ط}}{٣٦} \text{ قدم}$$

مثال: أوجد أكبر حجم لأسطوانة دائرية قائمة يمكن وضعها داخل مخروط دائري قائم ارتفاعه ١٢ سم ونصف قطر قاعدته ٤ سم علماً بأن الأسطوانة والمخروط لهما نفس المحور.

الحل

نفرض ان ارتفاع الاسطوانة ع ونصف قطر قاعدتها = نق

$$\therefore \text{حجم الاسطوانة ح} = \text{ط نق}^٢ \text{ ع} \quad (١)$$

ولكن من تشابه $\Delta \Delta$ أ ب و ، ج ب ء

$$\frac{٤}{١٢} = \frac{\text{نق} - ٤}{٤}$$

$$\therefore \text{ع} = ٣ (٤ - \text{نق}) \quad (٢)$$

ومن (٢) بالتعويض في (١)

$$\therefore \frac{٤}{٢} \text{نق} = ٣ \text{ ط} (٨ \text{ نق} - ٤ \text{ نق}^٢)$$

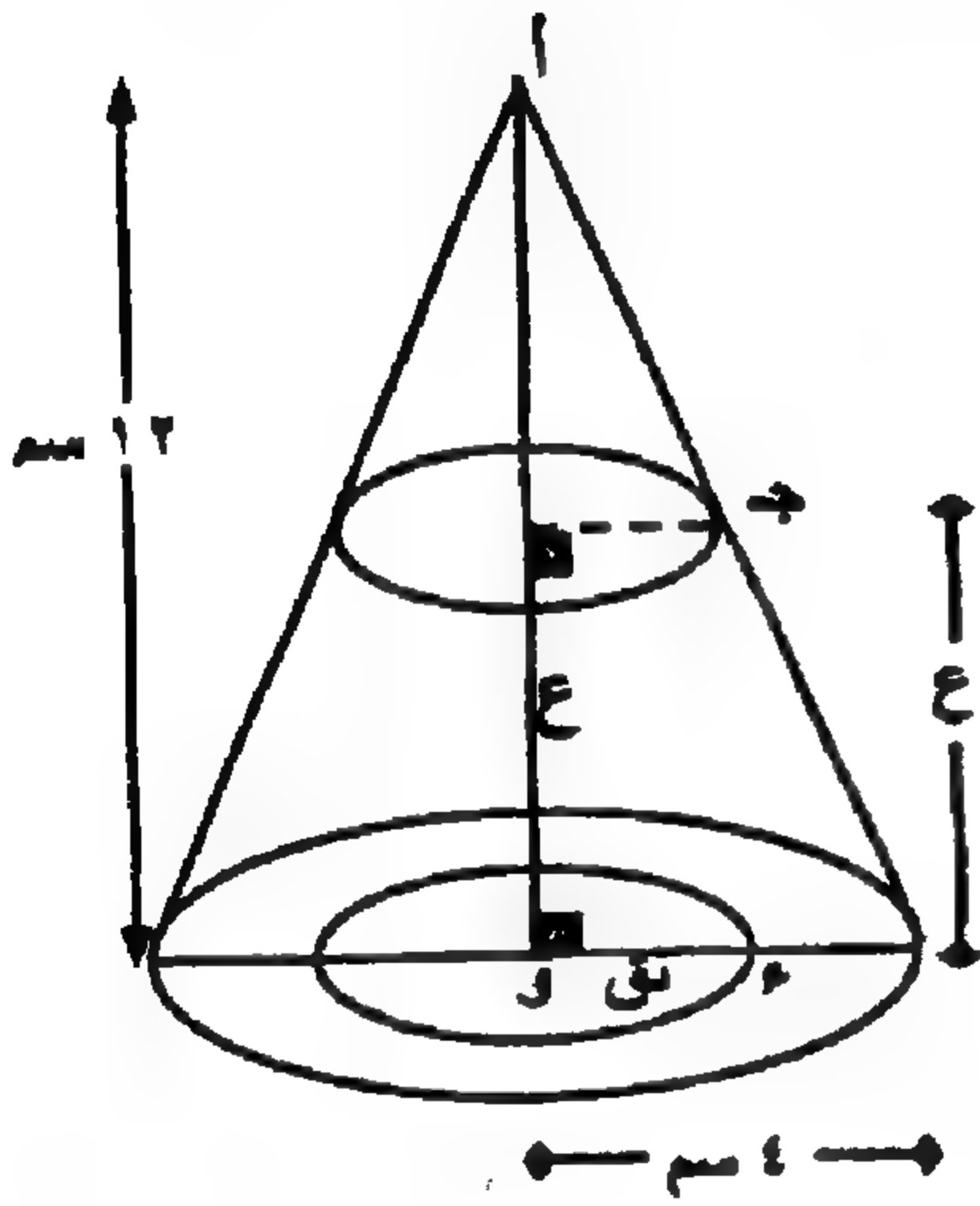
$$\frac{٤}{٢} \text{نق} \times \frac{٤}{٢} \text{نق} = \frac{٤}{٢} \text{ط}$$

$$= ٣ \text{ ط} (٨ \text{ نق} - ٤ \text{ نق}^٢) = ٠ \quad (ح نهاية عظمى)$$

$$\therefore ٤ \text{ نق} (٢ - \text{نق}) = ٠ \quad \text{أما نق} = ٠ \quad (مرفوض) \text{ أو } ٢ \text{ سم}$$

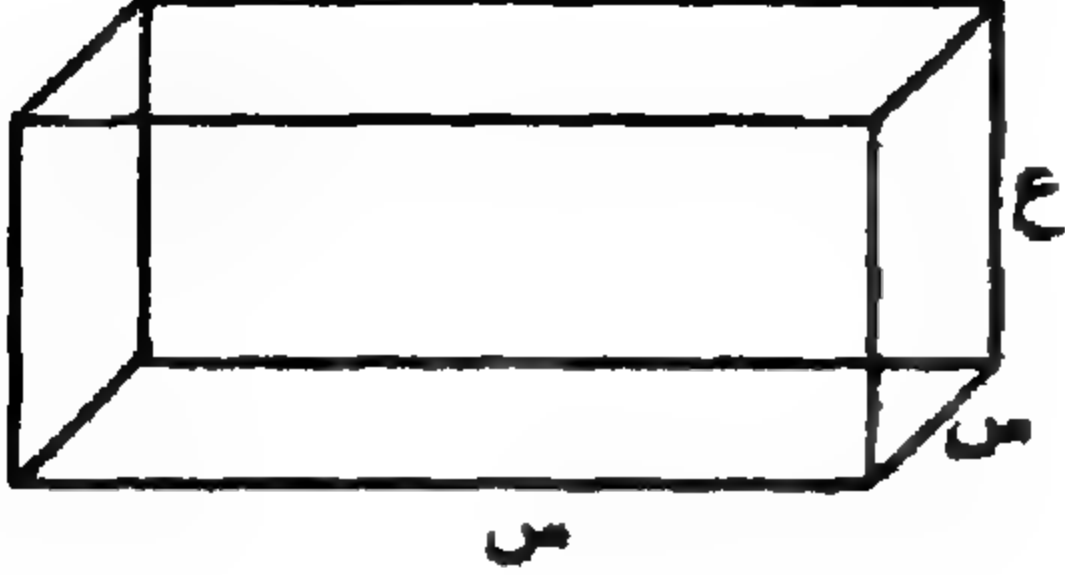
$$\text{ومن (٢)} \quad \therefore \text{ع} = ٦ \text{ سم}$$

$$\therefore \text{أكبر حجم للأسطوانة} = \text{ط} (٢) \times ٦ = ٢٤ \text{ ط سم}^٢$$



مثال: يراد صنع وعاء من المعدن علي شكل متوازي مستطيلات تكون سعته ٢٧ قدم^٣ وقاعدته مربعة الشكل ، أوجد أبعاد هذا الوعاء إذا استخدم في صنعه أقل مساحة ممكنة من المعدن .

الحل



$$ح = س \times س \times ع$$

$$س^3 = ع$$

$$\therefore ٢٧ = س^3 \times ع \text{ ---- (١)}$$

$$\text{المساحة الجانبية} = ٢ [س \times س + س \times ع + س \times ع]$$

$$= ٢ [س^2 + ٢س \times ع] \text{ ولكن من (١) } ع = \frac{٢٧}{س^3}$$

$$\therefore م = ٢س^2 + ٤س \times \frac{٢٧}{س^3} ، م = د (س)$$

$$\therefore د (س) = ٢س^2 + ١٠٨ \times س^{-١} \quad \therefore د (س) = ٤س - ١٠٨ \times س^{-٢}$$

$$\therefore د (س) = ٠ \text{ عند النهاية الصغرى} \iff ٤س - \frac{١٠٨}{س^٢} = ٠$$

$$\frac{١٠٨}{س^٢} = ٤س \quad \therefore ٤س = \frac{١٠٨}{س^٢} \quad \therefore ٢٧ = س^٣ \quad \therefore س = ٣$$

$$\therefore \text{الارتفاع } ع = \frac{٢٧}{(٣)^3} = ٣ \quad \therefore \text{أبعاد الصندوق } ٣ ، ٣ ، ٣ \text{ يصبح مكعباً}$$

رسم منحنيات الدوال

لرسم منحنى الدالة د نتبع الخطوات التالية:

- ١- نوجد $D(s)$ ، $D'(s)$
- ٢- نستخدم $D(s)$ في إيجاد :
 - أ- النهايات العظمى والصغرى إن وجدت حيث عندها $D(s) = 0$
 - ب- فترات التزايد حيث $D(s) < 0$ ، فترات التناقص حيث $D(s) > 0$
- ٣- نستخدم $D'(s)$ في إيجاد :
 - أ- نقط الانقلاب إن وجدت حيث عندها $D'(s) = 0$
 - ب- فترات التحدب لأعلى حيث $D'(s) < 0$ ، التحدب لأسفل حيث $D'(s) > 0$
- ٤- نعين بعض النقاط التي تساعد على الرسم مثل:
 - أ- نقط التقاطع مع محور الصادات وهي $(0,0)$ ، نقط التقاطع مع محور السينات .
 - ب- بعض النقاط الأخرى بالتعويض عن s بأى قيمة وإيجاد $D(s)$.
- ٥- نرتب النقاط التي حصلنا عليها في جدول ونمثلها بيانياً ونكمل رسم المنحنى بتوصيل هذه النقاط .

مثال: ارسم منحنى الدالة $D(s) = s^3 - 3s^2$

الحل

$$D(s) = s^3 - 3s^2 \quad D'(s) = 3s^2 - 6s \quad D''(s) = 6s - 6$$

$$D(s) = 0 \text{ عندما } s = 0 \text{ أو } s = 3$$

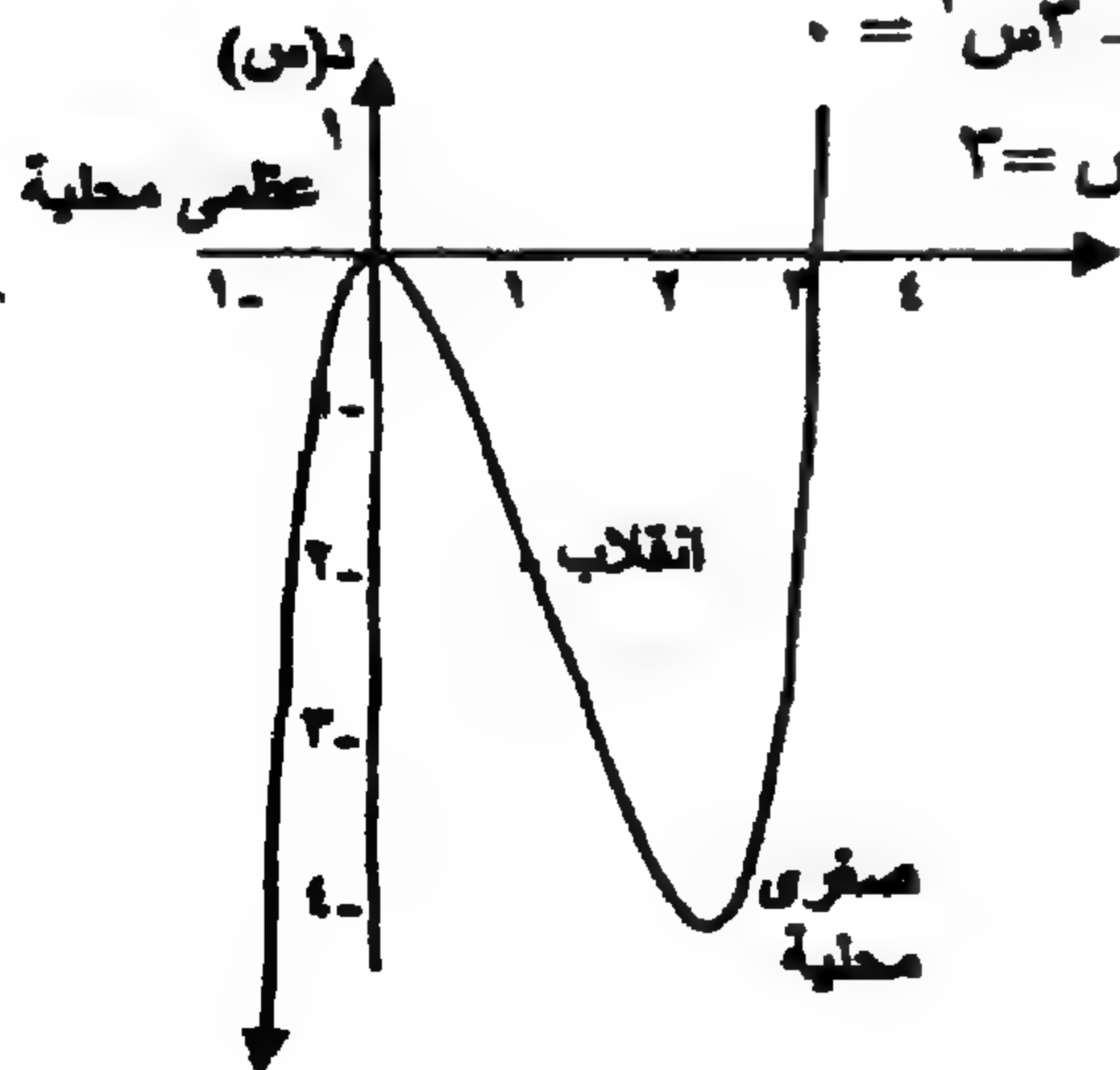
$$D'(s) = 0 \text{ عندما } s = 0 \text{ أو } s = 2 \quad D''(s) = 0 \text{ عندما } s = 1$$

$$D(s) = 0 \text{ عندما } s = 0 \text{ أو } s = 3 \quad D'(s) = 0 \text{ عندما } s = 0 \text{ أو } s = 2 \quad D''(s) = 0 \text{ عندما } s = 1$$

$$\text{الصغرى المحلية } (2, -4) \text{ ، نقطة الانقلاب } (1, -2)$$

$$\text{نقط التقاطع مع السينات نضع } D(s) = 0 \quad \therefore s^3 - 3s^2 = 0 \quad \therefore s^2(s - 3) = 0 \quad \therefore s = 0 \text{ أو } s = 3$$

$$\therefore \text{نقط التقاطع مع السينات } (0,0) \text{ ، } (3,0)$$



1-	0	1	2	3	s
4-	0	2-	4-	0	D(s)

مثال: ارسم الشكل العام للمنحنى الدالة :

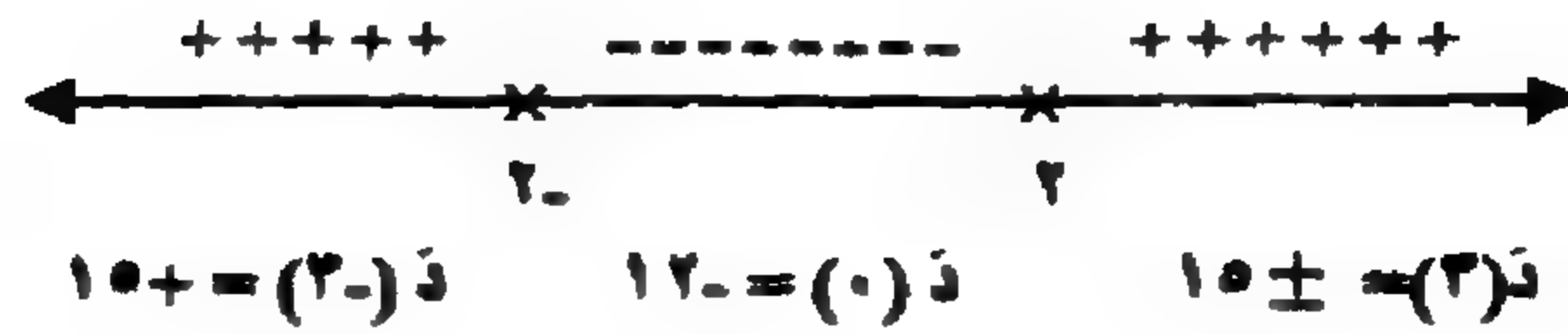
$$d = \{ (s, v) : v = s^2 - 12s + 2 \} \text{ بين } s = 4, s = 4$$

الحل

$$d(s) = s^2 - 12s + 2, \quad d'(s) = 2s - 12$$

- عند النهايات العظمى والصغرى $d'(s) = 0$ $\therefore s^2 - 12s + 2 = 0$

$$s = 2 \pm \sqrt{10} \quad \therefore s = 2 \pm \sqrt{10}$$



فترات التزايد $(-\infty, 2 - \sqrt{10}) \cup (2 + \sqrt{10}, \infty)$

فترات التناقص $(2 - \sqrt{10}, 2 + \sqrt{10})$

عند النهاية الصغرى $s = 2$ $v = 12$ $\therefore (2, 12)$

عند النهاية العظمى $s = 2 - \sqrt{10}$ $v = 19$ $\therefore (2 - \sqrt{10}, 19)$

وعند نقطة الانقلاب $d'(s) = 0$ $\therefore s = 6$ $v = 0$

ولإيجاد فترات التفرع (التحذب)



$\therefore (3, 0)$ هي نقطة انقلاب

عندما $s = 0 \leftarrow v = 2$

فترة التحذب لأعلى $(0, \infty)$ ، فترة التحذب لأسفل $(-\infty, 0)$

إيجاد نقط تساعد على الرسم مثل:

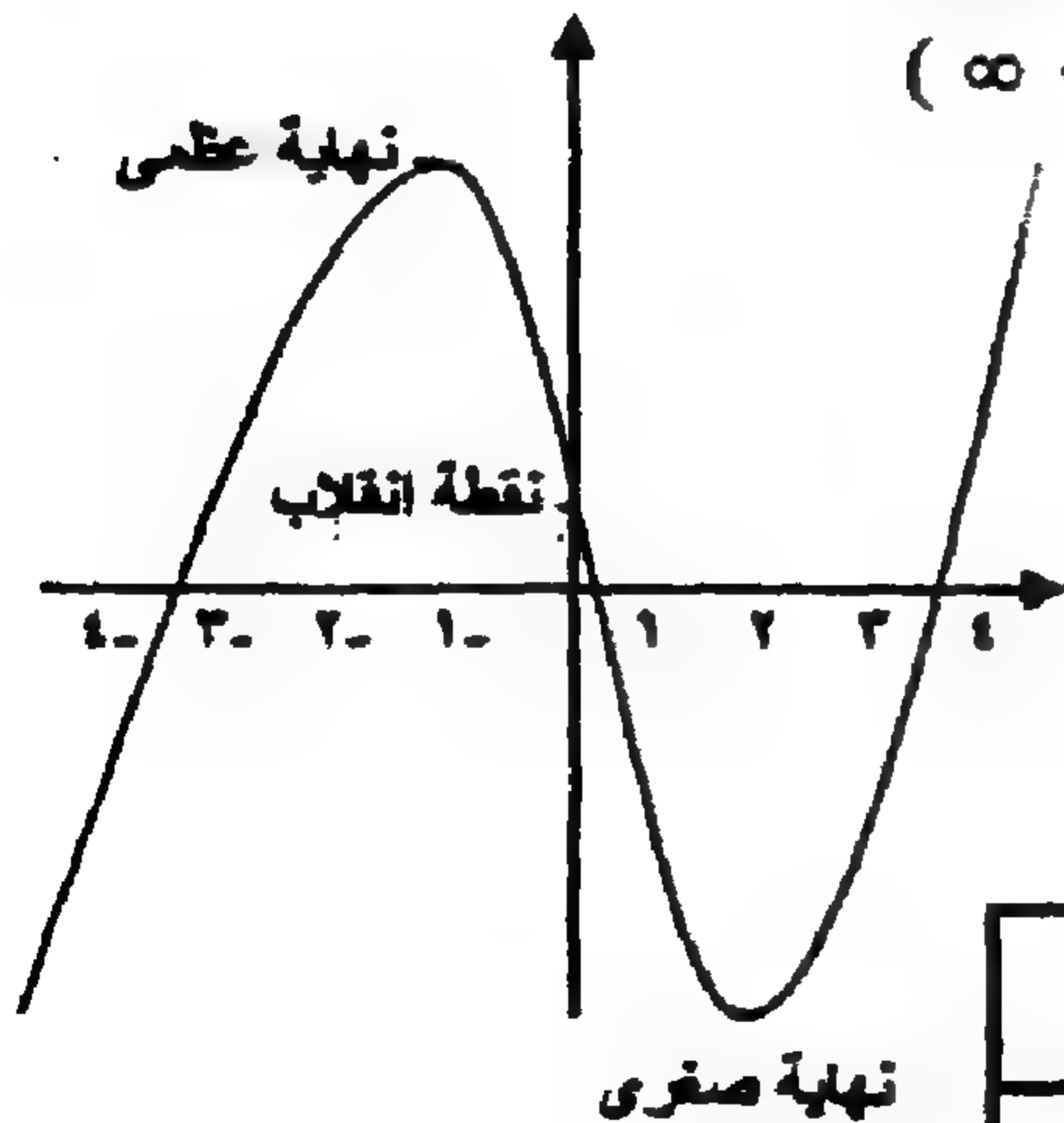
$$s = 4 \leftarrow v = 12 \quad (4, 12)$$

$$s = 1 \leftarrow v = 14 \quad (1, 14)$$

$$s = 1 \leftarrow v = 8 \quad (1, 8)$$

$$s = 4 \leftarrow v = 19 \quad (4, 19)$$

تكوين الجدول:



س	4-	2-	1-	0	1	2	4
d(s)	12	19	8	14	12	19	19

تمرين (٨)

(١) عين القيم العظمى و الصغرى المحلية وكذلك نقاط الانقلاب للدوال التالية :

- $ص = ص' + ٤س + ٦$
- $ص = ٢ + س - س'$
- $ص = ص' - ٣س' + ٣س + ٢$
- $د(س) = ٢س' + ٣س' - ١٢س + ٥$
- $ص = ص' - ٢س' + ٣س + ١$
- $د(س) = س(س - ١)$
- $د(س) = \frac{س'}{١-س} ، س \neq ١$
- $٣ص = ص' - ٣س' - ٩س + ١٥$
- $د(س) = ص' - ٩س' + ١٥س$
- $د(س) = س + \frac{٤}{١-س}$
- $د(س) = س | س - ٤ |$

(٢) عين القيم الصغرى المطلقة والعظمى المطلقة للدوال التالية في الفترة المحددة لكل منها:

- $ص = ص' في [١- ، ٣]$
- $ص = ٢س' + ٣س' - ١٢س + ١ في [١- ، ٥]$
- $ص = ٢س' + ٣س' - ١٢س + ١ في [١٠- ، ١٢]$
- $ص = \frac{س}{١-س} في [٢ ، ٤]$
- $ص = س + \frac{١}{٢+س} في [٠ ، ٣]$
- $د(س) = \left. \begin{array}{l} (٢-س) \\ ٤-س \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{عندما } س \geq ٣ \\ \text{عندما } س < ٣ \end{array} في [٢ ، ٥]$
- $د(س) = \left. \begin{array}{l} س' + ٣س' \\ س' - ٢س \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{عندما } س \geq ٠ \\ \text{عندما } س < ٠ \end{array} في [٣- ، ٣]$

$$\bullet \quad \left. \begin{array}{l} \text{س}^1 + \text{س} - 2 \text{ عندما } \text{س} \geq 2 \\ \text{س} - 6 \text{ عندما } \text{س} < 2 \end{array} \right\} = \text{د(س)} \quad \text{في } [1, 3]$$

$$(3) \quad \text{أثبت أنه إذا كان س عددا موجبا فإن } \text{س} + \frac{1}{\text{س}} < 2$$

$$(4) \quad \text{عين كلامن ل ، م بحيث تكون الدالة د(س) = س}^1 + \text{ل س} + \text{م لها قيمة صفري تساوي 3 عندما س=1}$$

$$(5) \quad \text{أوجد أ، ب بحيث يكون للمنحنى الذى معادلته س}^1 \text{ ص} + \text{أ س} + \text{ب ص} = 0 \text{ نقطة انقلاب عند النقطة } (2, -\frac{5}{4}) \text{ ثم ارسم شكلا عاما لهذا المنحنى.}$$

$$(6) \quad \text{وجد أحد مصانع الأجهزة الكهربائية أنه يكسب 30 جنيهها في كل جهاز إذا كان إنتاجه الشهري 50 جهازا فإذا زاد الإنتاج عن هذا العدد فإن الربح في الجهاز يقل 50 قرشا عن كل جهاز زيادة - أوجد عدد الأجهزة التى ينتجها المصنع في الشهر ليحقق أكبر ربح ممكن.}$$

$$(7) \quad \text{صفحة معنوية رقيقة مربعة الشكل طول ضلعها 10 سم قطع من أركانها أربعة مربعات متساوية ثم ثمن الجزء الباقى على شكل عتبة بدون غطاء - أوجد طول ضلع المربع المقطوع بحيث يكون حجم العتبة أكبر ما يمكن.}$$

$$(8) \quad \text{عدان مجموعهما 16 - أوجد العددين إذا كان مجموع مربعيهما أصغر ما يمكن.}$$

$$(9) \quad \text{قطعة من السلك طولها ل صنع منها مستطيل - أوجد أبعاد المستطيل بحيث تكون مساحته أكبر ما يمكن.}$$

$$(10) \quad \text{قطعة من السلك طولها 2 ل صنع منها مثلث قائم الزاوية - أوجد أبعاد هذا المثلث بحيث تكون مساحته أكبر ما يمكن.}$$

$$(11) \quad \text{سلك طوله 34 سم قسم إلى جزئين ثم ثنى الجزء الأول على شكل مربع والثانى على شكل دائرة - أوجد طول كل جزء بحيث يكون مساحتى الشكلين أقل ما يمكن.}$$

(١٢) إذا كانت تكاليف استهلاك وقود لقاطرة تتناسب مع مربع سرعتها وكانت هذه التكاليف ٢٥ جنيها في الساعة عندما تكون السرعة ٢٥ كم / ساعة كما أن هناك تكلفة إضافية تقدر بمائة جنيه في الساعة بصرف النظر عن سرعتها - أوجد سرعة القاطرة لتكون تكلفة الكم الواحد أقل ما يمكن .

(١٣) إذا كانت المساحة الكلية لاسطوانة دائرية قائمة هي ٢٤ ط سم^٢ - أوجد أكبر حجم للأسطوانة

(١٤) علبة على شكل متوازي مستطيلات سعتها ٩٠٠٠ سم^٣ وارتفاعها ضعف عرضها - أوجد أبعاد متوازي المستطيلات عندما تكون مساحة أوجه الستة أقل ما يمكن .

(١٥) إذا كان مجموع مساحتي سطح كرة واسطوانة متفقة معها في نصف القطر يساوي ٢٥٠ ط سم^٢ - فأوجد نصف القطر عندما يكون مجموع حجميهما أكبر ما يمكن .

(١٦) أوجد نقطة على المنحنى ص^٢ = ٤ س + ٥ بحيث تكون المسافة بينها وبين النقطة (٠، ٣) أقل ما يمكن .

(١٧) نافذة على هيئة مستطيل يطوه نصف دائرة ينطبق على أحد أبعاد المستطيل فإذا كان محيط النافذة ٦ أمتار - أوجد نصف قطر الدائرة الذي يجعل مساحة النافذة أكبر ما يمكن .

(١٨) إذا علم أن قوة احتمال قطعة خشبية مقطوعها مستطيل يتناسب طرديا مع حاصل ضرب أحد بعدي المستطيل في مربع بعده الآخر - أوجد بعدي المقطع لقطعه خشبية ذات أكبر قوة احتمال يمكن استخلاصها من جذع شجرة على شكل اسطوانة دائرية قائمة قطرها ١٠٠ سم.

(١٩) (أ) ارسم المنحنى ص = س^٣ - س^٢ + س^٣ (ب) ارسم المنحنى ص = س^٣ + س^٢ - س^١

(ج) ارسم المنحنى ص = س^٢ - س^٣ (د) ارسم المنحنى ص = ٣ - س^٣ - س^٢

$$\left. \begin{array}{l} \text{ص} = \text{س}^2 + \text{س}^2 \\ \text{ص} = \text{س} - \text{س} \end{array} \right\} \text{ص} \geq 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{ص} = \text{س}^3 - \text{س}^2 \\ \text{ص} = \text{س}^2 - \text{س}^3 \end{array} \right\} \text{ص} \geq 2$$

$$\text{ص} = \text{س} + |\text{س}| + \text{س}^2$$

تمارين غير محلولة

١. أوجد طول ضلعي القائمة في مثلث القائم الزاوية وتره ١٠ سم تكون مساحة المثلث أكبر ما يمكن .
٢. وصل مصدر كهربى قوته الدافعة Q ومقاومته الداخلية m بدائرة خارجية فمر تيار شدته T أمبير في الدائرة - فإذا كان مقدار الطاقة الكهربائية المعطاة للدائرة الخارجية في الثانية الواحدة هو $P = T - T^2$ م (حيث Q ، m ثابتان) أوجد شدة التيار الذى تصبح عنده قيمة هذه الطاقة أكبر ما يمكن وذلك عندما تكون $Q = 60$ فولت ، $m = 0.3$ أوم .
٣. عددان مجموعهما ٢٠ وحاصل ضرب مكعب الأول ومربع الثانى نهاية كبرى ، أوجد العددين .
٤. اثبت أن النهاية الصغرى لحاصل جمع عدد موجب ومقلوب هذا العدد مضروباً فى k ، حيث k ثابت $= \sqrt{k}$.
٥. يراد عمل خزان على شكل أسطوانة دائرية قائمة فإذا كتبت تكاليف صنع القاعدة هي دينارين ليبيين للمتر المربع وتكاليف الجوانب دينار واحد للمتر المربع وإذا صنع للخزان غطاء على شكل كرة مجوفة يتكلف المتر المربع منها نصف دينار فإذا بلغت التكاليف الكلية $\frac{2}{7} 1414$ ديناراً ليبياً - فأوجد أبعاد الخزان لكى تكون سعته أكبر ما يمكن-
($P = \frac{22}{7}$)
٦. ينتج مصنع الطماطم فى طرابلس كمية من عصير الطماطم قدرها x طنًا ومن الطماطم الأقل جودة كمية قدرها y طنًا حيث : $\frac{40 - x}{10 - y}$ وإذا كان سعر النوع الجيد ضعف سعر النوع الأقل جودة - فأوجد الكمية التى يجب على المصنع إنتاجها من كل صنف حتى يحصل المصنع على أكبر إيراد .

الباب الخامس

التكامل

التكامل سبق التفاضل تاريخياً ، فلقد كان وليد الدراسات التي نشأت عند محاولة إيجاد طرق عامة لتحديد مساحات وحجوم الأشكال المنتظمة - التكامل في الواقع هو عملية جمع عدد كبير جداً من العناصر الدقيقة جداً - ولذا أشتقت علامة التكامل \int من الحرف S وهو الحرف الأول في كلمة Sum التي تعني الجمع ، وفي هذا الجزء سنعتبر أن التكامل هو عملية عكسية لعملية التفاضل . وهذا مفهوم يختلف كلية عن مفهوم الجمع .

∴ عملية التفاضل هي إيجاد $\frac{e}{s}$ إذا علمت ص .

∴ عملية التكامل هي إيجاد ص إذا علم $\frac{e}{s}$.

مثلاً : إذا كانت ص = س^٣ ∴ $\frac{e}{s} = 3س^2$.

وبعكس العملية السابقة ∴ $\frac{e}{s} = 3س^2$ ∴ ص = س^٣ .

وتقرأ " تكامل س^٣ بالنسبة إلى س " وفي كل عملية تكامل لابد من وجود الرمز " \int "

وهي رمز التكامل وتقرأ تكامل ، (e س) وتقرأ بالنسبة إلى س وهناك نوعان من التكامل هما :

[أ] التكامل المحدد . [ب] التكامل الغير محدد .

نظريات في التكامل الغير محدد :

نظرية (١) :

$$\left\{ س^n e س = \frac{س^n + 1}{ن + 1} + ث حيث ن \neq -1 \right.$$

، ث : يسمى ثابت التكامل يعتمد على شروط معينة .

ويسمى هذا التكامل بالتكامل غير المحدد لأنه لا يأخذ قيمة واحدة محددة بل يمكن أن يأخذ قيماً كثيرة تتوقف على قيمة الثابت (ث) . ويجدر الإشارة أن ناتج التكامل غير المحدد هو متغير وليست قيمة ثابتة .

البرهان

$$س^{\text{ن}} = \frac{س^{\text{ن}}(1+\text{ن})}{(1+\text{ن})} = \left(\text{ث} + \frac{س^{\text{ن}+1}}{1+\text{ن}} \right) \frac{س}{س}$$

$$\therefore \left\{ س^{\text{ن}} س = س + \frac{س^{\text{ن}+1}}{1+\text{ن}} \right.$$

∴ عملية التكامل للدالة $س^{\text{ن}}$ بالنسبة إلى $س$: زودنا الأس القديم (ن) واحد وقسمنا على الأس الجديد (ن + 1)

أمثلة:

$$\left\{ س^{\text{١}} س = س + \frac{س^{\text{٢}}}{٢} \right.$$

$$\left\{ س^{\text{٢}} س = س + \frac{س^{\text{٣}}}{٣} \right., \left\{ س^{\text{٣}} س = س + \frac{س^{\text{٤}}}{٤} \right.$$

$$\left\{ س^{\text{٤}} س = س + \frac{س^{\text{٥}}}{٥} \right., \left\{ س^{\text{٥}} س = س + \frac{س^{\text{٦}}}{٦} \right.$$

ملاحظات:

(١) $\left\{ ا د (س) = س + ا \right\}$ د (س) حيث ا مقدار ثابت

مثلا: $\left\{ ٢ س^{\text{٢}} س = س + \frac{س^{\text{٣}}}{٣} \right\}$ $٢ = س + \frac{س^{\text{٣}}}{٣} \times ٢ = س + \frac{س^{\text{٣}}}{٣}$

(٢) $ا س = س + ا$

مثلا: $\left\{ ٨ س = س + ٨ \right\}$ $٨ س = س + ٨$

(٣) $\left\{ ا د (س) + ب د (س) + ج د (س) + د د (س) + هـ د (س) \right\}$

مثلا: $\left\{ (٣ س^{\text{٣}} + ٧ س^{\text{٢}} + ٩ س + ١) س \right\}$

$$= \frac{٣ س^{\text{٤}}}{٤} + \frac{٧ س^{\text{٣}}}{٣} + \frac{٩ س^{\text{٢}}}{٢} + س$$

$$= س + \frac{٩ س^{\text{٢}}}{٢} + \frac{٧ س^{\text{٣}}}{٣} + \frac{٣ س^{\text{٤}}}{٤}$$

استنتاج:

(١) $\left\{ س^{\text{٢}} س = س + \frac{س^{\text{٣}}}{٣} \right\}$

(٢) $\left\{ \frac{١}{س} س = س + \frac{١}{س} \right\}$

وبصفة عامة :

$$(1) \left\{ \sqrt[n]{\frac{1+n}{n}} = \frac{1+n}{n} = \frac{1}{n} \right\} \text{ ث + } \sqrt[n]{\frac{1+n}{n}} = \frac{1+n}{n} = \frac{1}{n} \text{ ث + } \sqrt[n]{\frac{1+n}{n}}$$

$$(2) \left\{ \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1+n}{n} = \frac{1}{n} \right\} \text{ ث + } \sqrt[n]{\frac{1+n}{n}} = \frac{1+n}{n} = \frac{1}{n} \text{ ث + } \sqrt[n]{\frac{1+n}{n}}$$

$$\text{مثلاً: } \left\{ \sqrt[2]{\frac{3}{4}} = \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \right\} \text{ ث + } \sqrt[2]{\frac{3}{4}} = \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \text{ ث + } \sqrt[2]{\frac{3}{4}}$$

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt[2]{4}} = \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \right\} \text{ ث + } \sqrt[2]{\frac{3}{4}} = \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \text{ ث + } \sqrt[2]{\frac{3}{4}}$$

ملاحظة :

$$\left\{ \sqrt[n]{\frac{1+n}{n}} = \frac{1+n}{n} = \frac{1}{n} \right\} \text{ ث + } \sqrt[n]{\frac{1+n}{n}} = \frac{1+n}{n} = \frac{1}{n} \text{ ث + } \sqrt[n]{\frac{1+n}{n}}$$

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1+n}{n} = \frac{1}{n} \right\} \text{ ث + } \sqrt[n]{\frac{1+n}{n}} = \frac{1+n}{n} = \frac{1}{n} \text{ ث + } \sqrt[n]{\frac{1+n}{n}}$$

$$\text{مثلاً: } \left\{ \sqrt[2]{\frac{3}{4}} = \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \right\} \text{ ث + } \sqrt[2]{\frac{3}{4}} = \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \text{ ث + } \sqrt[2]{\frac{3}{4}}$$

مثال: أوجد التكاملات الآتية :-

$$(1) \left\{ \sqrt[2]{\left(\frac{1}{x} - x\right)} + \frac{1}{x} \right\} \text{ ث + } \sqrt[2]{\left(\frac{1}{x} - x\right)} + \frac{1}{x} \text{ ث + } \sqrt[2]{\left(\frac{1}{x} - x\right)} + \frac{1}{x}$$

$$(2) \left\{ \frac{1}{\sqrt[2]{x}} \right\} \text{ ث + } \frac{1}{\sqrt[2]{x}} \text{ ث + } \frac{1}{\sqrt[2]{x}} \text{ ث + } \frac{1}{\sqrt[2]{x}}$$

الحل

$$(1) \left\{ \sqrt[2]{\left(\frac{1}{x} - x\right)} + \frac{1}{x} \right\} \text{ ث + } \sqrt[2]{\left(\frac{1}{x} - x\right)} + \frac{1}{x} \text{ ث + } \sqrt[2]{\left(\frac{1}{x} - x\right)} + \frac{1}{x}$$

$$\left\{ \sqrt[2]{\left(\frac{1}{x} - x\right)} + \frac{1}{x} \right\} \text{ ث + } \sqrt[2]{\left(\frac{1}{x} - x\right)} + \frac{1}{x} \text{ ث + } \sqrt[2]{\left(\frac{1}{x} - x\right)} + \frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0 \text{ ث + } \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0 \text{ ث + } \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0$$

$$(2) \left\{ \frac{1}{\sqrt[2]{x}} \right\} \text{ ث + } \frac{1}{\sqrt[2]{x}} \text{ ث + } \frac{1}{\sqrt[2]{x}} \text{ ث + } \frac{1}{\sqrt[2]{x}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[2]{x}} - \frac{1}{\sqrt[2]{x}} = 0 \text{ ث + } \frac{1}{\sqrt[2]{x}} - \frac{1}{\sqrt[2]{x}} = 0 \text{ ث + } \frac{1}{\sqrt[2]{x}} - \frac{1}{\sqrt[2]{x}} = 0$$

$$(3) \left\{ \frac{1}{\sqrt[2]{x}} \right\} \text{ ث + } \frac{1}{\sqrt[2]{x}} \text{ ث + } \frac{1}{\sqrt[2]{x}} \text{ ث + } \frac{1}{\sqrt[2]{x}}$$

$$\left\{ \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \right\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} =$$

$$\left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right\} = \frac{3}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} =$$

$$(4) \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right\} = \frac{3}{2} =$$

$$\left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} =$$

نظرية (2)

$$\left\{ (a+b)^n \right\} = \frac{1}{1} \times \frac{(a+b)^n}{1+n} =$$

حيث (a+b) دالة خطية

$$\text{مثلاً: } \left\{ \frac{(a+b)^n}{1+n} \right\} = \frac{(a+b)^n}{1+n} =$$

$$\left\{ \frac{(a+b)^n}{1+n} \right\} = \frac{(a+b)^n}{1+n} =$$

∴ تكامل دالة من الدرجة الأولى في متغير ما مرفوعة لأس 3 ح {1-} بالنسبة لذلك

$$\text{المتغير} = \frac{(a+b)^n}{1+n} \times \text{معامل المتغير} =$$

أمثلة متنوعة:

$$(1) \left\{ \sqrt[3]{1+s^4} = \sqrt[3]{(1+s^4)} = \sqrt[3]{\frac{1+s^4}{1}} = \sqrt[3]{\frac{1+s^4}{1}} \right\}$$

$$(2) \left\{ \sqrt[3]{\frac{3}{s} - \frac{2}{s}} = \sqrt[3]{\frac{3-s}{s}} \right\}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{3-s}{s}} = \sqrt[3]{\frac{3-s}{s}} = \sqrt[3]{\frac{3-s}{s}} = \sqrt[3]{\frac{3-s}{s}}$$

$$(3) \left\{ \sqrt[3]{\frac{1+s^3}{1}} = \sqrt[3]{1+s^3} = \sqrt[3]{1+s^3} \right\}$$

$$= \sqrt[3]{1+s^3} = \sqrt[3]{1+s^3}$$

$$(4) \left\{ \sqrt[3]{\frac{5(s-2)}{s}} = \sqrt[3]{\frac{5(s-2)}{s}} = \sqrt[3]{\frac{5(s-2)}{s}} \right\}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{5(s-2)}{s}} = \sqrt[3]{\frac{5(s-2)}{s}} = \sqrt[3]{\frac{5(s-2)}{s}}$$

$$(5) \left\{ \sqrt[3]{\frac{6(4+s^2)}{4+s^2}} = \sqrt[3]{\frac{6(4+s^2)}{4+s^2}} = \sqrt[3]{\frac{6(4+s^2)}{4+s^2}} \right\}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{6(4+s^2)}{4+s^2}} = \sqrt[3]{\frac{6(4+s^2)}{4+s^2}}$$

$$(6) \left\{ \sqrt[3]{\frac{1-s^2}{1-s^2}} = \sqrt[3]{\frac{1-s^2}{1-s^2}} = \sqrt[3]{\frac{1-s^2}{1-s^2}} \right\}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{1-s^2}{1-s^2}} = \sqrt[3]{\frac{1-s^2}{1-s^2}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{1-s^2}{1-s^2}} = \sqrt[3]{\frac{1-s^2}{1-s^2}}$$

$$(7) \left\{ \sqrt[3]{\frac{1}{s}} = \sqrt[3]{\frac{1}{s}} = \sqrt[3]{\frac{1}{s}} \right\}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{1}{s}} = \sqrt[3]{\frac{1}{s}}$$

$$(٨) \left\{ (١-س) (٣-س٢) \right\} ٦ ٤ ٥$$

نضع المقدار (١-س) على صورة المقدار (٣-س٢)

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{1}{٢} (٣-س٢) (٢-س٢) \right\} ٦ ٤ ٥ &= \left\{ \frac{1}{٢} [١ + (٣-س٢)] (٣-س٢) \right\} ٦ ٤ ٥ \\ &= \left\{ \frac{1}{٢} (٣-س٢) + (٣-س٢) \right\} ٦ ٤ ٥ \\ &= \left\{ \frac{(٣-س٢)}{٢ \times ٨} + \frac{(٣-س٢)}{٢ \times ٩} \right\} ٦ ٤ ٥ + \text{ث} \end{aligned}$$

ملاحظة : المقدار المضاف = المقدار الأصلي - المقدار المغل

$$(٩) \left\{ \frac{(١-س٢)}{(٣+س٤)} \right\} ٦ ٤ ٥ = \left\{ \frac{(٢-س٤)}{(٣+س٤)} \right\} ٦ ٤ ٥ = \left\{ \frac{٥-(٣+س٤)}{(٣+س٤)} \right\} ٦ ٤ ٥$$

المقدار المضاف = ٥- = (٣+) - ٢-

$$\begin{aligned} \frac{1}{٢} (٣+س٤) - \frac{1}{٢} (٣+س٤) &= \frac{1}{٢} (٣+س٤) ٥ - \frac{1}{٢} (٣+س٤) ٢ \\ &= \left\{ \frac{(٣+س٤)}{٤ \times ٢-} \times ٥ - \frac{(٣+س٤)}{٤ \times ٢-} \right\} ٦ ٤ ٥ + \text{ث} \\ &= \left\{ \frac{٥}{٢(٣+س٤)١٢} - \frac{١}{٢(٣+س٤)٨} \right\} ٦ ٤ ٥ + \text{ث} \end{aligned}$$

ملاحظات :

١- إذا كتبت الدالة المراد تكاملها مكونة من بسط ومقام والمقام مكون من حد واحد فقط - فأتينا نقسم حدود البسط على المقام ثم نجرى عملية التكامل.

أمثلة :

$$(١) \left\{ \frac{٣+س٢}{س} \right\} ٦ ٤ ٥ = \left\{ \frac{٣}{س} + \frac{س٢}{س} \right\} ٦ ٤ ٥ = \left\{ \frac{٣}{س} + س \right\} ٦ ٤ ٥$$

$$(٢) \left\{ \frac{١-(١+س)}{س٣} \right\} ٦ ٤ ٥ = \left\{ \frac{١-١-س}{س٣} \right\} ٦ ٤ ٥ = \left\{ \frac{-س}{س٣} \right\} ٦ ٤ ٥ = \left\{ -\frac{١}{س٢} \right\} ٦ ٤ ٥$$

$$(٣) \left\{ \frac{١(س-١)}{س٧} \right\} ٦ ٤ ٥ = \left\{ \frac{١-س}{س٧} \right\} ٦ ٤ ٥ = \left\{ \frac{١}{س٧} - \frac{س}{س٧} \right\} ٦ ٤ ٥$$

$$= \left\{ \frac{١}{س٧} - \frac{س}{س٧} \right\} ٦ ٤ ٥$$

٢- إذا كانت الدالة المراد تكاملها مكونة من بسط ومقام وكان المقام مكون من أكثر من حد فأتنا تلجا إلى تحليل البسط والمقام والاختصار لتحويل المقام إلى حد واحد فقط ثم نجرى عملية التكامل .

أمثلة :

$$(1) \int \frac{x^2 - 1}{x^3 + x + 1} dx$$

$$= \int \frac{(x^2 - 1)(x^3 + x + 1)}{(x^3 + x + 1)^2} dx =$$

$$= \int \frac{(x^2 - 1)(x^3 + x + 1)}{(x^3 + x + 1)^2} dx =$$

$$= \int \frac{x^5 - x^3 + x^2 - x}{(x^3 + x + 1)^2} dx$$

$$(2) \int \frac{x^2 - 1}{x^3 + x + 1} dx$$

$$= \int \frac{(x^2 - 1)(x^3 + x + 1)}{(x^3 + x + 1)^2} dx = \int \frac{x^5 - x^3 + x^2 - x}{(x^3 + x + 1)^2} dx$$

$$(3) \int \frac{(x^3 + 1)^2}{x^3} dx$$

$$= \int \frac{(x^3 + 1)^2}{x^3} dx = \int \frac{x^6 + 2x^3 + 1}{x^3} dx$$

$$(4) \int \frac{(x^2 - 1)(x^2 - \sqrt{x})}{(x^2 - \sqrt{x})^2} dx$$

$$= \int \frac{(x^2 - 1)(x^2 - \sqrt{x})}{(x^2 - \sqrt{x})^2} dx = \int \frac{x^4 - x^2 - x^{\frac{5}{2}} + x^{\frac{3}{2}}}{(x^2 - \sqrt{x})^2} dx$$

$$= \int \frac{x^4 - x^2 - x^{\frac{5}{2}} + x^{\frac{3}{2}}}{(x^2 - \sqrt{x})^2} dx =$$

$$= \int \frac{x^4 - x^2 - x^{\frac{5}{2}} + x^{\frac{3}{2}}}{(x^2 - \sqrt{x})^2} dx$$

٣- إذا كانت الدالة المراد تكاملها محتوية على جذور تربيعية للمتغير س في المقام المكون من حدين أو أكثر فأتنا نضرب كلا من البسط والمقام في مرافق الجذر للتخلص من الجذور في المقام .

أمثلة:

$$(1) \left\{ \frac{س}{\sqrt{س} - 2 + \sqrt{س}} \right\}$$

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{س} + 2 + \sqrt{س}} \times \frac{\sqrt{س} + 2 + \sqrt{س}}{\sqrt{س} - 2 + \sqrt{س}} \right\}$$

$$\left\{ \frac{1}{2} = س \frac{\sqrt{س} + 2 + \sqrt{س}}{س - 2 + س} \right\} =$$

$$\left\{ \frac{1}{2} = س \frac{2 + 2\sqrt{س}}{س} + س \frac{1}{2} \right\} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{س} + \frac{1}{2} \times س = \frac{2}{س} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{2}{س} + \frac{1}{2}$$

$$(2) \left\{ \frac{\sqrt{س} (1 - س)}{1 - \sqrt{س}} \right\}$$

$$\left\{ \frac{\sqrt{س} (1 - س) (1 + \sqrt{س})}{(1 - \sqrt{س}) (1 + \sqrt{س})} \right\} = \frac{\sqrt{س} (1 - س) (1 + \sqrt{س})}{1 - س}$$

$$= \frac{1}{2} س + \frac{2}{3} س + \frac{1}{3} س = \frac{1}{2} س + \frac{2}{3} س + \frac{1}{3} س = \frac{2}{3} س + \frac{1}{2} س$$

تمرین (۹)

❖ احسب التكاملات الآتية:

- (۱) $\int \frac{5}{x} dx$
- (۲) $\int \frac{e}{x} dx$
- (۳) $\int \frac{1}{x^2} dx$ حيث a, b ثابتان
- (۴) $\int (3x^2 - 1) dx$
- (۵) $\int (4x^2 - 6x + 8) dx$
- (۶) $\int (2x^2 - 6x + 8 + 1) dx$
- (۷) $\int (x-2)(x+1)(x-1) dx$
- (۸) $\int \frac{x^2 + x}{x} dx$
- (۹) $\int (x-1)(x-b) dx$ حيث a, b ثابتان
- (۱۰) $\int (\sqrt{x} + 1) dx$
- (۱۱) $\int \frac{1+x}{\sqrt{x}} dx$
- (۱۲) $\int (x + \frac{1}{x}) dx$
- (۱۳) $\int (1 - \sqrt{x}) dx$
- (۱۴) $\int \frac{e}{\sqrt{x}} dx$
- (۱۵) $\int (x^2 - 3) dx$
- (۱۶) $\int (x-2) dx$
- (۱۷) $\int \left[\frac{x+2}{3} \right]^{\frac{1}{2}} dx$
- (۱۸) $\int (x^2 + 2) dx$
- (۱۹) $\int (\sqrt{x} + 7) dx$
- (۲۰) $\int \frac{5}{(1-x^2)} dx$
- (۲۱) $\int \frac{e}{\sqrt{(9+x)}} dx$
- (۲۲) $\int (1 - \frac{3}{x}) dx$
- (۲۳) $\int \frac{27 - x^2}{3-x} dx$
- (۲۴) $\int \sqrt{\frac{3}{x} - \frac{2}{x}} dx$
- (۲۵) $\int \sqrt{(11+x^2)(11+x^2)} dx$

تکامل بعض الدوال المثلثية

۱. $\{ \text{حاس} . \text{عس} \} = - \text{حتاس} + \text{ث}$
۲. $\{ \text{حا} (\text{اس} + \text{ب}) \text{عس} \} = - \frac{\text{حتا} (\text{اس} + \text{ب})}{1} + \text{ث}$
۳. $\{ \text{حاس اس} \text{عس} \} = - \frac{\text{حتا اس}}{1} + \text{ث}$
۴. $\{ \text{حتاس عس} \} = \text{حاس} + \text{ث}$
۵. $\{ \text{حتا} (\text{اس} + \text{ب}) \text{عس} \} = \frac{\text{حا} (\text{اس} + \text{ب})}{1} + \text{ث}$
۶. $\{ \text{حتا اس عس} \} = \frac{\text{حاس}}{1} + \text{ث}$
۷. $\{ \text{قا'س عس} \} = \text{طاس} + \text{ث}$
۸. $\{ \text{قا' اس عس} \} = \frac{\text{طاس}}{1} + \text{ث}$
۹. $\{ \text{قا' (اس + ب) عس} \} = \frac{\text{طا} (\text{اس} + \text{ب})}{1} + \text{ث}$

ملحوظة:

- (۱) $\text{جا'س} + \text{جتا'س} = ۱$
- (۲) $۱ + \text{طا'س} = \text{قا'س}$
- (۳) $۱ + \text{طا'س} = \text{قا'س}$
- (۴) $۱ + \text{ظتا'س} = \text{قتا'س}$
- (۵) $\text{حا}^۲ \text{س} = ۲ \text{حاس} \text{حتاس}$
- (۶) $\text{حتا}^۲ \text{س} = \text{حتا'س} - \text{حا'س} = ۲.۱ - \text{حا'س} = ۲ \text{حتا'س} - ۱$
- (۷) $\text{حا'س} = ۱ - \text{جتا'س} = \frac{1}{1} - \frac{1}{1} = \text{جتا'س}$
- (۸) $\text{حتا'س} = ۱ - \text{حا'س} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = \text{جتا'س}$

امثلة:

- (۱) $\{ ۱ + \text{طا'س}^۲ \text{عس} \} =$
- $\{ \text{قا}^۲ \text{س} . \text{عس} \} = \frac{\text{طا}^۲ \text{س}}{1} + \text{ث}$

$$(۲) \left\{ \frac{\text{ح}^۱ \text{س}}{۱ - \text{حتاس}} \text{ء س} \right\}$$

$$\left\{ \frac{۱ - \text{حتا}^۲ \text{س}}{۱ - \text{حتاس}} \text{ء س} \right\} = \left\{ \frac{(۱ - \text{حتاس})(\text{حتاس} + ۱)}{(۱ - \text{حتاس})} \text{ء س} \right\} =$$

$$\left\{ (۱ + \text{حتاس}) \text{ء س} = \text{س} + \text{حاس} + \text{ث} \right\}$$

$$(۳) \left\{ \frac{\text{حتا}^۲ \text{س}}{\text{حتاس} + \text{حاس}} \text{ء س} \right\}$$

$$\left\{ \frac{\text{حتا}^۲ \text{س} - \text{حا}^۱ \text{س}}{\text{حتاس} + \text{حاس}} \text{ء س} \right\} = \left\{ \frac{(\text{حتاس} - \text{حاس})(\text{حتاس} + \text{حاس})}{(\text{حتاس} + \text{حاس})} \text{ء س} \right\} =$$

$$\left\{ (\text{حتاس} - \text{حاس}) \text{ء س} = \text{حاس} + \text{حتاس} + \text{ث} \right\}$$

$$(۴) \left\{ \frac{۳}{۱ - \text{حا}^۲ \text{س}} \text{ء س} \right\}$$

$$\left\{ \frac{۳}{\text{حتا}^۲ \text{س}} \text{ء س} \right\} = \left\{ ۳ \text{قا}^۲ \text{س}^۲ \text{ء س} = \frac{۳}{۴} \text{طا}^۲ \text{س} + \text{ث} \right\}$$

$$(۵) \left\{ (۱ - \text{حا}^۲ \text{س}) \text{ء س} \right\}$$

$$\left\{ \text{حتا}^۲ \text{س} \text{ء س} = \frac{۳}{۴} \text{حا}^۲ \text{س} + \text{ث} \right\}$$

$$(۶) \left\{ \frac{\text{حا}^۲ \text{س}}{۱ + \text{حتاس}} \text{ء س} \right\}$$

$$\left\{ \frac{۱ - \text{حتا}^۲ \text{س}}{۱ + \text{حتاس}} \text{ء س} \right\} = \left\{ \frac{(۱ - \text{حتاس})(\text{حتاس} + ۱)}{(۱ + \text{حتاس})} \text{ء س} \right\} =$$

$$\left\{ (۱ - \text{حتاس}) \text{ء س} = \text{س} + \text{حاس} + \text{ث} \right\}$$

$$(۷) \left\{ \frac{\text{حا}^۲ \text{س}}{\text{حتاس}} \text{ء س} \right\}$$

$$\left\{ \frac{۲ \text{حاس} \text{حتاس}}{\text{حتاس}} \text{ء س} \right\} = \left\{ ۲ \text{حاس} \text{ء س} = ۲ - \text{حتاس} + \text{ث} \right\}$$

$$(۸) \left\{ \text{طا}^۱ \text{س} \text{ء س} \right\}$$

$$\left\{ (۱ - \text{قا}^۲ \text{س}) \text{ء س} = \text{طاس} - \text{س} + \text{ث} \right\}$$

$$(۹) \left\{ (۱ - \text{حا}^۲ \text{س}) \text{عس} \right\}$$

$$= \left\{ \text{جتا}^۲ \text{س} \text{س} = \left(\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} \text{جتا}^۲ \text{س} \right) \text{س} \right\}$$

$$= \frac{۱}{۲} \text{س} + \frac{۱}{۲} \text{جا}^۲ \text{س} + \text{ث}$$

$$(۱۰) \left\{ ۲ \text{جا}^۲ \text{س} \text{عس} \right\}$$

$$= \left\{ ۲ \left(\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} \text{جتا}^۲ \text{س} \right) \text{عس} \right\}$$

$$= \left\{ (۱ - \text{جتا}^۲ \text{س}) \text{عس} = \text{س} - \frac{۱}{۲} \text{حا}^۲ \text{س} + \text{ث} \right\}$$

تمرین (۱۰)

❖ أوجد التكاملات الآتية:-

$$(۱) \int ۴ \text{حاس} \text{جتاس} \text{عس}$$

$$(۲) \int \text{حا} \frac{۱}{۴} \text{س} \text{عس}$$

$$(۳) \int \text{جتا} \frac{۱}{۵} \text{س} \text{عس}$$

$$(۴) \int \text{قا}^۲ \text{س} \text{عس}$$

$$(۵) \int \text{حا} \left(۱ + \frac{۱}{۵} \text{س} \right) \text{عس}$$

$$(۶) \int \text{جتا} (۱ - \text{س}^۳) \text{عس}$$

$$(۷) \int \text{قا}^۲ \left(۱ - \frac{۱}{۵} \text{س} \right) \text{عس}$$

$$(۸) \int [\text{حا} (۱ + \text{س}^۴) + \text{جتا} (۱ + \text{س}^۴)] \text{عس}$$

$$(۹) \int [۸ \text{جتاس} - ۴ \text{قا}^۲ \text{س}] \text{عس}$$

$$(۱۰) \int [۶ \text{جتاس} - ۲ \text{قا}^۲ \text{س}] \text{عس}$$

$$(۱۱) \int \text{جتا} (۳ + \text{س}^۵) \text{عس}$$

$$(۱۲) \int \frac{\text{س} \text{جتاس} + ۲ \text{جتاس}}{۲ + \text{س}} \text{عس}$$

بعض تطبيقات التكامل

درسنا كيف نجرى عملية التفاضل لدالة ما . أي إيجاد ميل المماس لهذه الدالة وعرفنا أن التكامل هو العملية العكسية للتفاضل أي أنه إذا علم ميل المماس لمنحنى فبانه يمكن إيجاد معادلة هذا المنحنى بإجراء عملية التكامل لميل المماس .

إذا كان ميل المماس لمنحنى هو $\frac{v}{u} = m$ فإن معادلة المنحنى هي:

$v = m \cdot u$ ويمكن تعيين ثابت التكامل بمعرفة شروط معينة .

مثال: إذا كان ميل المنحنى عند أي نقطة عليه (س، ص) هو $2s + 9$ - أوجد معادلة المنحنى علماً بأنه يمر بالنقطة (٥، ١) .

الحل

$$\therefore \frac{v}{u} = 2s + 9$$

$$\therefore v = (2s + 9) \cdot u \quad \text{والتعيين الثابت ث}$$

ولتعين الثابت ث : المنحنى يمر بالنقطة (٥، ١) تحقق معادلته

$$\therefore 5 = 1 + 9 + \text{ث} \quad \therefore \text{ث} = -5$$

$$\therefore \text{معادلة المنحنى } v = s^2 + 9s - 5$$

مثال: أوجد معادلة المنحنى الذي يمر بالنقطة (١، -٦) وميل المماس له عند أي نقطة عليه يساوي (٢+س) (٣-س) .

الحل

$$\frac{v}{u} = (2+s)(3-s) = s^2 + 3s - 6$$

$$\therefore v = (s^2 + 3s - 6) \cdot u \quad \text{والتعيين الثابت ث}$$

ولتعين الثابت ث المنحنى يمر بالنقطة (١، -٦) تحققه

$$\therefore -6 = 1 + 3 + \text{ث} \quad \therefore \text{ث} = -10$$

$$\therefore \text{معادلة المنحنى } v = s^2 + 3s - 10$$

مثال: ميل منحنى ما عند أي نقطة عليه يتناسب طرئياً مع مربع الحداثي السيني للنقطة - فإذا كان الميل عند النقطة (١، ٣) الواقعة على المنحنى هو ٦ - فأوجد معادلة المنحنى .

الحل

∴ ميل المنحنى $\frac{عص}{عس} \propto س^1$ ∴ $\frac{عص}{عس} = س^1$ حيث أ ثابت

$$ع = \left[\frac{عص}{عس} \right] \quad ∴ ٦ = ١ \quad ∴ ٦ = \frac{عص}{عس}$$

$$∴ ص = ٦ س^1 \cdot عس \quad ∴ ص = ٢ س^2 + ث$$

∴ المنحنى يمر بالنقطة (٣، ١) ∴ $٣ = ٢ + ث$ ∴ $١ = ث$

$$∴ معادلة المنحنى $ص = ٢ س^2 + ١$$$

مثال: إذا علم أن $\frac{ع^1ص}{عس} = ٦$ وكان لمنحنى الدالة $ص = د(س)$ نقطة انقلاب هي (٢، ١) وقيمة

عظمى محلية عند $س = ١$ - أوجد معادلة المنحنى .

الحل

$$\frac{ع^1ص}{عس} = ٦ \quad عس = ٦ + ث \quad ث = نقطة انقلاب (٢، ١)$$

$$٠ = ٦ + ث \quad ٠ = ث \quad ∴ ٦ = ث$$

$$∴ \frac{ع^1ص}{عس} = ٦ - ٦ س \quad ∴ \left[\frac{ع^1ص}{عس} \right] = ٦ - ٦ س$$

$$∴ \frac{عص}{عس} = ٣ س^2 - ٦ س + ث \quad ∴ \left[\frac{عص}{عس} \right] = ١ - ٠ = ٠$$

$$∴ ٠ = ٩ + ث \quad ∴ ٩ = ث \quad ∴ ٣ س^2 - ٦ س + ٩ = \frac{عص}{عس}$$

$$ص = (٣ س^2 - ٦ س + ٩) عس = ٣ س^3 - ٦ س^2 + ٩ س + ث$$

$$(٢، ١) \text{ تحقق المعادلة } ∴ ٢ = ١١ + ث \quad ∴ ث = ١٢$$

$$∴ ص = ٣ س^3 - ٦ س^2 + ٩ س + ١٢$$

مثال: أوجد معادلة المنحنى الذي يمر بالنقطة (٣، ١-) وميل المماس له عند أى نقطة (س، ص)

عليه يساوى $\frac{١-س٤}{ص٢}$

الحل

$$\frac{١-س٤}{ص٢} = \frac{عص}{عس} \quad ∴ \left[\frac{١-س٤}{ص٢} \right] = ص \cdot عس$$

$$ص = ١ - ٢ س^2 - س + ث \quad \text{لتعيين الثابت يمر بالنقطة (٣، ١-)}$$

$$٦ = ث \quad ∴ ٩ = ١ + ٢ + ث$$

$$∴ معادلة المنحنى $ص = ١ - ٢ س^2 + س + ٦$$$

مثال: خزان مياه على شكل متوازي مستطيلات أبعاده ١، ٢، ٣ متر يصب فيه الماء بمعدل $(1+2n)$ م^٣ / دقيقة - أوجد الزمن الذي يمتلئ بعده الخزان .

الحل

نفرض أن حجم الخزان ح

$$، \therefore \text{الماء يصب فيه بمعدل } (1+2n) \text{ م}^3 \text{ / دقيقة} \therefore \frac{H}{n} = (1+2n)$$

$$\text{بإجراء التكامل } \left\{ \frac{H}{n} = (1+2n) \right\} \Rightarrow H = n(1+2n)$$

$$\therefore H = \frac{2n^2}{2} + n + C \text{ أي أن } H = n^2 + n + C$$

ولكن عند بدء الصب فإن $n = 0$ صفر كلن $H = 0$

$$\therefore 0 = 0 + 0 + C \therefore C = 0$$

$$\therefore H = n^2 + n \text{ وعندما يمتلئ الخزان فإن حجم الماء } H = 6$$

$$\therefore 6 = n^2 + n \therefore n^2 + n - 6 = 0$$

$$\therefore (n-2)(n+3) = 0 \therefore n = 2, n = -3 \therefore \text{يمتلئ الخزان بعد } 2 \text{ دقيقة .}$$

مثال: إذا كان ميل المماس $m =$ حتا من للمنحنى عند أي نقطة (m, s) - فأوجد معادلة المنحنى إذا كان يمر بنقطة الأصل .

الحل

$$\therefore m = \frac{ds}{ds} = \text{حتا س}$$

$$\therefore s = \text{حتا س} \Rightarrow \text{حتا س} = s + C$$

$$، \therefore \text{المنحنى يمر بالنقطة } (0,0) \therefore 0 = 0 + C$$

$$\therefore C = 0 \therefore \text{المعادلة هي } s = s + C$$

مثال: معدل تغير ميل المماس لمنحنى $= 2(s-5)$ - فأوجد معادلة المنحنى إذا علم أنه يمر بالنقطتين $(5,1)$ ، $(2,-3)$.

الحل

$$\therefore \frac{dm}{ds} = 2(s-5) \therefore m = s^2 - 10s + C$$

$$ص = s^2 - 10s + C \therefore \text{المنحنى يمر بالنقطة } (5,1) \therefore 1 = 25 - 50 + C$$

$$\therefore C = 24 \therefore 1 = 25 - 50 + 24 \therefore 1 = 1 \therefore (1) \text{ ---}$$

$$، \therefore \text{المنحنى يمر بالنقطة } (2,-3) \therefore -3 = 4 - 20 + C$$

$$\therefore C = 13 \therefore -3 = 4 - 20 + 13 \therefore -3 = -3 \therefore (2) \text{ ---}$$

$$\text{بالطرح } \therefore 1 = 1 \therefore 0 = 0 \therefore 1 = 1$$

تمرين (١١)

(١) أوجد الدالة التي مشتقتها الأولى تساوي $2-3س^2 + 2س^3$ حيث $س \neq ٠$ علماً بأن الدالة تساوي ٢ عندما $س = \frac{1}{3}$

(٢) أوجد الدالة التي مشتقتها الأولى تساوي $\frac{٨س^٢-١}{١-٢س}$ حيث $س \neq \frac{1}{3}$ علماً بأن الدالة تساوي ١٠ عندما $س = ١$

(٣) إذا كانت $\frac{٦ص}{٦س} = ١٢س^٠ - ٤٩(٧س-١٢)^١$ وكانت $ص = ٠$ عندما $س = ٢$ - فأوجد $ص$ بدلالة $س$.

(٤) إذا كانت $\frac{٦ص}{٦س} = \frac{٧+٢س}{٣-٢ص}$ وكانت $ص = ٣$ عندما $س = ١$ - فأوجد العلاقة بين $س$ ، $ص$.

(٥) أوجد معادلة المنحنى الذي يمر بالنقطة $(\frac{1}{3}, ٣)$ وميل المماس عند أي نقطة عليه هو $(١ - \frac{٢}{٣س})$ حيث $س \neq ٠$

(٦) منحنى ميل المماس له عند أي نقطة عليه $(س، ص)$ يساوي $\frac{س}{ص}$ أوجد معادلته إذا علم أنه يمر بالنقطة $(٣، ٢)$.

(٧) منحنى ميل المماس له عند أي نقطة عليه إحداثيها السيني $س$ هو $٣س^٢ - ٦س - ٢$ - أوجد معادلته إذا علم أنه يمر بالنقطة $(٣، ٢)$.

(٨) منحنى ميل العمودي عند أي نقطة عليه إحداثيها السيني $س$ هو $\frac{١-٦س}{٦س}$ أوجد معادلته إذا علم أنه يمر بالنقطة $(٤، ٥)$.

(٩) منحنى ميل العمودي عند أي نقطة عليه $(س، ص)$ هو $٣ - ٢س$ أوجد معادلته إذا كان يمر بالنقطة $(١، ٣)$.

(١٠) منحنى يمر بالنقطة $(٠، ١)$ وميله عند أي نقطة عليه يساوي $(٢س - \frac{1}{3س})$ أوجد معادلة كل من المماس والعمودي للمنحنى عند النقطة التي إحداثيها السيني ٣.

(١١) منحنى يمر بالنقطة (١٠، ٠) وميل المماس له عند أي نقطة عليه يساوي $3(s^2 - 6s + 5)$ - أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية له.

(١٢) إذا كان ميل منحنى عند أي نقطة عليه يتعين بالعلاقة $\frac{6s}{s^2} = s^2 + 2s - 8$ وللمنحنى قيمة عظمى محلية تساوي $26\frac{2}{3}$ - فأوجد القيمة الصغرى المحلية له.

(١٣) إذا كان ميل منحنى عند أي نقطة عليه هو $3(s-1)(s+1)$ وله قيمة صغرى محلية تساوي -٢. فأوجد القيمة العظمى المحلية له.

(١٤) إذا كان معدل التغير تحت تأثير الحرارة في مساحة صفيحة م من المعدن بالنسبة للزمن يتعين بالعلاقة $\frac{d^2}{dt^2} = 0.015t^2 + 0.02t$ حيث م المساحة بالمتر المربع، ن الزمن بالدقيقة - فأوجد مساحة الصفيحة قبل بدء التسخين مباشرة إذا علم أن: $m = 90$ متراً مربعاً عندما $t = 10$ دقائق.

(١٥) في تجربة ما كان معدل التغير في حجم كمية من الغاز ح (مقدرة بالمتر المكعب) بالنسبة للضغط الواقع عليها ص (مقدرة بالنيوتن / متر مربع) يعطى بالعلاقة $\frac{dV}{dP} = \frac{C}{V}$ وكان $C = 12m^2$ عندما $V = \frac{1}{4}$ نيوتن / م^٢ - أوجد العلاقة بين الحجم والضغط.

(١٦) يقوم مجموعة من العمال بحفر حفرة من التراب فإذا كان معدل حجم التراب المرفوع بالمتر المكعب في الساعة يتعين بالعلاقة $\frac{dV}{dt} = 10 - \frac{2}{3}t$ ، أحسب حجم التراب المرفوع في ٣ ساعات.

(١٧) اشتركت متسابقان لمدة أربع دقائق في الكتابة على الآلة الكاتبة فكانت سرعة المتسابقة الأولى تعطى من العلاقة $\frac{dK}{dt} = 6t^2 + 12t + 10$ كلمة / دقيقة حيث ك عدد الكلمات التي تكتبها خلال ومن ن دقيقة وسرعة المتسابقة الثانية تعطى من العلاقة $\frac{dL}{dt} = 6t^2 + 10t + 85$ كلمة / دقيقة حيث ل عدد الكلمات التي تكتبها خلال زمن ن دقيقة - أي المتسابقتين تكتب كلمات أكثر من الأخرى .

إجابات التمارين

أولاً: إجابة تمارين العبر

تصويص (١)

$$(١) \quad \therefore \text{ن} = 4 \quad 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

$$\therefore \text{ن} = 4 \quad \text{ن} = 4$$

$$\therefore 24 = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$(٢) \quad \therefore 4! = 24 = 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$\therefore 4! = 24 = 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$\therefore 4! = 24 = 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$24 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 =$$

$$(٣) \quad \therefore 4! = 24 = 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$\therefore \frac{4!}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 1$$

$$\therefore \frac{4!}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 1$$

$$\therefore 4! = 24 = 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$\therefore 4! = 24 = 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$\therefore 4! = 24 = 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$\therefore 4! = 24 = 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$\therefore 4! = 24 = 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$(٤) \quad \therefore 4! = 24 = 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$\therefore 4! = 24 = 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$\therefore 4! = 24 = 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$\therefore 4! = 24 = 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$\therefore 4! = 24 = 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$\therefore 4! = 24 = 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$\text{المقدار} = 4! + 3! + 2! + 1!$$

$$4! + 3! + 2! + 1! = 24 + 6 + 2 + 1 =$$

$$33 = 24 + 6 + 2 + 1 =$$

$$(٥) \quad \therefore 33 = 24 + 6 + 2 + 1 =$$

$$4! + 3! + 2! + 1! =$$

$$\therefore 4! = 24 = 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$\therefore 4! = 24 = 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$\therefore 4! = 24 = 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$\therefore 4! = 24 = 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$\therefore 4! = 24 = 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$33 = 24 + 6 + 2 + 1 =$$

$$(٦) \quad \text{الطرف الأيسر} = 4! + 3! + 2! + 1! =$$

$$\frac{4!}{4 \times 3 \times 2 \times 1} + \frac{3!}{3 \times 2 \times 1} + \frac{2!}{2 \times 1} + \frac{1!}{1} =$$

$$1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$\text{الطرف الأيسر} = 4! + 3! + 2! + 1! =$$

$$\left(\frac{4!}{4 \times 3 \times 2 \times 1} + \frac{3!}{3 \times 2 \times 1} + \frac{2!}{2 \times 1} + \frac{1!}{1} \right) =$$

$$\text{الطرف الأيمن} = 4! + 3! + 2! + 1! =$$

$$\therefore [1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1)] = \frac{n!}{n}$$

$$[1 \times (1-n) \times \dots \times 2 \times 1] = \frac{n!}{n} \times$$

$$\therefore \frac{n!}{n} \times [(1-n) \times \dots \times 5 \times 3 \times 1] = \frac{n!}{n}$$

$$(11) \therefore \text{محل} = 360$$

$$\therefore \text{محل} = 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 360$$

$$\therefore \text{محل} = 6 \text{ ---- (1)}$$

$$\therefore \text{محل} = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 =$$

$$7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 =$$

$$\therefore \text{محل} = 7$$

$$\therefore \text{محل} = 7 \text{ ---- (2)}$$

$$\text{بطرح (1) من (2)} \therefore \text{محل} = 1$$

$$\text{من (1)} \therefore \text{محل} = 0$$

$$\therefore \text{محل} = 1 \text{ محل} = 0$$

$$(12) \text{ محل} = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 = 362880$$

$$\therefore \frac{1}{1+r-6} \times 4 = \frac{1}{r-6}$$

$$\therefore \frac{1}{r-6} (r-7) = \frac{1}{r-6}$$

$$\therefore r-7 = 1 \therefore r = 8$$

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} = \text{المقدار}$$

$$\frac{1}{12} + \frac{3}{48} + \frac{4}{60} =$$

$$(7) \therefore \frac{72}{5} = \frac{1+n^2}{4-n^2} \div \frac{1+n^2}{3-n^2}$$

$$\therefore \frac{72}{5} = \frac{1+n^2}{4-n^2} \times \frac{3-n^2}{1+n^2}$$

$$\therefore \frac{72}{5} = \frac{3-n^2}{1+n^2} \times \frac{1+n^2}{4-n^2}$$

$$\therefore \frac{72}{5} = \frac{3-n^2}{1+n^2} \times \frac{1+n^2}{4-n^2}$$

$$\therefore \frac{72}{5} = \frac{3-n^2}{4-n^2}$$

$$\therefore 216 + 4n^2 = 10 + 3n^2$$

$$\therefore 216 = 10 + 3n^2 - 4n^2$$

$$\therefore 216 = 10 - n^2$$

$$\therefore (n-27)(4-n) = 0$$

$$n = 4 \text{ أو } n = 27 \text{ مرفوض}$$

$$\therefore \frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = \frac{1}{24}$$

$$\therefore \frac{1}{24} = \frac{1}{24}$$

$$(8) \therefore 1 \text{ محل} = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 = 362880$$

$$\therefore 1 \text{ محل} = 1 \text{ محل} = 1$$

$$\therefore 720 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$$

$$(9) \therefore 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 8 \times 9 \times 10 = 362880$$

$$(10 \times 8 \times 6 \times 4 \times 2) \times (9 \times 7 \times 5 \times 3 \times 1) =$$

$$(5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) \times (9 \times 7 \times 5 \times 3 \times 1) =$$

$$5 \times (9 \times 7 \times 5 \times 3 \times 1) =$$

$$(10) \therefore 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times 8 \times 9 \times 10 = 362880$$

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times 8 \times 9 \times 10 =$$

$$[(1-n^2) \times \dots \times 5 \times 3 \times 1] =$$

$$[n^2 \times (2-n^2) \times \dots \times 4 \times 2] \times$$

$$4840 = \frac{17 \times 18 \times 19 \times 20}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 20 \text{ ق} [ب]$$

$$20 \text{ ق} = 17 \text{ ق} [ج]$$

$$1140 = \frac{18 \times 19 \times 20}{1 \times 2 \times 3} =$$

$$100 \text{ ق} = 100 \text{ ق} [د]$$

$$490 = \frac{99 \times 100}{1 \times 2} =$$

$$435 = 2 \text{ ق} \therefore (2)$$

$$435 = \frac{2 \text{ ل}}{2} \therefore$$

$$435 = \frac{2 \text{ ل}}{1 \times 2} \therefore$$

$$29 \times 30 = 870 = 2 \text{ ل} \therefore$$

$$30 = \text{ن} \therefore 2 \text{ ل} = 2 \text{ ل} \therefore$$

$$20 \times \frac{1}{3} = 2 \text{ ق} \therefore (3)$$

$$20 \times \frac{91}{3} = 2 \text{ ق} \therefore$$

$$20 \times \frac{91}{3} = \frac{2 \text{ ل}}{3} \therefore$$

$$20 \times \frac{91}{3} = \frac{2 \text{ ل}}{1 \times 2 \times 3} \therefore$$

$$20 \times \frac{91}{3} \times 2 \times 3 = 2 \text{ ل} \therefore$$

$$182 = 2 \text{ ل} \therefore$$

$$182 = (2 - \text{ن}) (1 - \text{ن}) \therefore$$

$$182 = 2 + \text{ن}^2 - \text{ن} \therefore$$

$$0 = (12 + \text{ن}) (15 - \text{ن}) \therefore$$

$$\therefore \text{ن} = 15 \text{ أ، } \text{ن} = 12 \text{ مرفوض}$$

$$\frac{1+5+4}{20} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{19}{20}$$

$$(13) \therefore \text{س} = \{\text{س} : \text{س} \geq 1, \text{ط} \geq 7\}$$

$$\therefore \text{س} = \{7, 6, 5, 4, 3, 2, 1\}$$

$$\therefore \text{ص} = \{(أ, ب) : أ \neq ب\}$$

عناصر من مجموعة أزواج مرتبة

$$\therefore \text{عدد عناصر ص} = 7 \times 6 = 42$$

$$(14) \therefore \text{س} = \{\text{س} : \text{س} \geq 2, \text{ص} \geq 4\}$$

$$\therefore \text{س} = \{4, 3, 2, 1, 0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$\therefore \text{ع} = \{(أ, ب, ج) : أ \neq ب, ج \neq س\}$$

$$\{أ \neq ب \neq ج\}$$

عناصر ثلاثيات مرتبة

$$\text{عدد عناصر ع} = 4 \times 3 \times 2 = 24$$

$$(15) \therefore \text{ن} = \frac{\text{ل} - \text{ن}}{2 - \text{ن}} \div 2 \text{ ل}^{1+\text{ن}}$$

$$\therefore \text{ن} = \frac{2 - \text{ن}}{\text{ن}} \times \frac{1 + \text{ن}}{3 - 1 + \text{ن}}$$

$$\therefore \text{ن} = \frac{2 - \text{ن}}{\text{ن}} \times \frac{\text{ن} (1 + \text{ن})}{2 - \text{ن}}$$

$$\therefore \text{ن} = 6$$

$$\therefore \text{ن} = 1 + \text{ن}$$

طسول تصريحي (2)

$$(1) [1] 13 \text{ ق} = \frac{8 \times 9 \times 10 \times 11 \times 12 \times 13}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6} = 1716$$

$$\therefore \text{نق} = 1. \text{ق} = 1.$$

$$\text{ق} = 1.$$

$$3003 = \frac{11 \times 12 \times 13 \times 14 \times 15}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} =$$

$$(4) \therefore \text{ق} = 2. \text{ق} = 2.$$

$$\therefore \text{ق} = \frac{2 \text{ل}}{2}$$

$$\therefore 2 \times 3 = 2 \text{ل}$$

$$\therefore 2 = 3 - (1)$$

$$\therefore 2 \text{ل} = 2 \text{ل}$$

$$\therefore 56 = 2 \text{ق} + 2$$

$$\therefore 56 = \frac{2 \text{ل} + 2}{3}$$

$$\therefore 56 \times 1 \times 2 \times 3 = 2 \text{ل} + 2$$

$$\therefore 2 \text{ل} = 6 \times 7 \times 8 = 2 \text{ل} + 2$$

$$\therefore 8 = 2 + 6$$

$$\text{من (1)} \therefore 8 = 2 + 6 \therefore 8 = 2 + 6$$

$$\therefore 40320 = 8 = 2 + 6$$

$$(5) \therefore \text{نق} = 2. \text{ق} = 2.$$

$$\therefore 120 = \frac{2 \text{ل}}{3}$$

$$\therefore 120 \times 1 \times 2 \times 3 = 2 \text{ل}$$

$$\therefore 8 \times 9 \times 10 = 2 \text{ل}$$

$$\therefore 10 = 2 \text{ل} \therefore 2 \text{ل} = 10$$

$$\therefore 2 \text{ق} + 2 = 10 \therefore 2 \text{ق} = 8 \therefore \text{ق} = 4$$

$$1004 = \frac{16 \times 17 \times 18 \times 19 \times 20}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} =$$

$$(6) \therefore \text{نق} = 2. \text{ق} = 2.$$

$$\therefore 120 = \frac{2 \text{ل}}{3}$$

$$\therefore 120 \times 1 \times 2 \times 3 = 2 \text{ل}$$

$$\therefore 8 \times 9 \times 10 = 2 \text{ل}$$

$$\therefore 10 = 2 \text{ل} \therefore 2 \text{ل} = 10$$

$$\therefore 2 \text{ق} + 2 = 10 \therefore 2 \text{ق} = 8 \therefore \text{ق} = 4$$

$$\therefore 2 \text{ق} + 2 = 10 \therefore 2 \text{ق} = 8 \therefore \text{ق} = 4$$

$$\text{إما } 2 + 2 + 2 + 2 = 10, \text{ أو } 2 + 2 + 2 + 2 = 10$$

$$\therefore 2 \text{ق} = 10 \therefore \text{ق} = 5$$

$$\therefore 2 \text{ق} = 10 \therefore \text{ق} = 5$$

$$\therefore 2 \text{ق} = 10 \therefore \text{ق} = 5$$

$$\therefore 2 \text{ق} = 10 \therefore \text{ق} = 5$$

$$\therefore 2 \text{ق} = 10 \therefore \text{ق} = 5$$

$$(7) \text{ الأيمن} = 2 \text{ق} + 2 \text{ق} + 2 \text{ق}$$

$$\frac{\text{ل}}{1+2} + \frac{\text{ل}}{2+3} =$$

$$\frac{\text{ل}(1+2) + \text{ل}(2+3)}{1+2} =$$

$$\therefore \text{الأيمن} = \frac{\text{ل}(1+2+3)}{1+2}$$

$$\frac{\text{ل}(1+2)}{1+2} = 2 \text{ق} + 2 \text{ق} = \text{الطرف الأيسر}$$

$$(1) \text{ المقدار} = \frac{2 \text{ق} + 2 \text{ق}}{2} = \frac{2 \text{ق}}{1}$$

$$\frac{13}{6} = \frac{5-18}{6} =$$

$$\frac{1-n}{1-r} \times \frac{n}{1-r} =$$

$$\frac{n}{r} = \text{الطرف الأيسر}$$

$$\frac{r^{25} + r^{24}}{r^{23} + r^{22}} = \text{المقدار}$$

بقسمة كل من البسط والمقام على r^{22}

$$\therefore \text{المقدار} = \frac{1 + \frac{r^{25}}{r^{22}}}{\frac{r^{23}}{r^{22}} + 1} =$$

$$\text{ولكن } \frac{r^{25}}{r^{22}} = \frac{r^3}{1} = \frac{25}{4}$$

$$\text{كذلك } \frac{r^{23}}{r^{22}} = \frac{r^1}{1} = \frac{24}{3}$$

$$\therefore \text{المقدار} = \frac{1 + \frac{25}{4}}{\frac{24}{3} + 1} \text{ بالضرب } \times \frac{12}{12}$$

$$\frac{58}{9} = \frac{174}{27} = \frac{24+150}{3+24} =$$

$$(10) \therefore n : r : r^2 : r^3 = 14 : 14 : 3$$

$$\therefore \frac{14}{3} = \frac{r^3}{r}$$

$$\text{بضرب الطرف الأيمن } \times \frac{r}{r} =$$

$$\therefore \frac{14}{3} = \frac{r^3}{r} \times \frac{r}{r} =$$

$$\therefore \frac{14}{3} = \frac{r-n}{1+r} \times \frac{(1+r)-n}{2+r}$$

$$(1) \therefore \frac{14}{3} = \frac{(1+r-n)(r-n)}{(1+r)(2+r)}$$

$$(ب) \text{ الأيمن } = r^3 + r^2 + r + 1$$

$$= (r^3 + r^2) + (r + 1)$$

$$= r^{3+1} + r^{2+1} =$$

$$= r^{4+1} = \text{الأيسر}$$

$$(8) \therefore n : r : r^2 : r^3 \text{ في تتابع حسابي}$$

$$\therefore 2 \times r = r^2 + n$$

بالقسمة على r للطرفين

$$(1) \therefore \frac{r^2}{r} + \frac{n}{r} = 2$$

$$\frac{r^{2-n}}{r} = \frac{r^2}{r}$$

$$\frac{r^{4-n}}{r} = \frac{r^2}{r}$$

$$\therefore \frac{r^{5-n}}{r} = \frac{r^2}{r}$$

$$\text{من (1)} \therefore \frac{r^{5-n}}{r} + \frac{r^{5-n}}{r} = 2$$

بضرب الطرفين $\times (5-n)$

$$\therefore 12(5-n) = (5-n)^2 + 30$$

$$12 - n = 48 - 30 = 18$$

$$\therefore n = 18 - 6 = 12$$

$$0 = (14-n)(7-n)$$

$$\text{إما } n = 14 \text{ ، } n = 7$$

$$(9) \text{ الطرف الأيمن } = \frac{r^3}{r} =$$

$$\frac{1-n}{1-r} \div \frac{n}{1-r} =$$

$$= \frac{1-n}{1-r} \times \frac{1-r}{n} =$$

$$1 = \frac{14}{14} = \frac{1 + \frac{13}{14}}{1 + \frac{13}{14}}$$

∴ الطرف الأيمن $\times \frac{q_{t+1}}{q_t}$

$$1 = \frac{r_{+}^{n} q_{+}^{n}}{r_{+}^{n} q_{+}^{n}} \times \frac{r_{+}^{n} q_{+}^{n}}{r_{+}^{n} q_{+}^{n}} \therefore$$

$$r = \frac{(r-j-n)(r-j-n)}{(r+j)(r+j)} \therefore$$

$$(3+r)(4+r) = (3-r-n)(2-r-n) \therefore$$

$$rJ^{k+1} = rJ^{k-1} - \frac{1}{2} \Delta t^2 \ddot{r}^k$$

$$4 + r = 2 - r - n \therefore$$

(۲) --- $1 + r^2 = n \therefore$

بالتعويض في (١)

$$\frac{14}{3} = \frac{(1-r-r+r^2)(r-r+r^2)}{(1+r)(1+r)} \therefore$$

$$\frac{14}{2} = \frac{(0+2)(1+2)}{(1+2)(2+2)} \therefore$$

$$(30 + 11 + 7) \times = (2 + 3 + 7) \times 14 \therefore$$

$$90 + 2r^2 + r^2 = 28 + 4r + 4r^2 \therefore$$

$$\therefore 11r + 2 = 62$$

$$\therefore = (21 + 211)(2 - 2) \therefore$$

$$\therefore r = 2, \quad r = \frac{21}{11} \text{ مرفوض}$$

من (۲)

$$10 = n \therefore \quad 6 + 4 = n \therefore$$

$$10 = 2 \cdot 5$$

$$ق^1 = ق^2 = ق^3 = 4$$

$$ق^1 = ق^2 = ق^3 = 6 = \frac{2 \times 4}{1 \times 2}$$

$$\therefore (2س + 3ص) = 16س + 8ص$$

$$3ص \times 2 + 4ص \times 6 + 9ص \times 2 = 2 \times 4 + 3 \times 6$$

$$27ص + 18ص$$

$$\therefore (2س + 3ص) = 16س + 8ص$$

$$16س + 27ص + 18ص = 16س + 45ص$$

$$(4 - 13) = (13 - 2) = 0 \quad (13) - (2) = 11$$

$$+ (13) - (2) = 11$$

$$+ (13) - (2) = 11$$

$$ق^1 = ق^2 = ق^3 = 5$$

$$ق^1 = ق^2 = ق^3 = 10 = \frac{4 \times 5}{1 \times 2}$$

$$\therefore (13 - 2) = 11$$

$$+ 10 \times 127 \times 10 - 10 \times 19 \times 8$$

$$+ 10 \times 13 \times 5 - 32$$

$$\therefore (13 - 2) = 11$$

$$+ 10 \times 110 \times 8 - 10 \times 172 \times 2 + 10 \times 240 \times 2$$

$$- 32$$

$$(5 - 27) = 1س - 1ق = 1س - 1ق = 27$$

$$+ 1س - 1ق = 27$$

$$+ 1س - 1ق = 27$$

$$+ 27$$

$$ق^1 = ق^2 = ق^3 = 6$$

$$ق^1 = ق^2 = ق^3 = 15 = \frac{5 \times 6}{1 \times 2}$$

$$ق^1 = ق^2 = ق^3 = 20 = \frac{4 \times 5 \times 6}{1 \times 2 \times 3}$$

$$(27 - 1س) = 1س - 1ق = 1س - 1ق = 27$$

$$- 20س + 27 \times 2 + 15 \times 4$$

$$- 8 + 27 \times 4$$

$$(27 - 1س) = 1س - 1ق = 1س - 1ق = 27$$

$$- 8 + 27 \times 4 + 15 \times 20$$

$$(6 - 1) = 1س - 1ق = 1س - 1ق = 6$$

$$(3س) - (3ص) = 1س - 1ق = 1س - 1ق = 3$$

$$ق^1 = ق^2 = ق^3 = 4$$

$$ق^1 = ق^2 = ق^3 = 6 = \frac{2 \times 4}{1 \times 2}$$

$$(1 - 3س) = 1س - 1ق = 1س - 1ق = 1$$

$$+ 81س$$

$$(1 - 3س) = 1س - 1ق = 1س - 1ق = 1$$

$$+ 81س$$

$$(7 - \frac{3}{س}) = \frac{3}{س} - \frac{3}{س} = 0$$

$$+ (\frac{3}{س}) - (\frac{3}{س}) = 0$$

$$- (\frac{3}{س}) + (\frac{3}{س}) = 0$$

$$- (\frac{3}{س}) = 0$$

$$ق^1 = ق^2 = ق^3 = 5$$

$$ق^1 = ق^2 = ق^3 = 10 = \frac{4 \times 5}{1 \times 2}$$

$$\begin{aligned} \text{ح } r+1 &= {}^1q_r ({}^2s_r)^{-1} \left(\frac{{}^3}{s^2} \right)^{-r} \\ &= (1-)^{-r} \times {}^1q_r ({}^2s_r)^{-1} ({}^3)^{-r} (s)^{r^2-18} \\ \therefore \text{معامل ح } r+1 &= (1-)^{-r} \times {}^1q_r ({}^2)^{-r} ({}^3)^{-r} \\ \text{بوضع } r &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{معامل ح } 7 &= {}^1(1-)^{-1} \times {}^1q_6 ({}^2)^{-6} ({}^3)^{-6} \\ \text{ولكن } {}^1q_6 &= {}^1q_7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{معامل ح } 7 &= {}^1q_7 \times {}^2 \times {}^3 \times {}^4 \times {}^5 \times {}^6 \\ &= \frac{{}^7}{s^7} \times {}^1q_7 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (14) \text{ في مفكوك } &\left(\frac{{}^3}{s} - \frac{{}^1s}{s^2} \right)^{-7} \\ \text{ح } r+1 &= {}^1q_r \left(\frac{{}^1s}{s^2} \right)^{-r} \left(-\frac{{}^3}{s} \right)^{-r} \\ \therefore \text{ح } r+1 &= (1-)^{-r} \times {}^1q_r \times ({}^2)^{-r-7} ({}^3)^{-r-18} s^{r^2-18} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{معامل ح } r+1 &= (1-)^{-r} \times {}^1q_r \times {}^2 \times {}^3 \times {}^4 \times {}^5 \times {}^6 \times {}^7 \\ \text{بوضع } r &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{معامل ح } 4 &= (1-)^{-4} \times {}^1q_4 \times {}^2 \times {}^3 \times {}^4 \times {}^5 \times {}^6 \times {}^7 \\ \text{ولكن } {}^1q_4 &= {}^1q_5 \\ \therefore \text{معامل ح } 4 &= \frac{{}^5}{s^5} \times {}^1q_5 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (15) \text{ في مفكوك } &\left(s + \frac{1}{s} \right)^{-2n} \\ \text{ح } r &= {}^2nq_r (s)^{1+n-r} (1-s)^{-r-1} \\ &= {}^2nq_r (s)^{1+n-r} \\ \therefore \text{معامل ح } r &= {}^2nq_r \end{aligned}$$

$$\frac{{}^2n}{(1-r) \frac{{}^2n}{1+n-r}} =$$

$$\begin{aligned} (16) \text{ في مفكوك } &(s^2 + s^{-2})^{-2n-1} \\ \text{ح } n &= {}^{2n-1}q_n (s)^{1+n-1-2n-1} (s)^{1+n-1-2n-1} \\ &= {}^{2n-1}q_n (s)^{-2n-1} \times s^{1+n-1-2n-1} \\ &= {}^{2n-1}q_n (s)^{-2n-1} \\ \therefore \text{معامل ح } n &= {}^{2n-1}q_n = \frac{{}^2n}{(1-n) \frac{{}^2n}{1+n-n}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (17) (s+2)^0 &= s^0 + {}^2q_1 s^1 + {}^2q_2 s^2 + \dots + {}^2q_n s^n + \dots \\ &+ {}^2q_{n+1} s^{n+1} + {}^2q_{n+2} s^{n+2} + \dots \\ \text{بالطرح } &: (s+2)^0 - (s-2)^0 = \\ &= [{}^2q_1 s^1 + {}^2q_2 s^2 + {}^2q_3 s^3 + \dots + {}^2q_n s^n + \dots] \times 2 \\ &= (2 \times 10s^1 + 2 \times 10s^2 + 2 \times 10s^3 + \dots + 2 \times 10s^n + \dots) \\ &= (20s^1 + 20s^2 + 20s^3 + \dots + 20s^n + \dots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (18) (1+\sqrt{s})^1 &= 1 + {}^1q_1 \sqrt{s} + {}^1q_2 (\sqrt{s})^2 + \dots + {}^1q_n (\sqrt{s})^n + \dots \\ &+ {}^1q_{n+1} (\sqrt{s})^{n+1} + {}^1q_{n+2} (\sqrt{s})^{n+2} + \dots \\ &+ {}^1q_{n+3} (\sqrt{s})^{n+3} + \dots \\ (1-\sqrt{s})^1 &= 1 - {}^1q_1 \sqrt{s} + {}^1q_2 (\sqrt{s})^2 - {}^1q_3 (\sqrt{s})^3 + \dots \\ &+ {}^1q_{n+1} (\sqrt{s})^{n+1} - {}^1q_{n+2} (\sqrt{s})^{n+2} + \dots \\ &+ {}^1q_{n+3} (\sqrt{s})^{n+3} - \dots \\ \text{بالطرح } &: (1+\sqrt{s})^1 - (1-\sqrt{s})^1 = \\ &= [{}^1q_1 \sqrt{s} + {}^1q_2 (\sqrt{s})^2 + {}^1q_3 (\sqrt{s})^3 + \dots + {}^1q_n (\sqrt{s})^n + \dots] \times 2 \\ &= [{}^1q_1 \sqrt{s} + {}^1q_2 (\sqrt{s})^2 + {}^1q_3 (\sqrt{s})^3 + \dots + {}^1q_n (\sqrt{s})^n + \dots] \times 2 \\ &= 2 \sqrt{s} ({}^1q_1 + {}^1q_3 s + {}^1q_5 s^2 + \dots + {}^1q_n s^{n-1} + \dots) \end{aligned}$$

$$\frac{\text{س}}{\text{ص}} \times \frac{11}{22} \times 126 = \text{ح}$$

$$\frac{51.2 \text{ ص}}{32 \text{ ص}} = \text{ح}.$$

بوضع ر = ۵

$$ح = x - ق^۱(۲) - (۳)° (س)¹ (ص)²$$

$$\frac{\text{س}}{\text{ص}} \times \frac{243}{16} \times 126 =$$

$$H = \frac{153.9 \text{ س}}{8 \text{ ص}}$$

$$(4) \quad \frac{1}{2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{12} \left(\frac{3}{2}\right)^{12} = \left(\frac{2}{3}\right)^{12} \left(\frac{3}{2}\right)^{12}$$

$$= (-1)^j \times 1^j \text{ قدر } (2)^{j-1} (3)^{j-2-j} \times$$

X س ۱۲-۲۲

لإيجاد معامل s^A نضع $As = A$

$$Y = 2.7 \quad A = 27 - 12.7$$

$$\therefore \text{معامل س}^1 = (-1)^1 \times (-1)^2 \times (-1)^3 = -1$$

$$\frac{1-2}{2} \times 29 =$$

$$(5) \quad \text{ح} = 1, \text{قد} = \left(\frac{1}{2}\right)^{r-1} \left(-\frac{1}{s}\right)^r$$

$$= (1-x)^j \cdot q^{j-1} \cdot (2) \cdot (s)^{j-1} \cdot r^{j-1}$$

یوضع اُس س = ۱۱

$$11 = 22 - 20 \therefore$$

$$2 = r \therefore \quad 9 = r^3 \therefore$$

∴ معامل س = $(1 - (2)^{-2}) \times (1 - (2)^{-2})$

$$^v(\frac{1}{p})_{\tau} q' =$$

$$(6) \quad C_{r+1} = {}^{10}C_r (S)^r (S-S)^{10-r}$$

$$= (1-x)^{-1} \times \text{قرص}^{۲۰-۷}$$

بوضع أسس = ۹

$$r = 1 \therefore \quad q = 17.20 \therefore$$

$$\therefore \text{معامل س} = (1 - r_Q) \times r_Q = r_Q - r_Q^2$$

$$(7) \text{ ح } r_1 = {}^{10} \text{ ق } r_2 (s) {}^{10} \text{ ر } (-s-1) {}^2$$

$$= (1-x^8)^{28} \times (1-x^8)^{28}$$

بوضع اس س = ۴

$$z = r \therefore \quad z = r^{2-1} \therefore$$

∴ معامل $q = +q$

$$(8) \quad C_{r+1} = {}^{10}C_r \left(\frac{1}{3}\right)^r \left(\frac{2}{3}\right)^{10-r}$$

= 'قر (۳) ر (۲) (س) ۳۰-۵۰

الإيجاد الحد الخالي من س نضع أس س = صفر

$$7 = 2 \therefore \quad 1 = 25 - 20 \therefore$$

∴ الحد الخالي من س هو $7 = {}^0C_7 = ({}^7C_0) = ({}^7C_7)$

∴ الحد الخلى من س = $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

$${}^r(1 - \frac{1}{s_2})^{r-1} = {}^r q_r = {}^r h_r$$

$$= (1-x)^{-1} q^1 (2)^{-r} (s)^{r-1}$$

• لإيجاد الحد الخالي من s نضع $As = 0$.

$$r = r \therefore \quad \cdot = r^2 - 9 \therefore$$

٢٠ الحد الخالي من π هو

$$\frac{1}{\lambda} \times r_q' = r_q(2) \times r_q' \times (1 -) = , c$$

$$(10) \text{ ح ر } + = 1 \text{ ق ر } (2 \text{ س } 2) \text{ ر } - \left(\frac{2}{\text{س}} \right) \text{ ر} \\ = (1 -) \times 1 \text{ ق ر } (2) \text{ ر } - (3) \text{ ر } (2 \text{ س } 2) \text{ ر} =$$

بوضع أس س = صفر

$$\therefore 27 - 4 = 23 \quad \therefore 27 = 4 \text{ ر } \therefore \frac{27}{4} \text{ ر } = \text{ ص } +$$

\therefore لا يوجد حد خال من س

$$(11) \text{ ح ر } + = 1 \text{ ق ر } (2 \text{ س } 2) \text{ ر } - \left(\frac{1}{\text{س}} \right) \text{ ر} \\ = 1 \text{ ق ر } (2 \text{ س } 2) \text{ ر} =$$

لإيجاد معامل س نضع أس س = 1

$$13 - 3 = 10 \quad \therefore 13 = 3 \text{ ر } \therefore 4 =$$

معامل س = 1 ق ^2

$$(12) \text{ ح ر } + = 1 \text{ ق ر } (2 \text{ س } 2) \text{ ر } - \left(\frac{3}{\text{س}} \right) \text{ ر} \\ = (1 -) \times 1 \text{ ق ر } (2) \text{ ر } - (3) \text{ ر } (2 \text{ س } 2) \text{ ر} =$$

$$\text{بوضع أس س} = 6 \quad \therefore 11 - 2 = 9$$

$$\text{ر} = \frac{9}{4} \text{ ط}$$

\therefore لا يوجد حد يشتمل على س

$$(13) \text{ ح ر } + = 1 \text{ ق ر } (2 \text{ س } 2) \text{ ر } - \left(\frac{3}{\text{س}} \right) \text{ ر} \\ = 1 \text{ ق ر } (2 \text{ س } 2) \text{ ر} =$$

أولاً: بوضع أس س = 6

$$\therefore 12 - 3 = 9 \quad \therefore 12 = 3 \text{ ر } \therefore 2 =$$

$$\therefore \text{معامل س} = 1 \text{ ق }^2 = 1 \text{ ق } (2) \text{ ر } (3) \text{ ر} =$$

$$= \frac{9}{4} \times 1 \text{ ق }^2 =$$

ثانياً: بوضع أس س = صفر

$$\therefore 12 - 3 = 9 \quad \therefore 12 = 3 \text{ ر } \therefore 4 =$$

\therefore الحد الخالي من س هو ح

$$(14) \text{ ح ر } + = 1 \text{ ق ر } (2 \text{ س } 2) \text{ ر } - \left(\frac{1}{\text{س}} \right) \text{ ر}$$

$$= (1 -) \times 1 \text{ ق ر } (2 \text{ س } 2) \text{ ر} =$$

$$\text{عدد الحدود} = 15 - 1 = 16$$

رتبة الحدان الأوسطان 8، 9

$$\text{بوضع ر} = 7 \quad \therefore 1 = 8 \text{ ح} = 1 \text{ ق }^5 \text{ س} =$$

$$\text{بوضع ر} = 8 \quad \therefore 1 = 8 \text{ ح} = 1 \text{ ق }^5 \text{ س} =$$

الطرف الأيمن = أ + ب س

$$= 1 \text{ ق }^5 \text{ س} + 1 \text{ ق }^5 \text{ س} \times 1 \text{ س} =$$

$$= 1 \text{ ق }^5 \text{ س} + 1 \text{ ق }^5 \text{ س} =$$

$$\text{ولكن } 1 \text{ ق }^5 \text{ س} = 1 \text{ ق }^5 \text{ س} \quad \therefore \text{الطرف الأيمن} = 0$$

$$(15) \text{ ح ر } + = 1 \text{ ق ر } (2 \text{ س } 2) \text{ ر } - \left(\frac{3}{\text{س}} \right) \text{ ر}$$

$$= 1 \text{ ق ر } (2 \text{ س } 2) \text{ ر} =$$

لإيجاد الحد الخالي من س نضع أس س = صفر

$$5 - 7 = -2 \quad \therefore 5 = 7 \text{ ر } \therefore \frac{5}{7} \text{ ن}$$

ولكى يوجد حد خالي من س \therefore ر و ط

$$\therefore \text{ن} = 7 \quad \text{أو مكرر للعدد 7}$$

$$\text{عندما ن} = 14 \quad \therefore 10 =$$

$$\therefore \text{الحد الخالي من س} = 1 \text{ ق }^4 = 1 \text{ ق }^4 \text{ ق}^4$$

$$(16) \text{ ح ر } + = 1 \text{ ق ر } (2 \text{ س } 2) \text{ ر } - \left(\frac{1}{\text{س}} \right) \text{ ر}$$

$$= 1 \text{ ق ر } (2 \text{ س } 2) \text{ ر} =$$

لإيجاد الحد الخالي من س نضع أس س = صفر

$$\therefore 2 - 3 = -1 \quad \therefore 2 = 3 \text{ ر } \therefore \frac{2}{3} \text{ ن}$$

ولكن يوجد حد خالي من س \therefore ر و ط

\therefore يجب أن يكون مضاعف للعدد 3

$$\text{عندما ن} = 12 \quad \therefore 8 =$$

$$\therefore \text{الحد الخالي من س} = 1 \text{ ق }^2 = 1 \text{ ق }^2 \text{ ق}^2$$

طاول تفرين (5)

(1) عدد الحدود = 1 + 17 = 18

∴ رتبة الحدين الأوسطين 9، 10

$$\frac{3}{2s} \times \frac{1+r-n}{r} = \frac{1+r}{r}$$

بوضع $r = 9$

$$\frac{3}{2s} \times \frac{1+9-17}{9} = \frac{1+r}{r}$$

$$\frac{3}{2s} \times \frac{1}{9} =$$

$$\frac{3}{2s} = \frac{1+r}{r}$$

$$1 = \frac{1+r}{r} \quad \text{ولكن } 1 = \frac{1+r}{r}$$

$$1 = \frac{1+r}{r} \quad \text{∴ } 1 = \frac{1+r}{r}$$

$$\frac{1}{2} = s$$

$$(2) \quad 11520 = 128 \times 90, 10260 = 128 \times 80$$

$$13440 = 128 \times 105$$

$$\frac{3}{2s} \times \frac{1+r-n}{r} = \frac{1+r}{r}$$

بوضع $r = 3$

$$\frac{3}{2s} \times \frac{1+3-n}{3} = \frac{1+r}{r}$$

$$(1) \quad \frac{10260}{11520} = \frac{3}{2s} \times \frac{1-n}{3}$$

بوضع $r = 4$

$$\frac{3}{2s} \times \frac{1+4-n}{4} = \frac{1+r}{r}$$

$$(2) \quad \frac{13440}{10260} = \frac{3}{2s} \times \frac{1-n}{4}$$

بقسمة (2) ÷ (1)

$$\frac{11520}{10260} \times \frac{13440}{10260} = \frac{3}{2} \times \frac{1-n}{4}$$

$$\frac{13440}{10260} = \frac{(1-n)}{(2-n)}$$

$$13440(2-n) = 10260(1-n)$$

$$10 = n \quad \text{∴ } 14 - n = 24 - 10 = 14$$

بالتعويض في (1)

$$\frac{10260}{11520} = \frac{3}{2} \times \frac{1-n}{4}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{2} \times \frac{1-n}{4}$$

$$(3) \quad \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \times \frac{1-n}{4}$$

$$11520 = 128 \times 90$$

$$11520 = 128 \times 90$$

$$11520 = 128 \times 90$$

$$11520 = 128 \times 90$$

بالتعويض من (3) عن $s = 2$

$$11520 = 128 \times 90$$

$$11520 = 128 \times 90$$

$$1 \pm = s \quad \text{∴ } 1 \pm = s$$

$$(3) \quad 1080 = 128 \times 84, 720 = 128 \times 56, 240 = 128 \times 19$$

$$\frac{3}{2s} \times \frac{1+r-n}{r} = \frac{1+r}{r}$$

بوضع $r = 2$

(٤) نفرض أن رتب الحدود هي ر، ر+١، ر+٢

$$\therefore \text{ح ر} + ١ = \text{ن ق ر} \times (١) \times \text{ن-ر} \times \text{س ر}$$

$$\therefore \text{معامل ح ر} + ١ = \text{ن ق ر}$$

$$\therefore \text{معامل ح ر} = ٢٠$$

$$\therefore \text{ن ق ر} = ٢٠ \text{ — (١)}$$

$$\therefore \text{معامل ح ر} + ١ = ١٩٠$$

$$\therefore \text{ن ق ر} = ١٩٠ \text{ — (٢)}$$

$$\therefore \text{معامل ح ر} + ٢ = ١١٤٠$$

$$\therefore \text{ن ق ر} = ١١٤٠ \text{ — (٣)}$$

$$\text{بقسمة (١) } \div \text{(٢)} \therefore \frac{١٩٠}{٢٠} = \frac{\text{ن ق ر}}{\text{ن ق ر}}$$

$$\therefore \frac{١٩}{٢} = \frac{١+ر-ن}{ر}$$

$$\therefore ٢-٢١ = ٢+ر \leftarrow ١٩ = ٢-٢١$$

$$\text{بقسمة (٢) } \div \text{(٣)} \therefore \frac{١١٤٠}{١٩٠} = \frac{\text{ن ق ر}}{\text{ن ق ر}}$$

$$\therefore \frac{٦}{١+ر} = \frac{٢-ن}{١+ر}$$

$$\text{ن-ر} = ٦+ر \leftarrow ٦+ر = ن$$

بالتعويض من (٥) في (٤)

$$\therefore ٢-٢١ = (٦+ر) ٢$$

$$\therefore ٢-٢١ = ١٢+١٤$$

$$\therefore ٢ = ر \quad \therefore ١٤ = ر$$

$$\therefore ٢٠ = ٦+١٤ = ن \text{ بالتعويض في (٥)}$$

$$\therefore \frac{\text{ح}}{\text{ر}} = \frac{\text{ن-١+٢}}{٢} \times \frac{\text{ص}}{\text{س}}$$

$$\therefore \frac{٧٢٠}{٢٤٠} = \frac{\text{ص}}{\text{س}} \times \frac{١-ن}{٢} \text{ — (١)}$$

$$\text{بوضع ر} = ٢$$

$$\therefore \frac{\text{ح}}{\text{ر}} = \frac{\text{ن-١+٢}}{٢} \times \frac{\text{ص}}{\text{س}}$$

$$\therefore \frac{١٠٨٠}{٧٢٠} = \frac{\text{ص}}{\text{س}} \times \frac{٢-ن}{٣} \text{ — (٢)}$$

$$\text{بقسمة (١) } \div \text{(٢)}$$

$$\therefore \frac{٧٢٠}{٢٤٠} \times \frac{١٠٨٠}{٧٢٠} = \frac{١-ن}{٢} \times \frac{٢-ن}{٣}$$

$$\therefore \frac{١}{٢} = \frac{(٢-ن)٢}{(١-ن)٣}$$

$$\therefore (١-ن)٣ = (٢-ن)٤$$

$$\therefore ٣-٢ = ٨-٤$$

$$\therefore ٥ = ن$$

$$\text{من (١)} \therefore \frac{٧٢٠}{٢٤٠} = \frac{\text{ص}}{\text{س}} \times \frac{١-٥}{٢}$$

$$\therefore ٣ = \frac{\text{ص}}{\text{س}} \times ٢$$

$$\therefore ٢ص = ٣س \quad \therefore ٢ = \frac{٣}{٢}ص$$

$$\therefore \text{ح} = ٢٤٠$$

$$\therefore \text{ق} = ٢٤ = \text{ص} \times \text{س}$$

$$\therefore ٢٤٠ = \text{س} \left(\frac{٣}{٢} \right) ٥$$

$$\therefore ٢٤٠ = \text{س} \times \frac{٢ \times ٢٤٠}{٣ \times ٥}$$

$$\therefore \text{س} = ٣٢ \quad \therefore \text{س} = ٢$$

$$\therefore \text{ص} = ٢ \times \frac{٣}{٢} = ٣$$

ملحوظة : يمكن الحز مباشرة باستخدام النسبة

بين معاملي حدين متتاليين كما يلي :

$$\frac{\text{معامل ح } 1}{\text{معامل ح } 2} = \frac{1 - r - n}{r} \times \frac{\text{معامل الأول}}{\text{معامل الثاني}}$$

(5) نفرض أن رتب الحدود r ، $1+r$ ، $2+r$

$$\frac{\text{معامل ح } 1}{\text{معامل ح } 2} = \frac{1 - r - n}{r} \times \frac{\text{معامل الأول}}{\text{معامل الثاني}}$$

$$\therefore \frac{\text{معامل ح } 1}{\text{معامل ح } 2} = \frac{1 - r - n}{r} \times \frac{1}{1}$$

$$\therefore \frac{8}{5} = \frac{24}{15} = \frac{1 - r - n}{r}$$

$$\therefore 5 - n - r = 8 \Rightarrow 5 - n = 8 - r$$

$$\therefore 5 - n = 13 - r$$

$$\therefore n = \frac{1}{5} (5 - 13) \quad (1)$$

$$\frac{\text{معامل ح } 1}{\text{معامل ح } 2} = \frac{1 - r - n}{r} \times \frac{\text{معامل الأول}}{\text{معامل الثاني}}$$

$$\therefore \frac{7}{6} = \frac{28}{24} = \frac{1 - r - n}{r}$$

$$\therefore 6 - n - r = 7 \Rightarrow 6 - n = 7 + r$$

$$\therefore 6 - n = 13 + r \quad (2)$$

$$\therefore 6 - n = \frac{1}{5} (5 - 13) \times 6$$

$$\therefore 6 - n = (5 - 13) \times \frac{6}{5}$$

$$78 - 6n = 30 - 15.6 \Rightarrow 78 - 6n = 14.4$$

$$\therefore 13 - 6n = 14.4 \Rightarrow 6n = 13 - 14.4 = -1.4$$

$$\therefore n = \frac{1}{6} (5 - 13) \times 6 \quad (1)$$

$$\therefore n = 1 - 13 = 12$$

\therefore ترتيب الحدود 5، 6، 7.

(6) في مفكوك $(a + b)^n$

$$\frac{b}{1} \times \frac{1 + r - n}{r} = \frac{1 + r}{r}$$

بوضع $r = 2$

$$\therefore \frac{b}{1} \times \frac{1 + 2 - n}{2} = \frac{1 + 2}{2}$$

$$\therefore \frac{b}{1} \times \frac{1 + n}{2} = \frac{1 + 2}{2} \quad (1)$$

في مفكوك $(a + b)^{n+2}$

$$\frac{b}{1} \times \frac{1 + r - n - 2}{r} = \frac{1 + r}{r}$$

بوضع $r = 2$

$$\therefore \frac{b}{1} \times \frac{1 + 2 - n - 2}{2} = \frac{1 + 2}{2}$$

$$\therefore \frac{b}{1} \times \frac{1 + n}{2} = \frac{1 + 2}{2} \quad (2)$$

$$\therefore \frac{1 + n}{2} = \frac{1 + 2}{2}$$

$$\therefore \frac{b}{1} \times \frac{1 + n}{2} = \frac{b}{1} \times \frac{1 - n}{2}$$

$$\therefore 2(1 + n) = 2(1 - n)$$

$$\therefore 2 + 2n = 2 - 2n$$

$$\therefore n = 0$$

(7) في مفكوك $(a + m)^n$

$$\frac{m}{1} \times \frac{1 + r - n}{r} = \frac{1 + r}{r} \quad (1)$$

$$\frac{4}{1} = \frac{\text{معامل ح } 1}{\text{معامل ح } 2}$$

$$4 = \frac{\text{معامل ح } 1}{\text{معامل ح } 2} \times \frac{\text{معامل ح } 1}{\text{معامل ح } 2}$$

$$1 = \frac{10\text{ح}}{1\text{ح}} \therefore$$

$$10\text{ح} = 1\text{ح} \therefore$$

$$\text{بوضع ر} = 9$$

$$\frac{3}{1\text{س}^2} \times \frac{1+9-\text{ن}}{9} = \frac{10\text{ح}}{1\text{ح}}$$

$$(1) \text{ --- } 1 = \frac{10-\text{ن}}{1\text{س}^6} \leftarrow \text{ن} = 8 = 1\text{س}^6$$

$$\text{بوضع ر} = 6$$

$$\frac{3}{1\text{س}^2} \times \frac{1+6-\text{ن}}{6} = \frac{7\text{ح}}{1\text{ح}} \therefore$$

$$\frac{10}{8} = \frac{7\text{ح}}{1\text{ح}} \text{ ولكن}$$

$$\frac{10}{8} = \frac{5-\text{ن}}{1\text{س}^4} \therefore$$

$$(2) \text{ --- } 10 = (5-\text{ن})^2 \text{ س}^4$$

$$\text{بقسمة (2) } \div (1)$$

$$\frac{10}{1\text{س}^6} = \frac{(5-\text{ن})^2}{(8-\text{ن})} \therefore$$

$$\frac{5}{2} = \frac{(5-\text{ن})^2}{(8-\text{ن})} \therefore$$

$$5(8-\text{ن}) = (5-\text{ن})^2$$

$$40 = 5\text{ن} - 20 \therefore 20 = \text{ن}$$

$$\text{ح} + \text{ر} = 10 \text{ قر} (2\text{س})^{20} \text{ قر} (3\text{س})^{20}$$

$$= 10^{20} \text{ قر} (2)^{20} \text{ قر} (3)^{20} \text{ قر} (س)^{20}$$

$$\text{بوضع أس س} = \text{صفر} \therefore 20 = 3 - 20 = 0$$

$$\therefore 20 = 3 \leftarrow \text{ر} = \frac{20}{3} \text{ حط}$$

لا يوجد حد خالي من س في المفكوك

$$\therefore 4 = \frac{2}{1} \times \frac{1+4-\text{ن}}{4} \times \frac{2}{1} \times \frac{1+5-\text{ن}}{5}$$

$$(2) \text{ --- } 80 = 2\text{م} (3-\text{ن}) (4-\text{ن})$$

$$\frac{4}{7} = \frac{\text{معامل ح}^8}{\text{معامل ح}^1}$$

$$\frac{4}{7} = \frac{\text{معامل ح}^7}{\text{معامل ح}^1} \times \frac{\text{معامل ح}^8}{\text{معامل ح}^7}$$

$$\therefore \frac{4}{7} = \frac{2}{1} \times \frac{1+6-\text{ن}}{6} \times \frac{2}{1} \times \frac{1+7-\text{ن}}{7}$$

$$(3) \text{ --- } 24 = 2\text{م} (5-\text{ن}) (6-\text{ن})$$

$$\text{بقسمة (3) } \div (2)$$

$$\frac{80}{24} = \frac{(3-\text{ن}) (4-\text{ن})}{(5-\text{ن}) (6-\text{ن})} \therefore$$

$$\frac{10}{3} = \frac{12+\text{ن}^2}{30+\text{ن}^2}$$

$$\therefore 10(30+\text{ن}^2) = 3(12+\text{ن}^2) \therefore 300 + 10\text{ن}^2 = 36 + 3\text{ن}^2$$

$$\therefore 7\text{ن}^2 = 264 + 3\text{ن} \therefore$$

$$\therefore (8-\text{ن}) (7-\text{ن}) = 22$$

$$\therefore 8 = \text{ن} \text{ ، } 7 = \frac{22}{\text{ن}} \text{ مرفوض}$$

$$\text{من (2) } 80 = 2\text{م} \times 4 \therefore$$

$$\therefore 4 = 2\text{م} \therefore 2 \pm = \text{م}$$

$$(8) \text{ في مفكوك } (2\text{س}^3 + 3\text{س}^2)^{\text{ن}}$$

$$\frac{3}{1\text{س}^2} \times \frac{1+\text{ر}-\text{ن}}{\text{ر}} = \frac{1+\text{ر}-\text{ن}}{\text{ح}}$$

$$\therefore \frac{3}{1\text{س}^2} \times \frac{1+\text{ر}-\text{ن}}{\text{ر}} = \frac{1+\text{ر}-\text{ن}}{\text{ح}}$$

(٩) في مفكوك (س+٣) ٢

$$\frac{3}{س} \times \frac{1+ر-ن}{ر} = \frac{1+ر-ن}{ر}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{1+ر-ن}{ر} \therefore \frac{2}{3} = \frac{1+ر-ن}{ر}$$

بوضع ر=٩

$$\frac{3}{س} \times \frac{1+٩-ن}{٩} = \frac{1+٩-ن}{٩}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{س} \times \frac{٨-ن}{٩}$$

$$٨-ن=٨ \text{ --- (١)}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{١٥ح}{١٤ح} \therefore \frac{1}{4} = \frac{١٥ح}{١٤ح}$$

بوضع ر=١٤

$$\frac{3}{س} \times \frac{1+١٤-ن}{١٤} = \frac{1+١٤-ن}{١٤}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{3}{س} \times \frac{١٣-ن}{١٤}$$

$$س = \frac{٦}{٧} (١٣-ن) \text{ --- (٢)}$$

بقسمة (٢) ÷ (١)

$$\frac{6}{7} \times \frac{(٨-ن)}{(١٣-ن)} = 2 \therefore$$

$$١٢-٧ن=١٥٦-٧ن \therefore$$

$$١٠٠=٧ن \therefore ٢٠=ن$$

$$١٢=٢س \therefore ٨-٢٠=٢س \text{ من (١)}$$

$$٦=س$$

(١٠) في مفكوك (س+١) ٢

$$\frac{س}{1} \times \frac{1+ر-ن}{ر} = \frac{1+ر-ن}{ر}$$

$$\frac{25}{3} = \frac{1+ر-ن}{ر} \therefore \frac{25}{3} = \frac{1+ر-ن}{ر}$$

$$\frac{25}{3} = \frac{2ح}{2ح} \times \frac{1+ر-ن}{2ح}$$

$$\frac{25}{3} = \frac{س}{1} \times \frac{1+٢-ن}{٢} \times \frac{س}{1} \times \frac{1+٣-ن}{٣}$$

$$٥٠=٢س(١-ن)(٢-ن) \text{ --- (١)}$$

$$١ = \frac{1+٥-ن}{٥} \therefore ١ = \frac{1+٥-ن}{٥}$$

$$١ = \frac{س}{1} \times \frac{1+٥-ن}{٥}$$

$$٥ = (٤-ن)س$$

بتربيع الطرفين

$$٢٥ = ٢س(٤-ن) \text{ --- (٢)}$$

بقسمة (٢) ÷ (١)

$$٢ = \frac{(١-ن)(٢-ن)}{(٤-ن)}$$

$$٣٢ + ١٦ن - ٢ن٢ = ٢ + ٣ن - ٢ن٢$$

$$٠ = ٣٠ + ١٣ن - ٢ن٢$$

$$٠ = (١٠-ن)(٣-ن)$$

$$١٠ = ن \therefore ٣ = ن مرفوض$$

$$\frac{5}{6} = س$$

طسول تمسولين (٦)

$$(١) \quad ٢٢ - ١٠ = (٢٢ + ٥) + (٢٤ - ٥)$$

$$(٢) \quad ٢٢ - ٣٦ = (٢٦ + ٢) (٢٥ - ٢)$$

$$(٣) \quad (٢٢ - ٢) (٢٢ - ٢) =$$

$$= (٢٢ - ٢) (٢٤ - ٢) = ١٨ - ١$$

(٤) مجموع متتابعة حسابية حيث $a = ٢$

$$٢١ = n, \quad ٢ = a,$$

$$\therefore \text{ج } ١١ = [٢٢٠ + ٢٢]$$

$$= ٢١ \times ١١ = ٢٣١$$

$$(٥) \quad \text{من } ٢ - \text{ص} = ٩, \quad ٢ = \text{ص} + ٩$$

$$\therefore \text{من } ٢ = \text{ص}, \quad ٢ = \text{ص} + ٩$$

$$(٦) \quad \text{من } ٢ = \text{ص} + ٩$$

$$\therefore \text{من } ٢ = \text{ص}, \quad ٢ = \text{ص} + ٩$$

$$(٧) \quad (٢ + ١) = ٢ + ١ + ٢ = ٢ + ١ + ٢$$

$$\therefore (٢ + ١) = ٢ + ١ = ٢ + ١$$

$$(٨) \quad (٢ - ١) = ٢ - ١ = ٢ - ١$$

$$\therefore (٢ - ١) = ٢ - ١ = ٢ - ١$$

\therefore الطرفان متساويان

$$(٨) \quad ٩ = \text{ص} - ٢$$

$$(٩) \quad \text{من } ٢ = \text{ص} - ٢$$

$$\text{من } (٢) \quad ٢ = \text{ص}$$

$$\text{من } (١) \quad \text{ص} = ٢ \text{ أو } ١١$$

$$(٩) \quad \text{ع} = \left(\frac{\sqrt[3]{٢}}{٢} + \frac{١}{٢} \right) =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{٢}}{٢} - \frac{٢}{٤} - \frac{١}{٤} =$$

$$\text{ع} = \frac{\sqrt[3]{٢}}{٢} - \frac{١}{٢} =$$

$$\text{ع} = \left(\frac{\sqrt[3]{٢}}{٢} + \frac{١}{٢} \right) =$$

$$= \frac{١}{٤} - \frac{٢}{٤} - \frac{\sqrt[3]{٢}}{٢} =$$

$$= \frac{١}{٢} + \frac{\sqrt[3]{٢}}{٢} = \text{ع}$$

$$(١٠) \quad \text{من } ٥ = \text{ص} \therefore \text{من } ٥ \sqrt[3]{٢} =$$

$$= \text{ص} \sqrt[3]{٥}$$

طسول تمسولين (٧)

$$(١) \quad \text{من } ٢ + \text{ص} = ١٥ - \text{ص} - ٢٨ = ٤٣ - \text{ص}$$

$$\therefore \text{من } ٤٣ = \text{ص}, \quad ١ = \text{ص}$$

$$(٢) \quad (٢ + ٣ + ٥ - \text{ص} - ٤) + \text{ص} = (٩ + \text{ص} + ٢ + ٣ + ٥ - \text{ص}) =$$

$$\therefore \text{من } ٤ = \text{ص} - ٤ = ٤ - \text{ص} \quad (١) \quad \text{---}$$

$$(٢) \quad \text{من } ٩ + \text{ص} + ٢ = ٩ + \text{ص}$$

بطل المعادلتين (١)، (٢)

$$\therefore \text{من } ٢ = \text{ص}, \quad ١ = \text{ص}$$

$$(٣) \quad \frac{(٢ - \text{ص})(٤ - \text{ص} + ٢ + \text{ص})}{٢ + ١} = \text{ص} - ٢ - \text{ص} + ٢$$

$$\frac{٦ - ٢ + ١ + ٢ + \text{ص}}{٢ + ١} = \text{ص} - ٢ - \text{ص} + ٢$$

$$= \frac{٢ - ١}{٢ - ١} \times \frac{١١ - ٢}{٢ + ١} =$$

$$= \frac{١٥ - ٢٠}{٢ - ١} = \frac{٥}{١} = ٥$$

$$\therefore \text{من } ٤ = \text{ص}, \quad ٢ = \text{ص}$$

$$\therefore \text{من } ٢ = \text{ص}, \quad ١ = \text{ص}$$

$$(٤) \quad \frac{(٢ + ١)(٢ + ٣ + ٥ - \text{ص} - ٤) + (١ - \text{ص})(٢ + ٣ + ٥ - \text{ص} - ٤)}{(٢ + ١)} = \frac{٧}{٢}$$

$$\therefore (٢ + ٣ + ٥ - \text{ص} - ٤) + (١ - \text{ص}) = \frac{٧}{٢}$$

$$\therefore \text{س}^3 - \text{ص}^2 - \text{ع} = 7 \text{ — (1)}$$

$$\text{س} + \text{ع} = 8 \text{ — (2)}$$

$$\text{من (1)، (2) } \therefore \text{س} = 2, \text{ع} = 6 \text{ — (3)}$$

$$(5) \frac{\text{س} + \text{ص}}{\text{س} - \text{ص}} \times \frac{\text{س} + \text{ت}}{\text{س} - \text{ت}} = \frac{\text{ت} + 2}{\text{ت}^2 + 9} + \frac{\text{ت}^2 + 1}{\text{ت}^2 + 6\text{ت} + 9} =$$

$$\therefore \text{س} + \text{ت} = 8 \text{ — (4)}$$

$$\therefore \text{س} + \text{ت} = 8 \text{ — (5)}$$

$$\therefore \text{س} + \text{ت} = 8 \text{ — (6)}$$

$$\therefore \text{س} + \text{ت} = 8 \text{ — (7)}$$

$$\therefore \text{س} = 4, \text{ت} = 4$$

$$(6) \frac{\text{س} + \text{ص} + \text{ع}}{\text{س} - \text{ص} - \text{ع}} = \frac{\text{ت}^2 + 2\text{ت} + 1 + \text{ت}^2 + 4\text{ت} + 4 + \text{ت}^2 + 6\text{ت} + 9}{\text{ت}^2 + 6\text{ت} + 9} =$$

$$\therefore \frac{\text{ت}^2 + 2\text{ت} + 1}{\text{ت}^2 + 6\text{ت} + 9} = \frac{\text{ت} + 1}{\text{ت} + 3}$$

$$\therefore \text{س}^2 - \text{ص}^2 + \text{ع}^2 + \text{ت}^2 = 7\text{ت} + 7$$

$$= 7\text{ت} + 7 + \text{ع}^2 + \text{ص}^2 - \text{س}^2$$

$$\therefore (2 - \text{ص} - \text{ع}) + (2 - \text{س}) = 12\text{ص} + 2$$

$$\therefore \text{س} - \text{ص} - \text{ع} = 1, \text{س} - \text{ص} = 1 + \text{ع}$$

$$\therefore \frac{7}{8} = \text{س}, \frac{7}{8} = \text{ص}$$

$$(7) \frac{\text{س} + \text{ص}}{\text{س} - \text{ص}} \times \frac{\text{س} + \text{ت}}{\text{س} - \text{ت}} = \frac{\text{ت}^2 + 2\text{ت} + 1}{\text{ت}^2 + 6\text{ت} + 9} =$$

$$\therefore \text{س} + \text{ت} = 8 \text{ — (8)}$$

$$\therefore \frac{1}{\text{س} + 1} = \text{س}, \frac{1}{\text{س} + 1} = \text{ص}$$

$$\therefore \text{س} + \text{ص} = 1 \text{ — (9)}$$

$$1 = \frac{\text{س} + \text{ص}}{\text{س} + 1} =$$

$$(8) \frac{\text{ت} + 1}{\text{ت} + 1} \times \frac{\text{ت} + 2}{\text{ت} - 1} = \text{س} + 1$$

$$\frac{\text{ت}^2 + 1}{\text{ت}^2 - 1} = \frac{1 + \text{ت}^2 + 2\text{ت}}{\text{ت}^2 - 1} =$$

$$\therefore \frac{2}{\text{ت}} = 1, \frac{1}{\text{ت}} = 1$$

$$\therefore \text{ت} = (2 + 1)^2 = 9$$

$$(9) \text{س} + \text{ص} = 1 \text{ — (10)}$$

$$\text{س} = 2 + (\text{ت}^2 + 4\text{ت} + 4) = 2 + 16 = 18$$

$$\therefore \text{س} - \text{ص} = 18 - 1 = 17$$

$$\therefore \text{س} - \text{ص} = 17 \text{ — (11)}$$

$$\text{حل (1)، (2)}$$

$$\therefore \text{س} = 1, \text{ص} = 1$$

$$(10) \therefore \text{ل} + \text{ن} + \text{ت} \text{ جُزْأُ لِلْمَعْلُومَةِ}$$

$$\therefore \text{فهو يحلّق معالمتها}$$

$$\text{ل} + \text{ن} + \text{ت} = \text{ج} + \text{ب} + (\text{ل} + \text{ن} + \text{ت})$$

$$\therefore \text{ل} + \text{ن} + \text{ت} = \text{ج} + \text{ب} + \text{ل} + \text{ن} + \text{ت}$$

$$\therefore \text{ج} = \text{ب}$$

على قسري (أ)

$$\sqrt{2} = 1 + \sqrt{1} = 1 \quad (1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \text{جنا هـ} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} = \text{جا هـ}$$

∴ متقع في الربع الثاني

$$^{\circ}135 = ^{\circ}45 - ^{\circ}180 = \text{هـ} \therefore$$

$$\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{135}{180} \times \text{ط} = \text{ط}$$

$$\therefore 1 + \sqrt{2} = \text{ت} + \sqrt{2} \quad (\text{جنا } \frac{2}{\sqrt{2}} + \text{ت جا } \frac{2}{\sqrt{2}})$$

$$\sqrt{2} = 1 + \sqrt{1} = 1 \quad (2)$$

$$\frac{3}{\sqrt{2}} = \text{جنا هـ} = \frac{3}{\sqrt{2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} = \text{جا هـ}$$

$$\frac{11}{\sqrt{2}} = ^{\circ}330 = \text{هـ} \therefore$$

$$\therefore \sqrt{2} - \text{ت} = \text{ت} + \sqrt{2} \quad (\text{جنا } \frac{11}{\sqrt{2}} + \text{ت جا } \frac{11}{\sqrt{2}})$$

$$\sqrt{2} = 1 + \sqrt{1} = 1 \quad (3)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \text{جنا هـ} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} = \text{جا هـ}$$

$$\frac{3}{\sqrt{2}} = ^{\circ}135 = \text{هـ} \therefore$$

$$\therefore 2 + \sqrt{2} = \text{ت} + \sqrt{2} \quad (\text{جنا } \frac{3}{\sqrt{2}} + \text{ت جا } \frac{3}{\sqrt{2}})$$

$$1 = \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 \quad (4)$$

$$\frac{3}{\sqrt{2}} = \text{جنا هـ} = \frac{3}{\sqrt{2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} = \text{جا هـ}$$

$$\frac{\text{ط}}{3} = \text{هـ} \therefore$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}} = \text{ت} + \sqrt{2} \quad (\text{جنا } \frac{\text{ط}}{3} + \text{ت جا } \frac{\text{ط}}{3})$$

$$\sqrt{2} = 18 + 18\sqrt{1} = 1 \quad (5)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \text{جنا هـ} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} = \text{جا هـ}$$

$$\therefore \frac{\text{ط}}{4} = \text{هـ}$$

$$\sqrt{2} + \sqrt{2} = \text{ت} + \sqrt{2} \quad (\text{جنا } \frac{\text{ط}}{4} + \text{ت جا } \frac{\text{ط}}{4})$$

$$\sqrt{2} = 4 + 0\sqrt{1} = 1 \quad (6)$$

$$\text{جنا هـ} = 0, \quad \text{جا هـ} = 1$$

$$\therefore \frac{\text{ط}}{4} = \text{هـ}$$

$$2 = \text{ت} + \sqrt{2} \quad (\text{جنا } \frac{\text{ط}}{4} + \text{ت جا } \frac{\text{ط}}{4})$$

$$(7) \quad \text{جنا } ^{\circ}120 = \text{جنا } ^{\circ}60 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{3}{\sqrt{2}} = \text{جا } ^{\circ}60 = \text{جا } ^{\circ}120$$

$$\therefore \text{الصورة الجبرية هي } \sqrt{2} \quad (\text{ت } \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$= 2 + \sqrt{2}$$

$$(8) \quad ^{\circ}225 = \frac{180}{4} \times 5 = \frac{\text{ط}}{4}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \text{جنا } ^{\circ}225 = \text{جنا } ^{\circ}45 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \text{جا } ^{\circ}225 = \text{جا } ^{\circ}45 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{الصورة الجبرية: } \sqrt{2} \quad (\text{ت } \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$= 1 - \text{ت}$$

$$(9) \quad ^{\circ}330 = 180 \times \frac{11}{6} = \frac{11}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{3}{\sqrt{2}} = \text{جنا } ^{\circ}330 = \text{جنا } ^{\circ}30 = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \text{جا } ^{\circ}330 = \text{جا } ^{\circ}30 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{الصورة الجبرية: } \sqrt{2} \quad (\text{ت } \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}} = \text{ت}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \text{جا هـ} , \frac{1}{2} = \text{جتا هـ} ,$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = 240 = \text{هـ} \therefore$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ جتا} + \frac{1}{2} \text{ ت} = \text{العدد}$$

$$\sqrt{2} = 1 + 1 \sqrt{2} = 2 \quad (10)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \text{جا هـ} , \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \text{جتا هـ}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = 210 = 10 - 210 = \text{هـ} \therefore$$

$$(\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ جتا} + \frac{1}{2} \text{ ت}) \sqrt{2} = \text{ع} \therefore$$

$$(\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ جتا} - \frac{1}{2} \text{ ت}) \sqrt{2} = \text{ع} -$$

$$\therefore \sqrt{2} = \text{ع} - (\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}) \text{ جتا} + \text{ت}$$

$$[(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2})$$

$$\sqrt{2} = (\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ جتا} + \frac{1}{2} \text{ ت}) \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} = (\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ جتا} + \frac{1}{2} \text{ ت}) \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} = \text{ع} - (\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ جتا} + \frac{1}{2} \text{ ت}) \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} = (\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ جتا} + \frac{1}{2} \text{ ت}) \sqrt{2}$$

$$\frac{1}{(\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ جتا} + \frac{1}{2} \text{ ت}) \sqrt{2}} = \frac{1}{\text{ع}}$$

$$\frac{(\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ جتا} - \frac{1}{2} \text{ ت})}{(\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ جتا} + \frac{1}{2} \text{ ت})} \times$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = (\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ جتا} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ت})$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = (\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ جتا} + \frac{1}{2} \text{ ت})$$

$$\text{ع} = 1 + 2 + 2 + 2 = 7 \quad (16)$$

$$\sqrt{2} = 1 + 1 \sqrt{2} = 2 \quad \text{جتا هـ} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \text{هـ} \therefore \frac{1}{\sqrt{2}} = \text{جا هـ}$$

$$0100 = \frac{180}{2} \times 0 = \frac{0}{2} \quad (10)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = 20 \text{ جتا} = 10 \text{ جتا} = 100$$

$$\frac{1}{2} = 20 \text{ جا} = 10 \text{ جا} = 100$$

$$\text{الصورة الجبرية هي } (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ت})$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \text{ ت} =$$

$$\text{ت} + \sqrt{2} = \frac{\text{ت} + \sqrt{2}}{\text{ت} + \sqrt{2}} \times \frac{\text{ت} - \sqrt{2}}{\text{ت} - \sqrt{2}} \quad (11)$$

$$2 = 1 + \sqrt{2} = 2$$

$$\frac{1}{2} = \text{جا هـ} , \frac{\sqrt{2}}{2} = \text{جتا هـ}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = 20 = \text{هـ} \therefore$$

$$\therefore \text{العدد} = 2 (\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ جتا} + \frac{1}{2} \text{ ت})$$

$$\frac{\text{ت} + \sqrt{2}}{\text{ت} + \sqrt{2}} \times \frac{\text{ت} - \sqrt{2}}{\text{ت} - \sqrt{2}} \quad (12)$$

$$2 + 1 =$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \text{جا هـ} , \frac{1}{2} = \text{جتا هـ} , 2 = 2 + 1 \sqrt{2} = 2 \therefore$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = 20 = \text{هـ} \therefore$$

$$\therefore \text{العدد} = 2 (\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ جتا} + \frac{1}{2} \text{ ت})$$

$$\text{ت} + \sqrt{2} = \frac{\text{ت} + \sqrt{2}}{\text{ت} + \sqrt{2}} \times \frac{(\text{ت} + \sqrt{2})^2}{(\text{ت} + \sqrt{2})^2} \quad (13)$$

$$2 = 1 + 1 \sqrt{2} = 2 \therefore$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = 20 = \text{هـ} \therefore \frac{\sqrt{2}}{2} = \text{جا هـ} , \frac{1}{2} = \text{جتا هـ}$$

$$\therefore \text{العدد} = 2 (\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ جتا} + \frac{1}{2} \text{ ت})$$

$$\frac{\text{ت} + \sqrt{2}}{2} = \frac{\text{ت}}{2} \times \frac{\text{ت} - \sqrt{2}}{\text{ت} - \sqrt{2}} = \frac{\text{ت} - \sqrt{2}}{2} \quad (14)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \text{ ت} =$$

$$1 = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{2} = 2$$

$$(17) \text{ العدد } = 3 (- \text{جتا } 60 - \text{ت جا } 60)$$

$$3 = (\text{جتا } 240 + \text{ت جا } 240)$$

$$\text{المقياس} = 30, \text{ والسعة} = 240$$

$$(18) \text{ العدد} = 4 [\text{جتا } (150 - 360)]$$

$$+ \text{ت جا } (150 + 360)$$

$$4 = (\text{جتا } 210 + \text{ت جا } 210)$$

$$\therefore \text{المقياس} = 4, \text{ والسعة} = 210$$

$$(19) \text{ العدد} = 2 (- \text{جتا } 210 + \text{ت جا } 210)$$

$$2 = (\text{جتا } 30 - \text{ت جا } 30)$$

$$2 = (\text{جتا } 60 - \text{ت جا } 60)$$

$$2 = (\text{جتا } 300 + \text{ت جا } 300)$$

$$\therefore \text{المقياس} = 2, \text{ السعة} = 300$$

$$(20) \text{ العدد} = \text{ل} [\text{جتا } (90 + \text{هـ}) + \text{ت جا } (90 + \text{هـ})]$$

$$\therefore \text{المقياس} = \text{ل}, \text{ السعة} = \frac{\text{ط}}{2} + \text{هـ}$$

عَنْسَلِي تَمَسَنِيَسِي (٢١)

$$(1) \text{ ع. ع.} = 12 [\text{جتا } (\frac{\text{ط}}{2} + \frac{\text{ط}}{2}) + \text{ت جا } (\frac{\text{ط}}{2} + \frac{\text{ط}}{2})]$$

$$12 = (\text{جتا } \frac{\text{ط}}{2} + \text{ت جا } \frac{\text{ط}}{2})$$

$$\text{ع. ع.} = 2 [(\text{جتا } \frac{\text{ط}}{2} - \frac{\text{ط}}{2}) + \text{ت جا } (\frac{\text{ط}}{2} - \frac{\text{ط}}{2})]$$

$$2 = (\text{جتا } \frac{\text{ط}}{2} + \text{ت جا } \frac{\text{ط}}{2})$$

$$(2) \text{ ع. ع.} = 4 [\text{جتا } (-\frac{\text{ط}}{2}) + \text{ت جا } (-\frac{\text{ط}}{2})]$$

$$\text{ع. ع.} = 22 [\text{جتا } (\frac{\text{ط}}{2} - \frac{\text{ط}}{2}) + \text{ت جا } (\frac{\text{ط}}{2} - \frac{\text{ط}}{2})]$$

$$22 = (\text{جتا } \frac{\text{ط}}{2} - \text{ت جا } \frac{\text{ط}}{2})$$

$$22 = (\text{جتا } \frac{\text{ط}}{2} - \text{ت جا } \frac{\text{ط}}{2})$$

$$\text{ع. ع.} = 2 [(\text{جتا } (\frac{\text{ط}}{2} + \frac{\text{ط}}{2}) + \text{ت جا } (\frac{\text{ط}}{2} + \frac{\text{ط}}{2}))]$$

$$2 = (\text{جتا } \frac{\text{ط}^2}{4} + \text{ت جا } \frac{\text{ط}^2}{4})$$

$$(3) \text{ ع. ع.} = 10 (- \text{جتا } 60 + \text{ت جا } 60)$$

$$0 = (- \text{جتا } 60 - \text{ت جا } 60)$$

$$0 = [\text{جتا } (60 - 270) + \text{ت جا } (60 - 270)]$$

$$0 = (\text{جتا } 210 + \text{ت جا } 210)$$

$$\text{ع. ع.} = 00 (- \text{جتا } 270 + \text{ت جا } 270)$$

$$\text{ع. ع.} = 2 [\text{جتا } (60 - 210) + \text{ت جا } (60 - 210)]$$

$$2 = [\text{جتا } 150 - \text{ت جا } 150]$$

$$2 = (\text{جتا } 210 + \text{ت جا } 210)$$

$$(4) \text{ ع. ل.} = \text{ل} [\text{جتا } (-\text{هـ}) + \text{ت جا } (-\text{هـ})]$$

$$\text{ع. ل.} = \text{ل. ل.} (\text{جتا } 0 + \text{ت جا } 0)$$

$$\frac{\text{ل}}{\text{ل}} = \frac{\text{ع}}{\text{ع}} [\text{جتا } (\text{هـ} + \text{هـ}) + \text{ت جا } (\text{هـ} + \text{هـ})]$$

$$\frac{\text{ل}}{\text{ل}} = (\text{جتا } 2\text{هـ} + \text{ت جا } 2\text{هـ})$$

$$(5) \text{ ع.} = \frac{1}{2} [\text{جتا } (-\frac{\text{ط}}{2}) + \text{ت جا } (-\frac{\text{ط}}{2})]$$

$$\frac{1}{2} = (\text{جتا } \frac{\text{ط}^2}{4} + \text{ت جا } \frac{\text{ط}^2}{4})$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} [\text{جتا } (-\frac{\text{ط}^2}{4}) + \text{ت جا } (-\frac{\text{ط}^2}{4})]$$

$$(6) \text{ ع.} = \frac{1}{4} [\text{جتا } (-\frac{\text{ط}}{2}) + \text{ت جا } (-\frac{\text{ط}}{2})]$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4} [\text{جتا } (-2\text{ط}) + \text{ت جا } (-2\text{ط})]$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{2} [\text{جتا } (-\frac{\text{ط}}{2}) + \text{ت جا } (-\frac{\text{ط}}{2})]$$

$$1 = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = |ع| \quad (٧)$$

$$جنا هـ = \frac{1}{2} ، جنا هـ = \frac{3}{2} \therefore \frac{ط ٢}{٢} = هـ$$

$$\therefore ع = جنا \frac{ط ٢}{٢} + ت \frac{ط ٢}{٢}$$

$$بالمثل ع = جنا \frac{ط ٤}{٢} + ت \frac{ط ٤}{٢}$$

$$\therefore ع = جنا \left(\frac{ط ٢}{٢} \times ٢ \right) + ت \left(\frac{ط ٢}{٢} \times ٢ \right)$$

$$ع = جنا \left(\frac{ط ٤}{٢} \times ٢ \right) + ت \left(\frac{ط ٤}{٢} \times ٢ \right)$$

$$= جنا \frac{ط ٨}{٢} + ت \frac{ط ٨}{٢}$$

$$= جنا \frac{ط ٢}{٢} + ت \frac{ط ٢}{٢} = ع$$

$$ع = جنا \left(\frac{ط ٢}{٢} \times ٣ \right) + ت \left(\frac{ط ٢}{٢} \times ٣ \right)$$

$$= جنا ط ٢ + ت ط ٢ = ١$$

$$ع = جنا \left(\frac{ط ٤}{٢} \times ٣ \right) + ت \left(\frac{ط ٤}{٢} \times ٣ \right)$$

$$= جنا ط ٤ + ت ط ٤$$

$$= جنا + ت = ١$$

$$\therefore ع = ع = ١$$

$$(٨) جنا هـ = \frac{1}{5} ، جنا هـ = \frac{2}{5}$$

$$ع = ٤ [جنا (-٥٢) + ت (-٥٢)]$$

$$ع = ٢ (- جنا + ت)$$

$$= ٢ [جنا (ط - هـ) + ت (ط - هـ)]$$

$$\therefore ع = ١٦ [جنا (-٥٦) + ت (-٥٦)]$$

$$ع = ١٦ [جنا (ط - هـ) + ت (ط - هـ)]$$

$$\therefore ع = ع = جنا - (ط + هـ) + ت$$

$$(ط + هـ) = جنا - هـ + ت - هـ \quad (الصورة المقلوبة)$$

$$جنا هـ = جنا هـ = ١ - \frac{٤}{5} \times ٢ = ١ - \frac{٨}{5} = \frac{٢}{5}$$

$$جنا هـ = جنا هـ = ٢ - \frac{١}{5} \times ٢ = ٢ - \frac{٢}{5} = \frac{٨}{5}$$

$$\therefore ع = ع = \frac{٢}{5} - \frac{٨}{5} = -١$$

$$(٩) |س| = ١ + ٢\sqrt{٢} = ٢ ، جنا هـ = \frac{3}{2} ، جنا هـ = \frac{1}{2}$$

$$\therefore هـ = ٣٠ \therefore س = ٢ (جنا ٣٠ + ت ٣٠)$$

$$|ص| = ١ + ١\sqrt{٢} = ٢\sqrt{٢} ، جنا هـ = \frac{1}{2} ، جنا هـ = \frac{1}{2}$$

$$\therefore هـ = ٣٦٠ - ٤٥ = ٣١٥$$

$$\therefore ص = ٢\sqrt{٢} [جنا (٣١٥) + ت (٣١٥)]$$

$$\therefore \frac{ص}{س} = \frac{٢\sqrt{٢}}{٢} [جنا (٣١٥ - ٣٠) + ت (٣٠ - ٣١٥)]$$

$$= \frac{٢\sqrt{٢}}{٢} (جنا ٢٨٥ + ت ٢٨٥)$$

$$\therefore \frac{ص}{س} = \frac{٢\sqrt{٢}}{٢} (جنا ٥٧ + ت ٥٧) = \frac{١}{٢} (جنا ٥٧ + ت ٥٧)$$

$$= \frac{١}{٢} (جنا ٢١٠ + ت ٢١٠)$$

$$(١٠) \frac{(جنا \frac{ط ١}{٢} + ت \frac{ط ١}{٢}) (جنا \frac{ط ٢}{٢} + ت \frac{ط ٢}{٢})}{جنا \frac{ط ٤}{٢} + ت \frac{ط ٤}{٢}} = \text{المقدار}$$

$$= جنا \left(\frac{ط ٢}{٢} + \frac{ط ٥}{٣} + \frac{ط ٤}{٤} \right) + ت \left(\frac{ط ٤}{٤} - \frac{ط ٥}{٣} + \frac{ط ٢}{٢} \right)$$

$$= جنا \left(\frac{ط ٥}{٢} \right) + ت \left(\frac{ط ٥}{٢} \right)$$

$$= جنا \frac{ط}{٢} + ت \frac{ط}{٢}$$

$$(١١) \text{ راجع للتمثيل البياني لمقياس وسعة .}$$

$$(١٢) \text{ حاصل ضرب عدلين مركبين وخارج .}$$

$$(١٣) \text{ قسمة عدلين مركبين .}$$

مختصر الحساب

$$(1) \text{ س } = 0, \text{ ص } = 2, \text{ ع } = 2$$

$$\text{جناه} = 0, \text{جا هـ} = 1, \text{هـ} = \frac{\text{ط}}{4}$$

$$\therefore 2 = 2 \text{ (جنا } \frac{\text{ط}}{4} + \text{ت جا } \frac{\text{ط}}{4} \text{)}$$

الجنور التربيعية للعدد 2

$$\sqrt{2} = \text{جنا } \frac{\text{ط}}{4} + \text{ت جا } \frac{\text{ط}}{4}$$

$$\sqrt{2} = \text{جنا } \frac{(\text{ط}^2 + 4)}{4} + \text{ت جا } \frac{(\text{ط}^2 + 4)}{4}$$

$$\text{حيث } 0 = 1$$

الجنرين التربيعين هما

$$\sqrt{2} = \text{جنا } \frac{\text{ط}}{4} + \text{ت جا } \frac{\text{ط}}{4}$$

$$\sqrt{2} = \left(\frac{1}{4} \times \text{ت} + \frac{1}{4} \right) \sqrt{2} + 1$$

$$\sqrt{2} = \text{جنا } \frac{\text{ط}}{4} + \text{ت جا } \frac{\text{ط}}{4}$$

$$\sqrt{2} = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) \text{ت} - 1$$

(2) نفرض ان ع = 1 - 2

$$\therefore \text{ع} = 2, \text{جناه} = \frac{1}{4}, \text{جا هـ} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{هـ} = \frac{\text{ط}}{4}$$

$$\therefore 1 - \sqrt{2} = 2 \text{ (جنا } \frac{\text{ط}}{4} \text{) + ت جا } \frac{\text{ط}}{4}$$

الجنران التربيعيان للعدد هما

$$\sqrt{2} = \text{جنا } \frac{\text{ط}}{4} + \text{ت جا } \frac{\text{ط}}{4}$$

$$\text{حيث } 0 = 1$$

$$\sqrt{2} = \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} \right) \text{ت} - \left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} \right) \text{ت}$$

(3) نفرض ان ع = 2 + 2

$$\text{ع} = 12 + 4\sqrt{2} = \text{ع}$$

$$\therefore \text{جناه} = \frac{1}{4}, \text{جا هـ} = \frac{\sqrt{2}}{4}, \text{هـ} = 12$$

$$(-2 + 2\sqrt{2}) = 2 \text{ (جنا } 60 + \text{رط) + ت جا}$$

$$(60 + \text{رط})$$

$$\text{حيث } 0 = 1$$

$$12 = 2 \text{ (جنا } 60 + \text{ت جا } 60 \text{)}$$

$$2 = 2 \text{ (جنا } 240 + \text{ت جا } 240 \text{)}$$

$$\pm = \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} \right) \text{ت}$$

$$\pm = (1 + 2\sqrt{2}) \text{ت}$$

$$(4) \text{ (جنا } \frac{\text{ط}}{4} - \text{ت جا } \frac{\text{ط}}{4} \text{) } = \left(\frac{\text{ط}}{4} - \text{جنا} \right) + \text{ت جا}$$

$$\left(\frac{\text{ط}}{4} - \right)$$

الجنرين التربيعين هما

$$2 \text{ (جنا } \frac{\text{ط}}{4} - \text{ت جا } \frac{\text{ط}}{4} \text{) + ت جا } \frac{\text{ط}}{4} + \text{رط}$$

$$\text{حيث } 0 = 1, \text{الجنران هما}$$

$$2 = \left(\frac{\text{ط}}{4} - \text{جنا} \right) + \text{ت جا } \frac{\text{ط}}{4} - \sqrt{2}$$

$$2 = \left(\frac{\text{ط}}{4} - \text{جنا} \right) + \text{ت جا } \frac{\text{ط}}{4} - \sqrt{2}$$

(5) الجنران التربيعيان هما

$$2 \text{ (جنا } 180 + 150 \text{) + ت جا } 180 + 150 \text{)}$$

$$\text{حيث } 0 = 1$$

$$\therefore \text{الجنران هما } \pm \left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} \right) \text{ت}$$

$$\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} \times \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} \quad (6)$$

$$2 + 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4} = \text{جا هـ}, \frac{1}{4} = \text{جناه}, \text{هـ} = 1$$

$$\therefore 120 = \text{هـ}$$

∴ العدد = 4 [جتا ١٢٠ + ت ١٢٠]

∴ الجذرين هما ٢ [جتا (١٨٠ + ٦٠)]

+ ت جا (١٨٠ + ٦٠)]

حيث ر = ١٠٠

أي هما $\pm (1 + \sqrt{3} \text{ ت})$

(٧) من + ت من $\sqrt{6-8} \text{ ت}$

∴ من - من + ٢ ت من من - ٦ - ٨

∴ من - من = ٨ - (١) - ٢ من من = ٦ - (٢)

بتربيع (١) و (٢) والجمع

من + من = ١٠٠ ∴ من + من = ١٠ - (٣)

بجمع (١) و (٣) ∴ ٢ من = ٢ من = ١

∴ من = ١

ب طرح (١) من (٢) ∴ ١٨ = ٢ من

∴ من = ٩ ∴ من = ٣

من (٢) من، من مختلفتان في الإشارة

∴ $\sqrt{6-8} \text{ ت} = \pm (١ - ٣ \text{ ت})$

(٨) مثل مسألة (٧) والجواب $\pm (٢ - ٣ \text{ ت})$

(٩) $\frac{\text{ت} + ٧}{\text{ت} + ١} \times \frac{\text{ت} - ١}{\text{ت} - ١} = \frac{\text{ت} + ٧}{\text{ت} + ١}$

$= \frac{\text{ت} + ٧ - ٨ + ٦}{\text{ت} + ١} = \frac{\text{ت} - ٢}{\text{ت} + ١}$

= ٣ + ٤ ت وتكمل مثل مسألة (٧)

والجواب $\pm (١ + ٢ \text{ ت})$

(١٠) $\frac{\text{ت} + ١}{\text{ت} + ١} \times \frac{\text{ت} + ٣١}{\text{ت} - ١} = \frac{\text{ت} + ٣١}{\text{ت} - ١}$

$$\frac{\text{ت} + ٣١}{\text{ت} - ١} = \frac{\text{ت} + ٣١ + ٤ \text{ ت} + ٤}{\text{ت} - ١} = \frac{\text{ت} + ٤٨ + ٤}{\text{ت} - ١}$$

$$= \frac{\text{ت} + ٤٨ + ٤}{\text{ت} - ١}$$

وتكمل كمسألة (٧) والجواب $\pm (٤ + ٣ \text{ ت})$

(١١) $\sqrt{٣ + ٤ \text{ ت}} = \pm (٢ + \text{ت})$

كما في مسألة (٧)

∴ ع - ع = $\frac{١}{\text{ع}} = \pm \left(\frac{\text{ت} - ٢}{\text{ت} + ٢} \times \frac{١}{\text{ت} - ٢} \right)$

$$\pm = \frac{\text{ت} - ٢}{\text{ت} - ٢}$$

∴ ع + ع = $\frac{(\text{ت} - ٢)^٢}{\text{ت} - ٢} + (\text{ت} + ٢) = \pm$

$$\pm = ٤$$

(١٢) (من + ت من) = $\frac{٨ - (١ - \text{ت})}{٢} = ١٥$

(من + ت من) = $١٥ - ٢ \times ٤ = ١٥$

(من + ت من) = $١٥ - ٨ = ٧$

يكتمل الحل ∴ من = ١، من = ٤

(١٣) من + ت من = $\frac{\text{ت} + ٧}{\text{ت} + ٢} \times \frac{\text{ت} - ٢}{\text{ت} - ٢}$

$$= \frac{\text{ت} + ٧ - ٨ + ٦}{\text{ت} + ٢} = \frac{\text{ت} + ٥}{\text{ت} + ٢}$$

∴ من = ٢، من = ٣

∴ $\sqrt{٣ + ٤ \text{ ت}} = \pm (٢ + ٣ \text{ ت})$

وتكمل كما سبق والجواب

$$\pm \frac{\sqrt{٣ + ٤ \text{ ت}}}{٢} (٣ + ٢ \text{ ت})$$

(١٤) من = $\frac{\text{ت} + ١}{\text{ت} - ١} \times \frac{\text{ت} + ٣١}{\text{ت} + ١} = \frac{\text{ت} + ٣١}{\text{ت} - ١}$

$$8 = (\text{جتا } 90^\circ + \text{ت } 90^\circ)$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{2}} (\text{جتا } 90^\circ + \text{ت } 90^\circ) \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\text{ت } 90^\circ + \sqrt{2} \text{جتا } 90^\circ)$$

$$\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\text{جتا } 90^\circ + \text{ت } 90^\circ) \sqrt{2}$$

$$\text{حيث } 0, 1, 2, 3, 4$$

$$\therefore \text{قيم المقدار } \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\text{جتا } 90^\circ + \text{ت } 90^\circ)$$

$$\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\text{جتا } 90^\circ + \text{ت } 90^\circ)$$

$$\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\text{جتا } 162^\circ + \text{ت } 162^\circ)$$

$$\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\text{جتا } 234^\circ + \text{ت } 234^\circ)$$

$$(\text{جتا } 306^\circ + \text{ت } 306^\circ)$$

$$(17) - 64 = \text{ت } 64 = \text{ت } 64 - 64 = (\text{جتا } 270^\circ + \text{ت } 270^\circ)$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{2}} (\text{جتا } 162^\circ + \text{ت } 162^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\text{جتا } 162^\circ + \text{ت } 162^\circ)$$

$$+ \text{ت } 162^\circ + \text{جتا } 162^\circ$$

$$\text{حيث } 0, 1, 2, 3, 4 \text{ وتكمل كالسابق}$$

$$(18) \text{ مقياس } 2 = \text{ت } 1 + \text{جتا } 1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{جا } 1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \therefore 45^\circ$$

$$\therefore 2 = \text{ت } 1 + \text{جتا } 1 = 45^\circ$$

$$2 = \text{ت } 1 + \text{جتا } 1 = 90^\circ$$

$$+ \text{ت } 1 + \text{جتا } 1 = 120^\circ + 30^\circ$$

$$\text{ت } 1 + \text{جتا } 1 = 120^\circ + 30^\circ \text{ حيث } 0, 1, 2, 3, 4$$

$$(19) 32 = 1 \times 32 = 32 = \text{ت } 0 + \text{جتا } 0$$

$$32 = \text{ت } 0 + \text{جتا } 0 = 72^\circ$$

$$\text{حيث } 0, 1, 2, 3, 4 \text{ وتكمل}$$

$$\frac{\text{ت } 1 + \text{جتا } 1}{2} =$$

$$\text{من } \frac{\text{ت } 1 + \text{جتا } 1}{2} \times \frac{\text{ت } 1 + \text{جتا } 1}{2} =$$

$$\frac{\text{ت } 1 + \text{جتا } 1}{2} = \frac{\text{ت } 1 + \text{جتا } 1}{2} = \frac{\text{ت } 1 + \text{جتا } 1}{2}$$

$$\sqrt{2} = \text{ت } 1 + \text{جتا } 1$$

$$\text{والجواب } \pm \frac{\sqrt{2}}{2} (\text{ت } 1 + \text{جتا } 1)$$

(15) بقسمة طرفي المعادلة على 2 +

$$\therefore \text{من } \frac{(\text{ت } 1 + \text{جتا } 1)^2}{(2 + \text{ت } 1)} = \frac{(\text{ت } 1 + \text{جتا } 1)^2}{(2 + \text{ت } 1)}$$

$$\therefore \text{من } \frac{(\text{ت } 1 + \text{جتا } 1)^2}{(2 + \text{ت } 1)} \times \frac{(\text{ت } 1 + \text{جتا } 1)^2}{(2 + \text{ت } 1)} = 4 -$$

$$\text{صفر} = \frac{(\text{ت } 1 + \text{جتا } 1)^2}{(2 + \text{ت } 1)} \times \frac{(\text{ت } 1 + \text{جتا } 1)^2}{(2 + \text{ت } 1)}$$

$$\therefore \text{من } \frac{(\text{ت } 1 + \text{جتا } 1)^2}{(2 + \text{ت } 1)} = \frac{(\text{ت } 1 + \text{جتا } 1)^2}{(2 + \text{ت } 1)}$$

$$\therefore \text{من } \frac{(\text{ت } 1 + \text{جتا } 1)^2}{(2 + \text{ت } 1)} = \frac{(\text{ت } 1 + \text{جتا } 1)^2}{(2 + \text{ت } 1)}$$

$$\therefore \text{من } \frac{(\text{ت } 1 + \text{جتا } 1)^2}{(2 + \text{ت } 1)} = \frac{(\text{ت } 1 + \text{جتا } 1)^2}{(2 + \text{ت } 1)}$$

$$\frac{\text{ت } 1 + \text{جتا } 1}{2} =$$

$$\text{مناسبق } \sqrt{2} = \text{ت } 1 + \text{جتا } 1$$

$$\therefore \text{من } \frac{\text{ت } 1 + \text{جتا } 1}{2} = \frac{\text{ت } 1 + \text{جتا } 1}{2}$$

$$\therefore \text{مجموعة الحل } = \{ \text{ت } 1 + \text{جتا } 1, \text{ت } 1 + \text{جتا } 1 \}$$

$$(16) \text{ المقياس } 2 = \text{جتا } 1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ جا } 1 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore 150^\circ$$

$$\therefore 8 = \text{ت } 1 + \text{جتا } 1 = 150^\circ$$

$$\frac{[(\omega + 1)^2 + \omega^2][(\omega + 1)^2 + \omega^2]}{[\omega^2 - (\omega + 1)][\omega^2 - (\omega + 1)]} = \text{الأيمن (٤)}$$

$$\frac{(\omega^2 - \omega^2)(\omega^2 - \omega^2)}{(\omega^2 - \omega^2)(\omega^2 - \omega^2)} =$$

$$\frac{\omega^2 \times \omega^2}{\omega^2 - \omega^2} = \frac{9}{2} = \text{الأيمن}$$

(٥) الأيمن =

$$\left[\frac{(\omega^2 + 1)(\omega^2 - \omega^2) - (\omega^2 + 1)(\omega^2 - \omega^2)}{(\omega^2 + 1)(\omega^2 + 1)} \right] \pm \sqrt{3} =$$

$$\frac{\omega^2 + 1 + \omega^2 - \omega^2 - \omega^2 - 1 - \omega^2 - 1 - \omega^2 + \omega^2}{\omega^2 + 1 + \omega^2 + 1} =$$

$$\frac{\omega^2 - \omega^2 \times \sqrt{3} \pm}{(\omega^2 + \omega^2)^2 + 2} =$$

$$\frac{(\omega^2 - \omega^2) \times \sqrt{3} \pm}{(\omega^2 + \omega^2)^2 + 2} =$$

$$\frac{\sqrt{3} \pm \times 10 \times \sqrt{3}}{12} =$$

$$\frac{5}{2} = \frac{5}{2} = \text{الأيمن}$$

(٦) الأيمن = (٥ + \omega)

$$\left[\frac{1}{(\omega - 1)^2 + \omega^2} - \frac{1}{(\omega - 1)^2 + \omega^2 + 5} \right]$$

$$\left(\frac{1}{\omega + 2} - \frac{1}{\omega + 2} \right) (\omega + 5) =$$

$$(٢٠) \text{ س } = 1 - \text{جتا ط} + \text{ت جاط}$$

$$\text{س} = (\text{جتا } 180 + \text{ت جاط } 180)$$

$$= [(\text{جتا } 72 \times 2 + 36) + 72 \times 2 + 36] =$$

$$\text{حيث ر} = 1, 2, 2, 1, 0 \text{ وتكمل}$$

$$(٢١) \text{ ع } = \sqrt{3} - 1 = \text{ت} = \left(\frac{\text{جتا } 50}{2} + \frac{\text{ت جاط } 50}{2} \right)$$

$$\therefore \text{ع} = \sqrt{3} - 1 = \left(\frac{\text{جتا } 50}{2} + \frac{\text{ت جاط } 50}{2} \right)$$

$$= \sqrt{3} - 1 = \left(\frac{\text{جتا } 50}{2} + \frac{\text{ت جاط } 50}{2} \right)$$

$$1 \left(\frac{\text{جتا } 50}{2} + \frac{\text{ت جاط } 50}{2} \right)$$

$$\text{حيث ر} = 1, 2, 2, 1, 0$$

على تمريين (١١)

$$(١) \text{ الأيمن} = [(\omega + 1)^2 + \omega^2][\omega^2 - (\omega + 1)]$$

$$[(\omega + 1)^2 +$$

$$(\omega^2 - \omega^2)(\omega^2 - \omega^2) =$$

$$= 81 = \omega^2 - \omega^2 = \omega^2 \times \omega^2 = \text{الأيمن}$$

$$(٢) \text{ الأيمن} = \left(\frac{1}{\omega + 1} - \frac{1}{\omega + 1} \right)$$

$$\left(\frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega} \right) =$$

$$= 3 = \text{الأيمن} = (\sqrt{3} \pm) = (\omega + \omega -) =$$

$$(٣) \text{ الأيمن} = \left(\frac{1}{\omega} - 1 \right) - \left(\frac{1}{\omega} + 2 \right) =$$

$$(\omega - 1) - (\omega + 2) =$$

$$(\omega + \omega - 1) - \omega + \omega + 2 =$$

$$= 3 = \text{الأيمن} = \omega^2 + \omega^2 + 2 =$$

$$(\omega^7 + 5)(\omega^{10} - 1) =$$

$$(\omega^7 + \omega)(\omega^9 - 1) = \omega^7 \omega^9 - \omega^7 \omega^0 - \omega^1 \omega^9 + \omega^1 \omega^0 =$$

$$= 29 = \text{عدد حقيقي}$$

$$(10) \text{ المقدار } = \left(\frac{1+i}{(1-\omega)^4 + \omega + \omega^{12} + 1} \right) =$$

$$\left(\frac{1+i}{1-\omega + \omega + 1} \right) =$$

$$1 = \omega^7 (\omega^7) = \left[\frac{1+i}{(1+i)\omega} \right] =$$

وهذا لا يتوقف على قيمة ω

$$(11) \text{ الأيمن } = \left[\frac{\omega^7 - \omega^2}{\omega^7 - \omega^2} - \frac{\omega^3 - \omega^0}{\omega^3 - \omega^0} \right] =$$

$$\left[\frac{(\omega^7 - \omega^2)\omega}{\omega^7 - \omega^2} - \frac{(\omega^3 - \omega^0)\omega}{\omega^3 - \omega^0} \right] =$$

$$\text{الأيسر} = 9 = (\sqrt[3]{27} \pm) = (\omega - \omega^7) =$$

(12) المتتابعة هندسية

$$\frac{[\omega^{-1}]^n}{\omega^{-1}} = \text{ج}$$

$$1 = \frac{1-1}{\omega^{-1}} = \frac{\omega^{-1}}{\omega^{-1}} = \text{ج} \rightarrow \text{عندما } n=3$$

عندما $n=3$

$$1 = \frac{1-1}{\omega^{-1}} = \frac{\omega^{-1}}{\omega^{-1}} = \text{ج} \rightarrow$$

عندما $n=3$

$$\frac{\omega^{-1}}{\omega^{-1}} = \frac{\omega^{-1}}{\omega^{-1}} = \text{ج} \rightarrow$$

$$\omega - \omega + 1 = \frac{(\omega + 1)(\omega - 1)}{\omega - 1} =$$

$$(\omega + 5) =$$

$$\left| \frac{\omega + 2 + \omega - 2}{(\omega - 2)(\omega + 2)} \right| (\omega + 5) =$$

$$\left(\frac{1}{\omega - 1} \right) (\omega + 5) =$$

$$\left(\frac{1}{(\omega - 1) - 1} \right) (\omega + 5) =$$

$$\text{الأيسر} = 1 = \frac{1}{\omega + 5} \times (\omega + 5) =$$

$$(7) \text{ الأيمن } = \left[\frac{1}{(\omega - \omega)^2 - 1} - \frac{1}{(\omega - \omega)^2 + 1} \right] =$$

$$\left[\frac{1}{\sqrt[3]{27} - 1} - \frac{1}{\sqrt[3]{27} + 1} \right] =$$

$$\left[\frac{\sqrt[3]{27} - 1}{(\sqrt[3]{27} - 1)(\sqrt[3]{27} + 1)} \right] =$$

$$\frac{\sqrt[3]{27} - 1}{169} = \left(\frac{\sqrt[3]{27} - 1}{169} \right) =$$

$$\text{الأيسر} = \frac{18}{169} =$$

$$(8) \text{ الأيمن } = (\omega + 1)(\omega + 1) =$$

$$\omega^2 + \omega + \omega + 1 =$$

$$1 + (\omega + \omega) + 1 =$$

$$1 + (\omega + \omega) =$$

$$1 + \omega + \omega =$$

$$\text{الأيسر} = 1 + \omega =$$

$$(9) \text{ المقدار } = (\omega^4 - \omega^3 + 1)(\omega^4 - \omega^3 + 1) =$$

$$[(\omega - 1) - \omega^3 + 1][\omega^4 - (\omega - 1) + 1] =$$

عنصر في المصفوفة (١ ٢)

(١) (٢)

$$(1) (1) \quad 2 = 2 \text{ من}$$

$$\text{من} + 2 = 2 \leftarrow \text{من} = 1$$

$$\therefore \text{المحدد هو} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(2) (1) \quad 1 = 1 \text{ من}, 2 = 2 \text{ من} + 1 = 3 \text{ من}, 4 = 4 \text{ من} - 1 = 3 \text{ من}$$

$$\therefore \text{المحدد هو} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(2) (2) \quad 2 = 2 \text{ من}, 3 = 3 \text{ من} + 1 = 4 \text{ من}, 4 = 4 \text{ من} + 1 = 5 \text{ من}, 5 = 5 \text{ من} - 1 = 4 \text{ من}$$

$$\therefore \text{المحدد هو} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

(١) (٢)

$$11 = (0 \times 2) - (1 \times 1) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$(2) (1) \quad 10 = (0 \times 0) - (0 \times 2) = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(2) (2) \quad 0 = (2 \times 2) - (4 \times 1) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$(2) (3) \quad 7 = (0 \times 0) - (0 \times 0) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(2) (4) \quad 0 = (0 \times 0) - (2 \times 0) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(2) (5) \quad 8 = (2 \times 4) - (0 \times 1) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\text{بفك المحدد عن طريق عناصر الصف الأول} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \times 1 + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \times 0 - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \times 0 =$$

$$= 0 + 0 - 12 = -12$$

$$(2) (2) \quad \text{باستخدام عناصر من} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \times 1 + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \times 2 - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \times 3 =$$

$$= (2-9) \times 1 + (4-3) \times 2 - (6-1) \times 3 =$$

$$= 18 = 21 + 2 + 0 =$$

$$(2) (3) \quad \text{باستخدام عناصر من} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \times 1 + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \times 0 - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \times 0 =$$

$$= 1 = 1 - 0 + 0 =$$

$$(2) (4) \quad \text{باستخدام عناصر من} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 4 \\ 9 & 8 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 6 & 4 & 2 \\ 9 & 7 & 8 \end{vmatrix} \times 1 + \begin{vmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 6 & 4 & 2 \\ 9 & 7 & 8 \end{vmatrix} \times 2 - \begin{vmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 6 & 4 & 2 \\ 9 & 7 & 8 \end{vmatrix} \times 3 =$$

$$= 3 \times 3 + 6 \times 2 - 9 \times 1 =$$

بفك المحدد عن طريق عناصر الضف الأول

$$\therefore x = \frac{2}{3}$$

∴ س (س' - ۲ س) = ۳ س

∴ س (س^۱ - س^۲ - س^۳) = صفر

∴ مس (مس-۳) (مس+۱) = مسفر

∴ من مظهر a, b, c

طبرستان و قزوین (۱۳۷۱)

(1) (1) | ٢- ١- | باستخدام خاصية مرور المحدد

المحدد المطلوب = $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} =$

(ب) | ۶ | ۵-
| ۲ | ۱- بتبدیل عناصر ص ۱، ص ۲

بضرب إشارة المحدد \times ص،

$$\text{المحدد المطلوب} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

(ج) ۴- ۴ | ۵- ۵ | ۶- ۶ | ۷- ۷ | ۸- ۸ | ۹- ۹ | ۱۰- ۱۰ | ۱۱- ۱۱ | ۱۲- ۱۲ | ۱۳- ۱۳ | ۱۴- ۱۴ | ۱۵- ۱۵ | ۱۶- ۱۶ | ۱۷- ۱۷ | ۱۸- ۱۸ | ۱۹- ۱۹ | ۲۰- ۲۰ | ۲۱- ۲۱ | ۲۲- ۲۲ | ۲۳- ۲۳ | ۲۴- ۲۴ | ۲۵- ۲۵ | ۲۶- ۲۶ | ۲۷- ۲۷ | ۲۸- ۲۸ | ۲۹- ۲۹ | ۳۰- ۳۰ | ۳۱- ۳۱ | ۳۲- ۳۲ | ۳۳- ۳۳ | ۳۴- ۳۴ | ۳۵- ۳۵ | ۳۶- ۳۶ | ۳۷- ۳۷ | ۳۸- ۳۸ | ۳۹- ۳۹ | ۴۰- ۴۰ | ۴۱- ۴۱ | ۴۲- ۴۲ | ۴۳- ۴۳ | ۴۴- ۴۴ | ۴۵- ۴۵ | ۴۶- ۴۶ | ۴۷- ۴۷ | ۴۸- ۴۸ | ۴۹- ۴۹ | ۵۰- ۵۰ | ۵۱- ۵۱ | ۵۲- ۵۲ | ۵۳- ۵۳ | ۵۴- ۵۴ | ۵۵- ۵۵ | ۵۶- ۵۶ | ۵۷- ۵۷ | ۵۸- ۵۸ | ۵۹- ۵۹ | ۶۰- ۶۰ | ۶۱- ۶۱ | ۶۲- ۶۲ | ۶۳- ۶۳ | ۶۴- ۶۴ | ۶۵- ۶۵ | ۶۶- ۶۶ | ۶۷- ۶۷ | ۶۸- ۶۸ | ۶۹- ۶۹ | ۷۰- ۷۰ | ۷۱- ۷۱ | ۷۲- ۷۲ | ۷۳- ۷۳ | ۷۴- ۷۴ | ۷۵- ۷۵ | ۷۶- ۷۶ | ۷۷- ۷۷ | ۷۸- ۷۸ | ۷۹- ۷۹ | ۸۰- ۸۰ | ۸۱- ۸۱ | ۸۲- ۸۲ | ۸۳- ۸۳ | ۸۴- ۸۴ | ۸۵- ۸۵ | ۸۶- ۸۶ | ۸۷- ۸۷ | ۸۸- ۸۸ | ۸۹- ۸۹ | ۹۰- ۹۰ | ۹۱- ۹۱ | ۹۲- ۹۲ | ۹۳- ۹۳ | ۹۴- ۹۴ | ۹۵- ۹۵ | ۹۶- ۹۶ | ۹۷- ۹۷ | ۹۸- ۹۸ | ۹۹- ۹۹ | ۱۰۰- ۱۰۰ | ۱۰۱- ۱۰۱ | ۱۰۲- ۱۰۲ | ۱۰۳- ۱۰۳ | ۱۰۴- ۱۰۴ | ۱۰۵- ۱۰۵ | ۱۰۶- ۱۰۶ | ۱۰۷- ۱۰۷ | ۱۰۸- ۱۰۸ | ۱۰۹- ۱۰۹ | ۱۱۰- ۱۱۰ | ۱۱۱- ۱۱۱ | ۱۱۲- ۱۱۲ | ۱۱۳- ۱۱۳ | ۱۱۴- ۱۱۴ | ۱۱۵- ۱۱۵ | ۱۱۶- ۱۱۶ | ۱۱۷- ۱۱۷ | ۱۱۸- ۱۱۸ | ۱۱۹- ۱۱۹ | ۱۲۰- ۱۲۰ | ۱۲۱- ۱۲۱ | ۱۲۲- ۱۲۲ | ۱۲۳- ۱۲۳ | ۱۲۴- ۱۲۴ | ۱۲۵- ۱۲۵ | ۱۲۶- ۱۲۶ | ۱۲۷- ۱۲۷ | ۱۲۸- ۱۲۸ | ۱۲۹- ۱۲۹ | ۱۳۰- ۱۳۰ | ۱۳۱- ۱۳۱ | ۱۳۲- ۱۳۲ | ۱۳۳- ۱۳۳ | ۱۳۴- ۱۳۴ | ۱۳۵- ۱۳۵ | ۱۳۶- ۱۳۶ | ۱۳۷- ۱۳۷ | ۱۳۸- ۱۳۸ | ۱۳۹- ۱۳۹ | ۱۴۰- ۱۴۰ | ۱۴۱- ۱۴۱ | ۱۴۲- ۱۴۲ | ۱۴۳- ۱۴۳ | ۱۴۴- ۱۴۴ | ۱۴۵- ۱۴۵ | ۱۴۶- ۱۴۶ | ۱۴۷- ۱۴۷ | ۱۴۸- ۱۴۸ | ۱۴۹- ۱۴۹ | ۱۵۰- ۱۵۰ | ۱۵۱- ۱۵۱ | ۱۵۲- ۱۵۲ | ۱۵۳- ۱۵۳ | ۱۵۴- ۱۵۴ | ۱۵۵- ۱۵۵ | ۱۵۶- ۱۵۶ | ۱۵۷- ۱۵۷ | ۱۵۸- ۱۵۸ | ۱۵۹- ۱۵۹ | ۱۶۰- ۱۶۰ | ۱۶۱- ۱۶۱ | ۱۶۲- ۱۶۲ | ۱۶۳- ۱۶۳ | ۱۶۴- ۱۶۴ | ۱۶۵- ۱۶۵ | ۱۶۶- ۱۶۶ | ۱۶۷- ۱۶۷ | ۱۶۸- ۱۶۸ | ۱۶۹- ۱۶۹ | ۱۷۰- ۱۷۰ | ۱۷۱- ۱۷۱ | ۱۷۲- ۱۷۲ | ۱۷۳- ۱۷۳ | ۱۷۴- ۱۷۴ | ۱۷۵- ۱۷۵ | ۱۷۶- ۱۷۶ | ۱۷۷- ۱۷۷ | ۱۷۸- ۱۷۸ | ۱۷۹- ۱۷۹ | ۱۸۰- ۱۸۰ | ۱۸۱- ۱۸۱ | ۱۸۲- ۱۸۲ | ۱۸۳- ۱۸۳ | ۱۸۴- ۱۸۴ | ۱۸۵- ۱۸۵ | ۱۸۶- ۱۸۶ | ۱۸۷- ۱۸۷ | ۱۸۸- ۱۸۸ | ۱۸۹- ۱۸۹ | ۱۹۰- ۱۹۰ | ۱۹۱- ۱۹۱ | ۱۹۲- ۱۹۲ | ۱۹۳- ۱۹۳ | ۱۹۴- ۱۹۴ | ۱۹۵- ۱۹۵ | ۱۹۶- ۱۹۶ | ۱۹۷- ۱۹۷ | ۱۹۸- ۱۹۸ | ۱۹۹- ۱۹۹ | ۲۰۰- ۲۰۰ | ۲۰۱- ۲۰۱ | ۲۰۲- ۲۰۲ | ۲۰۳- ۲۰۳ | ۲۰۴- ۲۰۴ | ۲۰۵- ۲۰۵ | ۲۰۶- ۲۰۶ | ۲۰۷- ۲۰۷ | ۲۰۸- ۲۰۸ | ۲۰۹- ۲۰۹ | ۲۱۰- ۲۱۰ | ۲۱۱- ۲۱۱ | ۲۱۲- ۲۱۲ | ۲۱۳- ۲۱۳ | ۲۱۴- ۲۱۴ | ۲۱۵- ۲۱۵ | ۲۱۶- ۲۱۶ | ۲۱۷- ۲۱۷ | ۲۱۸- ۲۱۸ | ۲۱۹- ۲۱۹ | ۲۲۰- ۲۲۰ | ۲۲۱- ۲۲۱ | ۲۲۲- ۲۲۲ | ۲۲۳- ۲۲۳ | ۲۲۴- ۲۲۴ | ۲۲۵- ۲۲۵ | ۲۲۶- ۲۲۶ | ۲۲۷- ۲۲۷ | ۲۲۸- ۲۲۸ | ۲۲۹- ۲۲۹ | ۲۳۰- ۲۳۰ | ۲۳۱- ۲۳۱ | ۲۳۲- ۲۳۲ | ۲۳۳- ۲۳۳ | ۲۳۴- ۲۳۴ | ۲۳۵- ۲۳۵ | ۲۳۶- ۲۳۶ | ۲۳۷- ۲۳۷ | ۲۳۸- ۲۳۸ | ۲۳۹- ۲۳۹ | ۲۴۰- ۲۴۰ | ۲۴۱- ۲۴۱ | ۲۴۲- ۲۴۲ | ۲۴۳- ۲۴۳ | ۲۴۴- ۲۴۴ | ۲۴۵- ۲۴۵ | ۲۴۶- ۲۴۶ | ۲۴۷- ۲۴۷ | ۲۴۸- ۲۴۸ | ۲۴۹- ۲۴۹ | ۲۵۰- ۲۵۰ | ۲۵۱- ۲۵۱ | ۲۵۲- ۲۵۲ | ۲۵۳- ۲۵۳ | ۲۵۴- ۲۵۴ | ۲۵۵- ۲۵۵ | ۲۵۶- ۲۵۶ | ۲۵۷- ۲۵۷ | ۲۵۸- ۲۵۸ | ۲۵۹- ۲۵۹ | ۲۶۰- ۲۶۰ | ۲۶۱- ۲۶۱ | ۲۶۲- ۲۶۲ | ۲۶۳- ۲۶۳ | ۲۶۴- ۲۶۴ | ۲۶۵- ۲۶۵ | ۲۶۶- ۲۶۶ | ۲۶۷- ۲۶۷ | ۲۶۸- ۲۶۸ | ۲۶۹- ۲۶۹ | ۲۷۰- ۲۷۰ | ۲۷۱- ۲۷۱ | ۲۷۲- ۲۷۲ | ۲۷۳- ۲۷۳ | ۲۷۴- ۲۷۴ | ۲۷۵- ۲۷۵ | ۲۷۶- ۲۷۶ | ۲۷۷- ۲۷۷ | ۲۷۸- ۲۷۸ | ۲۷۹- ۲۷۹ | ۲۸۰- ۲۸۰ | ۲۸۱- ۲۸۱ | ۲۸۲- ۲۸۲ | ۲۸۳- ۲۸۳ | ۲۸۴- ۲۸۴ | ۲

$$\text{المحدد المطلوب} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} =$$

(٤)	١	٠	٠
	٣	٢	١
	٤	٦	٥

بالفك عن طريق عناصر هـ،

	۲-	۱	۰	(د)
	۳-	۰	۱-	
بـ استخدام عناصر مـ	۰	۳	۲	

$$\left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{array} \right| \times 7 + \left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{array} \right| \times 1 - \left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{array} \right| \times 0 =$$

$$= \text{صفر} - 1 \times 6 - 2 \times 2 - 3 = \text{صفر}$$

(و)	۲	۰	۰
	۰	۴	۰
	۱	۰	۱-

یاستخدام عناصر می،

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} x^2 =$$

$$A_{-} = \text{صفر} + \text{صفر} - 1 \times 2 =$$

$$1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} (1) (2)$$

$$1. = 2' + 1.$$

$$\therefore \text{مس } 1 + \text{مس } 2 + 1 = \text{مسفر}$$

$$\therefore (1 + r)^n = \frac{\text{مبلغ}}{\text{مبلغ}}$$

$$\therefore (m+1) = 1 \Rightarrow m = 0$$

$$\sqrt{1-\nu} \pm = \nu \therefore \quad 1-\nu = \nu^2 \therefore$$

∴ من ليس لها حل في ح

(ب) ۱ ۲

١٠٠ من ١-٢ = ١

$$1 \pm \frac{1}{n} = \frac{n \pm 1}{n} \therefore \quad 1 \pm \frac{1}{n} = \frac{n \pm 1}{n}$$

$$(ج) \quad \begin{array}{c|cc} & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۵ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۰ & ۰ \end{array} = ۲$$

$$\begin{array}{r|rr} 1 & 2 & \\ \hline 5 & 6 & \end{array} \times 1 =$$

$$\text{المحدد المطلوب} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

١-	١-	٢-	بذلك عن طريق عناصر
٠	٢	١-	
٠	٦-	٥	الصود الأول ع

$$\text{صفر} + \text{صفر} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \times 1 =$$

$$\text{المحدد المطلوب} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} =$$

بالفك عن طريق	١-	١	(و)
عناصر من	١-	٢	
	٥	٦	

$$\text{مقدار} + \left| \frac{1}{0} - \frac{1}{0} \right| \times (1-) - \left| \frac{1}{0} - \frac{2}{1} \right| \times 1 =$$

(لاحظ أن المحدد الثاني ينعدم لأن $v_1 \equiv v_2$)

$$\text{المحدد المطلوب} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$(1) (2) \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \text{مقرر (لأن } 1 \equiv 1 \text{ م. م.)}$$

(ب) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \text{مقرر (لأن جميع عناصره صفر، أصغر)}$

(ج)
$$Y = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$
 (لأن عناصر Y عناصر X)

$$\begin{vmatrix} \theta_- & 1 & \cdot \\ \tau_- & \cdot & 1_- \\ \cdot & \tau & \theta \end{vmatrix} \quad (2)$$

٢٠٠٠ : العدد = ٢٠٠٠

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \tau & 0 & 1 \\ 0 & \tau & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \tau & 0 & 1 \\ 0 & \tau & 0 \end{vmatrix}.$$

بـلـغـرـاج - ۱ - مـشـتـرـك مـن كـل مـن مـس ، ۱ مـس ، ۲ مـس ، ۳ مـس

لمجد الطرف الأيسر

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \end{array}$$

$$\text{مسار} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} \therefore$$

$$\text{مقرر} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} \times 2 = -2$$

$$\text{مقرر} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

	۲	۱-	۱	(۵)
ص ۱-۳-۱	۱-	۲	۳	
ص ۱-۳-۲	۱	۱	۴	

$$\text{صفر (لأن ص} \equiv \text{ص} \text{)} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 7 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\text{مفر (لأن } 2 = 2 \text{ ع } 1 \text{ ع } 1) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} \quad (9)$$

$$= \begin{vmatrix} \text{س} & \text{س} & \text{س} + \text{ص} + \text{ع} \\ \text{ص} & \text{س} + \text{ع} & \text{س} + \text{ص} + \text{ع} \\ \text{س} + \text{ص} & \text{ع} & \text{س} + \text{ص} + \text{ع} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} \text{س} & \text{س} & \text{س} \\ \text{ص} & \text{س} + \text{ع} & \text{ص} \\ \text{س} + \text{ص} & \text{ع} & \text{ع} \end{vmatrix}$$

بإخراج (س+ص+ع) مشترك من ع، للمحدد الأول
وبإخراج س مشترك من ص ١ للمحدد الثاني

$$= (\text{س} + \text{ص} + \text{ع}) \begin{vmatrix} \text{س} & \text{س} & ١ \\ \text{ص} & \text{س} + \text{ع} & ١ \\ \text{س} + \text{ص} & \text{ع} & ١ \end{vmatrix}$$

$$+ \text{س} \times \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ \text{ص} & \text{س} + \text{ع} & \text{ص} \\ \text{س} + \text{ص} & \text{ع} & \text{ع} \end{vmatrix}$$

بإجراء ص-١، ص-٢، ص-٣، ص-٤ للمحدد الأول
وكذلك ع-١، ع-٢، ع-٣ للمحدد الثاني

$$= (\text{س} + \text{ص} + \text{ع}) \begin{vmatrix} \text{س} & \text{س} & ١ \\ \text{ص} - \text{ص} & \text{ع} & ٠ \\ \text{ص} - \text{ع} & \text{س} - \text{ع} & ٠ \end{vmatrix}$$

$$+ \text{س} \times \begin{vmatrix} ١ & \text{ص} & \text{س} + \text{ع} - \text{ص} \\ \text{ص} & \text{س} + \text{ع} - \text{ص} & \text{س} + \text{ص} - \text{ع} \\ \text{ع} & \text{س} + \text{ص} - \text{ع} & \text{ع} \end{vmatrix}$$

بفك المحدد الأول عن طريق عناصر ع، والمحدد

الثاني بالصورة المثلثية السفلى أي أن قيمته تساوي

حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي

$$= (\text{س} + \text{ص} + \text{ع}) \times \begin{vmatrix} \text{س} - \text{ص} & \text{ع} \\ \text{ص} & \text{ع} - \text{ص} \end{vmatrix} + (\text{س} + \text{ص} - \text{ع})(\text{ص} - \text{ع} + \text{ص})(\text{ع} - \text{ص} + \text{ص})$$

$$= (\text{س} + \text{ص} + \text{ع}) [\text{ع} - \text{ص} - (\text{ع} - \text{ص})(\text{ص} - \text{ص})]$$

$$+ (\text{س} + \text{ص} - \text{ع})(\text{ص} - \text{ع} + \text{ص})(\text{ع} - \text{ص} + \text{ص}) = \text{س} \text{ ص} \text{ ع}$$

$$(٣) (١) \begin{vmatrix} ١ & ١ & \text{س} \\ ١ & \text{س} & ١ \\ \text{س} & ١ & ١ \end{vmatrix} \text{ بتبديل عناصر ع، ع، ع}$$

$$= - \begin{vmatrix} \text{س} & ١ & ١ \\ ١ & \text{س} & ١ \\ \text{س} - \text{ص} - \text{ص} & ١ & \text{س} - \text{ص} - \text{ص} \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} \text{س} & ١ & ١ \\ \text{س} - ١ & \text{س} - ١ & ٠ \\ \text{س} - ١ & \text{س} - ١ & ٠ \end{vmatrix}$$

بإخراج (س-١) مشترك من كل من عناصر ص-٢، ص-٣

$$= - (س - ١) \begin{vmatrix} \text{س} & ١ & ١ \\ ١ & ١ - ١ & ٠ \\ \text{س} + \text{ص} - ١ & ١ & ٠ \end{vmatrix}$$

$$= - (س - ١) \begin{vmatrix} \text{س} & ١ & ١ \\ ١ & ١ - ١ & ٠ \\ \text{س} + ٢ & ١ & ٠ \end{vmatrix}$$

للمحدد بالصورة المثلثية العليا

∴ قيمته = حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي

$$= - (س - ١) \times (س + ٢) - (س - ١)$$

$$= - (س - ١) (س + ٢) - (س - ١)$$

$$= - (س - ١) (س + ٢ + ١)$$

$$(ب) \begin{vmatrix} \text{س} + \text{ع} & \text{س} & \text{س} \\ \text{ص} & \text{س} + \text{ع} & \text{ص} \\ \text{ع} & \text{ع} & \text{س} + \text{ص} \end{vmatrix}$$

بإجراء ع+١، ع+٢، ع+٣

$$= \begin{vmatrix} \text{س} + \text{ع} + ١ & \text{س} + \text{ع} + ٢ & \text{س} + \text{ع} + ٣ \\ \text{ص} & \text{س} + \text{ع} & \text{ص} \\ \text{ع} + ١ & \text{ع} + ٢ & \text{س} + \text{ص} \end{vmatrix}$$

بتحويل المحدد إلى مجموع محددين

$$(ب-أ)(أ-ج)(ج-ب)(أ+ب+ج) =$$

$$(أ-ب)(ب-ج)(ج-أ)(أ+ب+ج) = \text{الأيسر}$$

$$(ب) \text{ الطرف الأيمن} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

يلجأ إلى إجراء ١، ٢، ٣

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

يلجأ إلى إجراء (١+٢) مشترك من ٣،

$$(1+2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

من ١، ٢، ٣

$$(1+2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

المحدد بالصورة المثلثية

$$(1+2) = (1-1) = \text{الطرف الأيسر}$$

$$(ج) \text{ الطرف الأيمن} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

يلجأ إلى إجراء ١، ٢، ٣

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

بتحويل المحدد إلى مجموع محددين

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$(ج) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \text{ المحدد قيمته = صفر}$$

أنظر طريقة الحل في (٢) (٤)

$$(٤) (أ) \text{ الطرف الأيمن} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

يلجأ إلى إجراء ١، ٢، ٣

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ (1+2) & 1 & 1 \\ (1+2) & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

يلجأ إلى إجراء (١-٢) مشترك من ٣،

(١-٢) مشترك من ٣،

$$(1-2) =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

يلجأ إلى إجراء ١، ٢، ٣

$$(1-2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

يلجأ إلى إجراء (١-٢) مشترك من ٣،

$$(1-2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

المحدد بالصورة المثلثية قيمته تساوي حاصل ضرب

عناصر القطر الرئيسي

$$(5) \text{ الطرف الأيمن} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$= (1 - 0 - 0) = 1$$

$$\text{الطرف الأيسر} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$= (1 - 0 - 0) = 1$$

$$= 1 - 0 - 0 = 1$$

$$= 1 - 0 - 0 = 1$$

$$= (1 - 0 - 0) = 1$$

تصميم القاعدة لمحدد الدرجة الثالثة:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(6) (1) \text{ لكي تكون من عامل } 0 \text{، الصفر حذر}$$

$$\text{أي أن: } \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

وهذه المعادلة تتحقق لجميع قيم $0 \leq x < 1$

$$(ب) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$0 = 1 - 0 = 1$$

$$(ج) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

وهذا يتحقق دائما بغض النظر عن قيمة x وذلك لأن عناصر

$0 \leq x < 1$ ، فتتغير قيمة المحدد

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

يلخارج $(1 + 1 + 1)$ مشترك من x ، للأول

وتبديل عناصر x ، 0 ، 1 للمحدد الثاني

$$= (1 + 1 + 1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

يلجاء من 0 ، 1 ، 0 ، 1 ، 0 ، 1 للمحدد الأول

وكذلك من 0 ، 1 ، 0 ، 1 ، 0 ، 1 للمحدد الثاني

$$= (1 + 1 + 1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

لاحظ أن كلا من المحددين بالصورة المثلثية

$$= (1 + 1 + 1) (1 - 1) (1 - 1) = 0$$

$$(1 + 1)$$

$$= (1 + 1) (1 + 1) (1 + 1) = 8$$

$$= (1 + 1) (1 + 1) (1 + 1) = 8$$

$$= (1 + 1) (1 + 1) (1 + 1) = 8$$

$$= 1 + 1 + 1 = 3$$

$$(2) (1) \quad 12 = ع^2 + ص^2 + س^2$$

$$2 = ع + ص - س$$

$$2 = ع - ص + س$$

$$20 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \Delta$$

$$20 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 12 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \Delta$$

$$0 = \begin{vmatrix} 2 & 12 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \Delta$$

$$70 = \begin{vmatrix} 12 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \Delta$$

$$ع = \frac{70}{20} = 3.5, \quad 2 = \frac{0}{20} = 0, \quad 1 = \frac{20}{20} = 1$$

∴ مجموعة الحل (3.5, 0, 1)

$$(ب) \quad 10 = ع^2 + ص^2 + س^2$$

$$1 = ع + ص + س$$

$$4 = ع^2 + ص^2 + س^2$$

$$7 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \Delta$$

$$7 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 10 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \Delta$$

$$14 = \begin{vmatrix} 2 & 10 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \Delta$$

$$21 = \begin{vmatrix} 10 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \Delta$$

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \Delta$$

$$0 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \Delta$$

$$1 = \frac{0}{0} = \frac{\Delta}{\Delta} = 1$$

$$1 = \frac{0}{0} = \frac{\Delta}{\Delta} = 1$$

$$(ج) \quad 0 = ع + ص + س, \quad 0 = ع^2 + ص^2 + س^2$$

$$0 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \Delta$$

$$0 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \Delta$$

$$10 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = \Delta$$

$$\frac{0}{1} = \frac{0}{1} = \frac{\Delta}{\Delta} = 0$$

$$\frac{10}{1} = \frac{10}{1} = \frac{\Delta}{\Delta} = 10$$

$$(د) \quad 2 = ع - ص - س, \quad 1 = ع + ص + س$$

$$2 = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \Delta$$

$$11 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \Delta$$

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \Delta$$

$$\frac{11}{2} = \frac{11}{2} = \frac{\Delta}{\Delta} = 5.5$$

$$\frac{0}{2} = \frac{0}{2} = \frac{\Delta}{\Delta} = 0$$

$$\frac{7}{7} = ع، \frac{11}{7} = ص، \frac{7}{7} = م$$

∴ مجموعة الحل (3، 2، 1)

$$(ج) م + ص + ع = 6$$

$$2 = م - ص - ع$$

$$14 = م + ص - ع$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 14 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 14 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 14 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

$$\frac{8}{4} = م، \frac{8}{4} = ص، \frac{8}{4} = ع$$

∴ مجموعة الحل (2، 2، 2)

$$(د) م + ص + ع = 9$$

$$3 = م - ص - ع$$

$$1 = م + ص - ع$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\frac{15}{20} = ع، \frac{5}{20} = ص، \frac{15}{20} = م$$

∴ مجموعة الحل (1، 2، 1)

$$(هـ) م + ص + ع = 2$$

$$7 = م - ص - ع$$

$$1 = م - ص - ع$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 7 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 7 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\frac{16}{16} = ع، \frac{16}{16} = ص، \frac{16}{16} = م$$

∴ مجموعة الحل (1، 1، 1)

$$(و) ع = 1، م = 1، ص = 1$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\frac{7}{3} = م، \frac{1}{3} = ص، \frac{7}{3} = ع$$

∴ مجموعة الحل $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{7}{3})$

ثانياً: إجابة تمارين الهندسة الفراغية

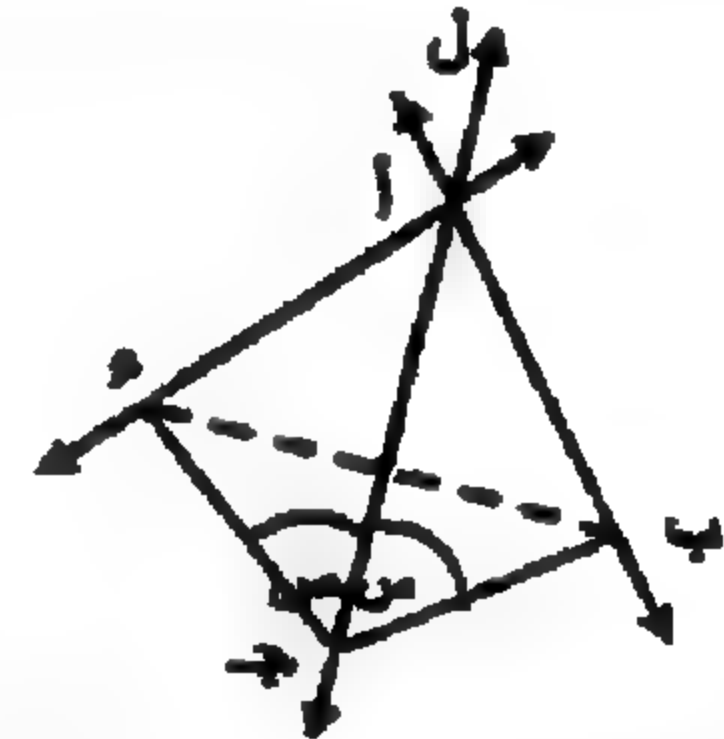
حلول تمارين (١)

- (١) ✓ - ١ ✓ - ٢ ✓ - ٣ x - ٤
 ✓ - ٥ x - ٦ x - ٧ ✓ - ٨
 ✓ - ٩ ✓ - ١٠

(٢) 

∴ م ∩ ل = ع
 ∴ م ∩ ن = ع ليعني
 مستويين وليكن م
 ∴ م ∩ ن = ع

ع ∩ ل = م ∴ م ∩ ن = ع، ل ∩ م = ع — (١)
 ∴ م ∩ ع = ل ∴ م ∩ ع ∩ ل = م
 ع ∩ ل = م ∴ م ∩ ع ∩ ل = م
 ل ∩ م = ع ∴ م ∩ ع ∩ ل = م
 ∴ م ∩ ع ∩ ل = م ∴ م ∩ ع ∩ ل = م
 ∴ م ∩ ع ∩ ل = م ∴ م ∩ ع ∩ ل = م



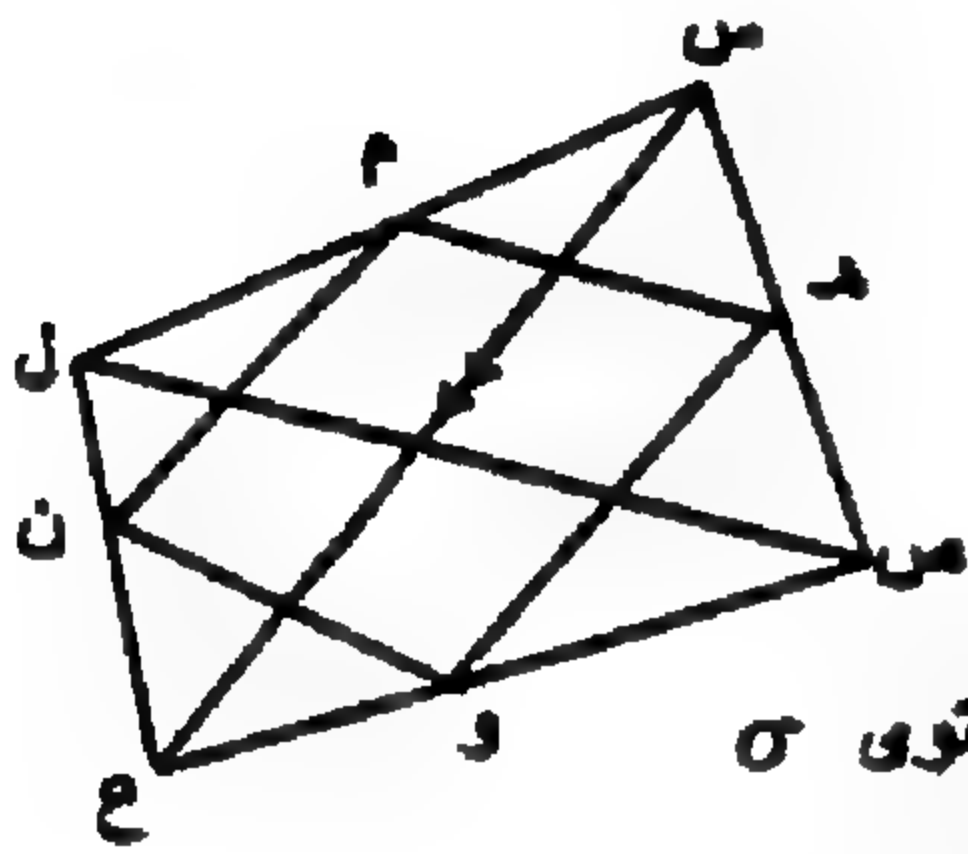
(٣)

نفرض أن المستويين م، ل هما مستقيمان
 م ∩ ل = ع ∴ المطلوب إثبات أن م ∩ ل = ع
 للمستويين المتقاطعين في ل وهما م، ل
 ∴ م ∩ ل = ع (خط تقاطع المستويين م، ل)
 ∴ م ∩ ل = ع ∴ م ∩ ل = ع (خط تقاطع)
 ∴ م ∩ ل = ع ∴ م ∩ ل = ع
 ∴ م ∩ ل = ع ∴ م ∩ ل = ع

- (٤) ١. أ ج ٢. ب ج ٣. د ج
 ٤. أ ب ٥. د ج ٦. د ج

حلول تمارين (٢)

- (١) ✓ - ١ x - ٢ x - ٣ x - ٤
 x - ٥ ✓ - ٦ x - ٧ x - ٨

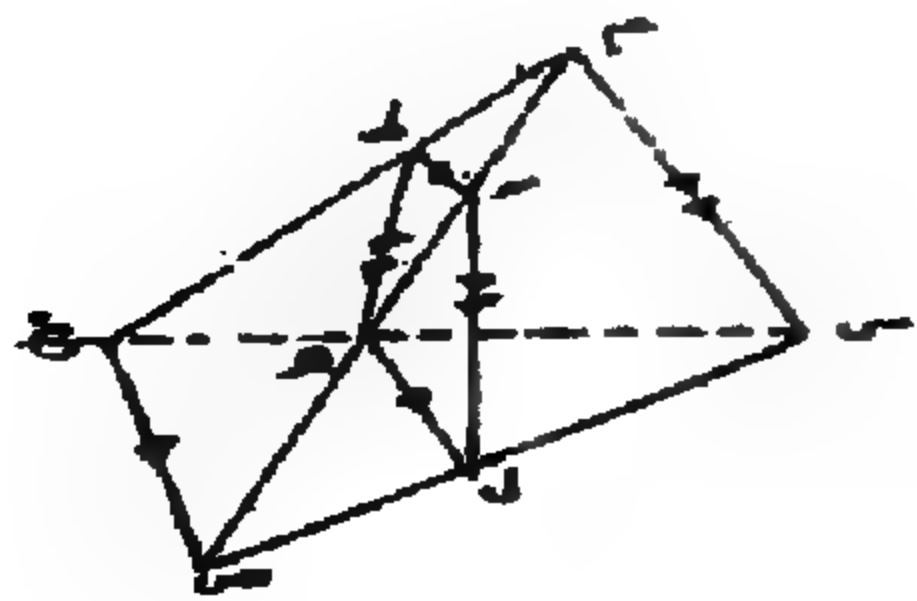


(٢)

∴ م ∩ ل = ع ∴ م ∩ ل = ع
 ∴ م ∩ ل = ع ∴ م ∩ ل = ع
 ∴ م ∩ ل = ع ∴ م ∩ ل = ع
 ∴ م ∩ ل = ع ∴ م ∩ ل = ع
 ∴ م ∩ ل = ع ∴ م ∩ ل = ع
 ∴ م ∩ ل = ع ∴ م ∩ ل = ع

$$\frac{م}{م \cap ل} = \frac{ل}{ل \cap م} \quad \text{من (٢) — (١) بالجمع}$$

$$\frac{م}{م \cap ل} = \frac{ل}{ل \cap م} + \frac{م}{م \cap ل} = \frac{م}{م \cap ل} + \frac{ل}{ل \cap م} = 1$$



(٣)

م ∩ ل = ع ∴ م ∩ ل = ع ∴ م ∩ ل = ع

∴ م ∩ لكل من المستويين أ ب ج ، أ ب ج وبالمثل
 م ∩ لكل من المستويين أ ب ج ، أ ب ج
 ∴ م ∩ هو خط تقاطع المستويين أ ب ج ، أ ب ج
 ∴ ع ∩ المستوى أ ب ج لأن ع ∩ ب ج
 ع ∩ المستوى أ ب ج لأن ع ∩ ب ج
 ∴ ع ∩ م ∩
 ∴ م ، ع ، م على استقامة واحدة .

المسألة الخامسة (٣)

(١) أ ب // ج د

(ب) متوازي مستطيلات

(ج) شبه منحرف

(٢) ∴ أ ب // ج د ∴ أ ب ، ج د يعينان

مستوى ع وهو يقطع المستويين م ، م المتوازيين

في أ ج ، ب د ∴ أ ج // ب د

∴ أ ب // ج د ، أ ج // ب د

الشكل أ ب ج د متوازي أضلاع ومنه أ ب = ج د

(٣) م م = ويوازي د و

∴ الشكل م د و متوازي أضلاع

∴ م و // د ه الواقع في المستوى م

∴ م و // المستوى م

(٤) د ه مستقيم واصل بين منتصلي الضلعين ن أ ، ن ب

في Δ ن أ ب

∴ د ه // أ ب ويساوي نصفه

∴ د ه // المستقيم أ ب الواقع في المستوى م أ ب

∴ د ه // المستوى م أ ب .

(٥) ∴ ك ه // م ه فهما يعينان مستوى م

∴ ك ه // المستوى م ومر به المستوى م

والمستوى م م م ∩ المستوى ن ل ه ط = ن ل

∴ م م // ن ل بالمثل م م // ط ه

∴ ن ل // ط ه — (١)

∴ ع م // المستوى ن ل ه ط

ع م ∩ المستوى م م م ، المستوى ن ل ه ط

∩ المستوى م م م ع = ل ه

∴ ع م // ل ه

بالمثل ع م // ن ط ∴ ل ه // ن ط — (٢)

من (١) ، (٢) ∴ الشكل ل ن ط ه متوازي أضلاع

من خمسة الشكل ∴ ل ن // م م ، ل ن = $\frac{1}{2}$ م م

، ل ه = $\frac{1}{2}$ م م

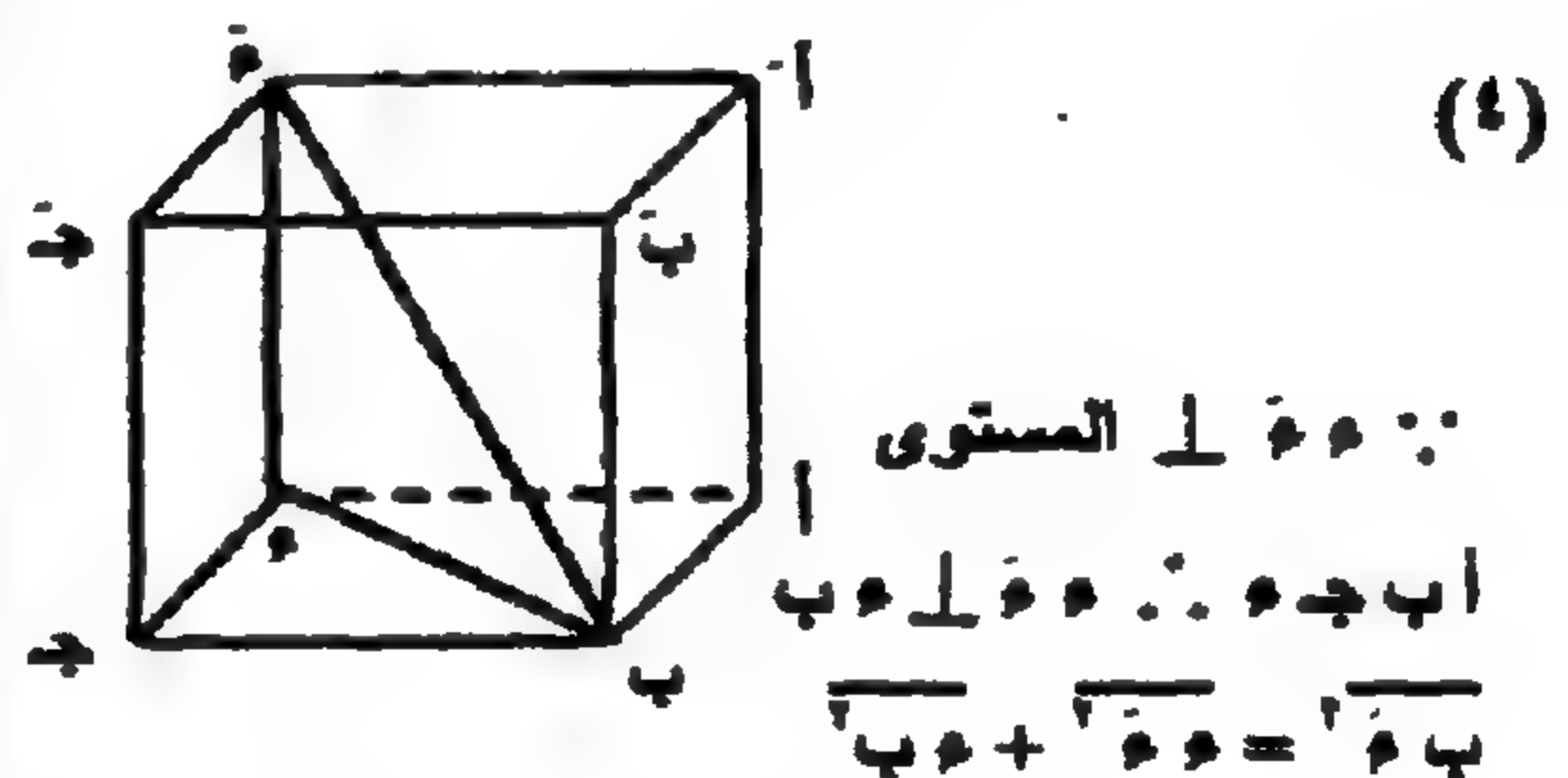
محيط متوازي الأضلاع = $2[ل ن + ل ه]$

= $2[\frac{1}{2} م م + \frac{1}{2} م م] = 2[\frac{1}{2} م م + \frac{1}{2} م م]$

= م م + م م = م م ∴ ل ن = م م

، ل ه = م م ∴ م م = م م

∴ ل ن = ل ه وهما ضلعان متجاوران في متوازي الأضلاع



من Δ ب د ه ، ب د = ب ه + د ه + د ه = ب ه + د ه + د ه

اللقم في ج د ، ب د = ب ه + د ه + د ه = ب ه + د ه + د ه

لأن ج د = ب ه

(٥) م ∩ المستوى أ ب ج لأن م ∩ أ ج ، م ∩

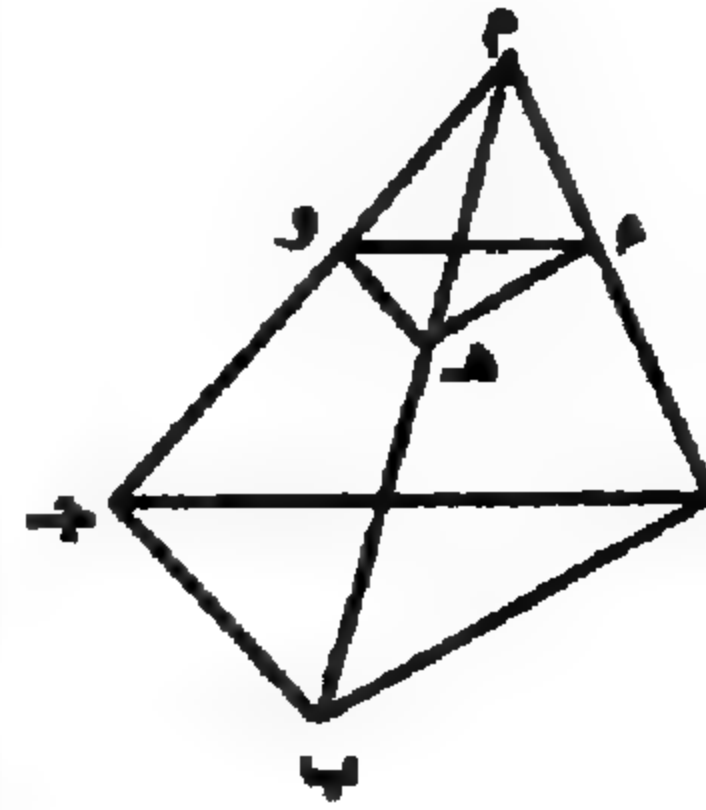
المستوى أ ب ج لأن م ∩ أ ج

الذي يقطع المستوى من في م

∴ ك ه // م ∴ ك ه // م ، ك ه // م

∴ الشكل ك ه م متوازي أضلاع

(٦)



$$\frac{م ه}{ه ب} = \frac{م و}{و ب} \quad \therefore$$

∴ م ه // و ب (١)

$$\frac{م و}{و ج} = \frac{م ه}{ه ب} \quad \therefore$$

∴ م و // ه ب (٢)

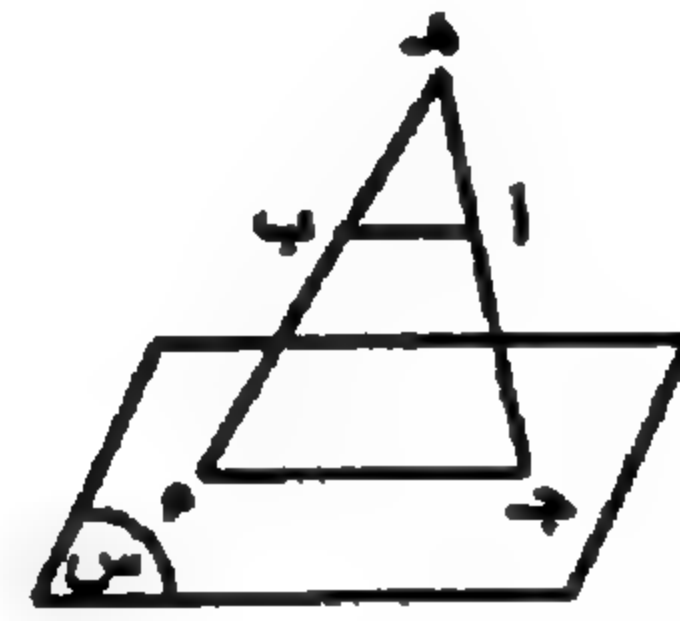
من (١)، (٢)

∴ المستقيمان م ه ، م و متقاطعان في م ، أ ب

ب ج متقاطعان في ب

∴ المستوى م ه و // المستوى أ ب ج

(٧) ∴ ه أ ، ه ب



متقاطعان في ه

∴ ه أ ، ه ب يعينان

مستوى واحد هو ه ج م

∴ أ ب // المستوى من ، أ ب ⊂ المستوى ه ج م

، المستوى من يقطع المستوى ه ج م ، المستوى من

يقطع المستوى ه ج م في ج م ∴ أ ب // ج م

∴ الشكل أ ب ج م شبه منحرف ∴ أ ب // ج م

في Δ ه ج م ∴ Δ ه أ ب يشابه Δ ه ج م

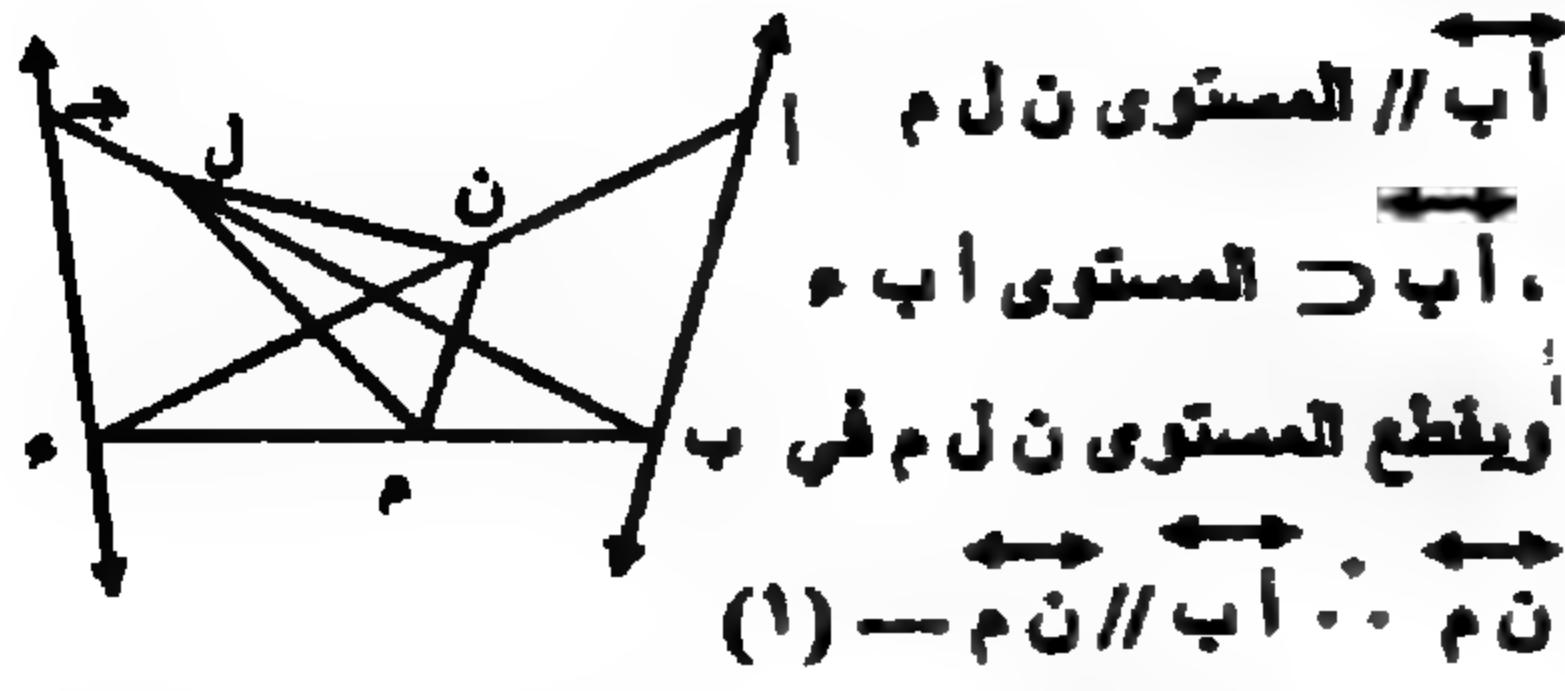
$$\therefore \left(\frac{أ ب}{ج م} \right) = \frac{Δ ه أ ب}{Δ ه ج م}$$

$$= \frac{Δ ه أ ب}{٣٦} = ٢ \left(\frac{ج م}{ج م} \right)$$

$$\therefore \frac{Δ ه أ ب}{١} = \frac{٤}{١} \therefore Δ ه أ ب = ١٦ سم^٢$$

∴ مساحة الشكل أ ج م ب = ٣٦ - ١٦ = ٢٠ سم^٢

(٨) أولاً:



أ ب // المستوى ن ل م

، أ ب ⊂ المستوى أ ب م

ويقطع المستوى ن ل م في ب

∴ أ ب // ن م (١)

ثانياً: ∴ ج م // المستوى ن ل م ، ج م ⊂ المستوى

ب ج م ويقطع المستوى ن ل م في ل م

∴ ج م // ل م (٢)

ثالثاً: في Δ أ ب م

∴ ن م تنصف ب م ، ن م // أ ب

∴ ن م تنصف أ م ، ن م = $\frac{١}{٢}$ أ ب (٣)

Δ ب ج م ل م // ج م ، ل م تنصف ب م

∴ ل م تنصف ب ج ∴ ل م = $\frac{١}{٢}$ ج م (٤)

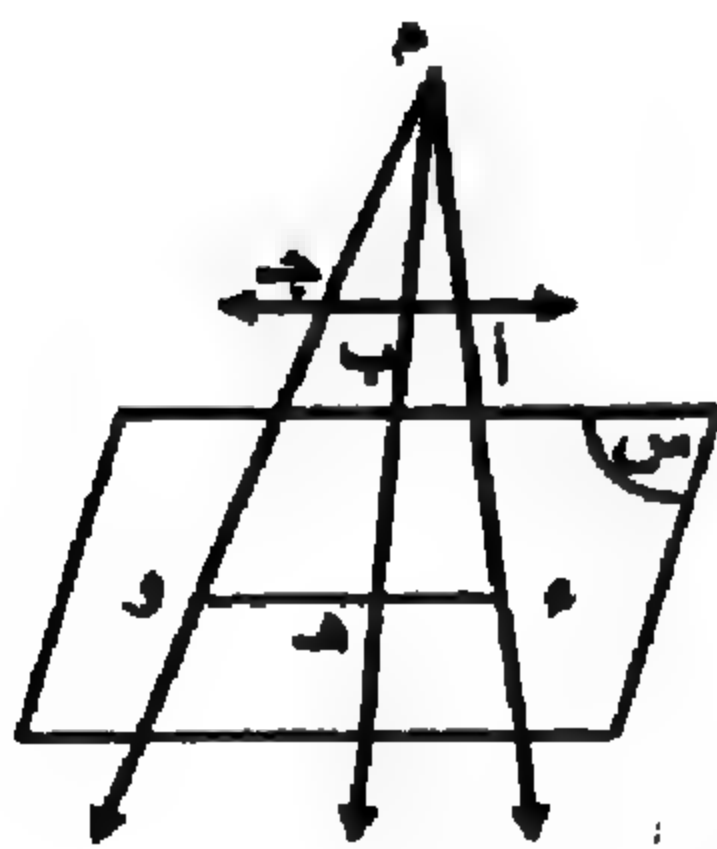
∴ جمع (٣)، (٤)

$$\therefore ن م + ل م = \frac{١}{٢} (أ ب + ج م)$$

في Δ ن ل م ن ل > (ن م + ل م)

$$\therefore ن ل > \frac{١}{٢} (أ ب + ج م)$$

(٩)



∴ أ ب // من

، أ ب ⊂ المستوى

م ه م ، ∴ من ∩

المستوى م ه م = ه م

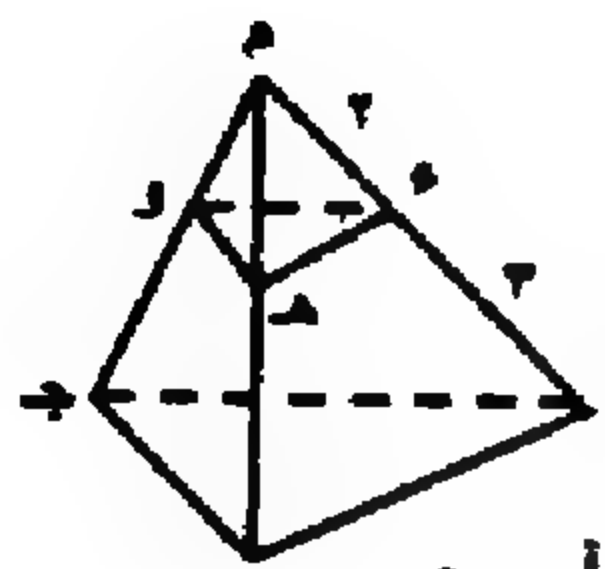
∴ أ ب // ه م

$$\therefore \frac{أ ب}{ه م} = \frac{م ج}{م ن} = \frac{١}{٢} \quad (١)$$

وبالمثل ب ج // ه و

$$\therefore \frac{ب ج}{ه و} = \frac{م ج}{م ن} = \frac{م ب}{م ه} \quad (٢)$$

$$\text{من (١)، (٢)} \quad \frac{أ ب}{ه و} = \frac{ب ج}{ه و} \therefore \frac{أ ب}{ه و} = \frac{ب ج}{ه و}$$



∴ المستوى م ا ب قطع
المستويين المتوازيين ع ه و ، ا ب ج

في ع ه ، ا ب ∴ ع ه // ا ب

$$(1) \quad \frac{م}{ا} = \frac{ع}{ب} = \frac{ه}{ج} = \frac{1}{5} \quad \therefore$$

∴ المستوى م ب ج قطع المستويين المتوازيين

ع ه و ، ا ب ج في ه و ، ب ج ∴ ه و // ب ج

$$(2) \quad \frac{م}{ب} = \frac{ه}{ج} = \frac{1}{5} \quad \therefore$$

∴ المستوى م ا ج قطع المستويين المتوازيين

ع ه و ، ا ب ج في ع و ، ا ج ∴ ع و // ا ج

$$(3) \quad \frac{م}{ا} = \frac{ع}{ج} = \frac{1}{5} \quad \therefore$$

من (1)، (2)، (3)

$$\frac{ع}{ا} = \frac{ه}{ب} = \frac{1}{5} \quad \therefore$$

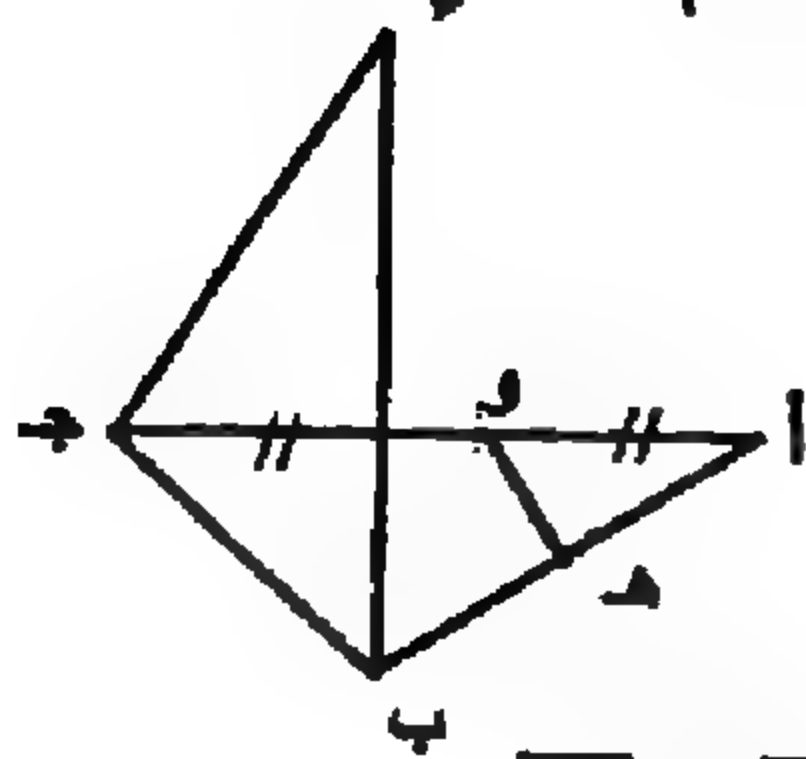
∴ Δ ع ه و يشبه Δ ا ب ج اولاً

∴ ع ه و يشبه Δ ا ب ج

$$\therefore \left(\frac{1}{5}\right) = \left(\frac{ع}{ا}\right) = \frac{م}{م} \Delta ع ه و = \frac{م}{م} \Delta ا ب ج$$

$$\frac{1}{5} = \frac{م}{100} \quad \therefore$$

$$\therefore م (\Delta ع ه و) = 20 سم$$



(3) Δ ا ب ج

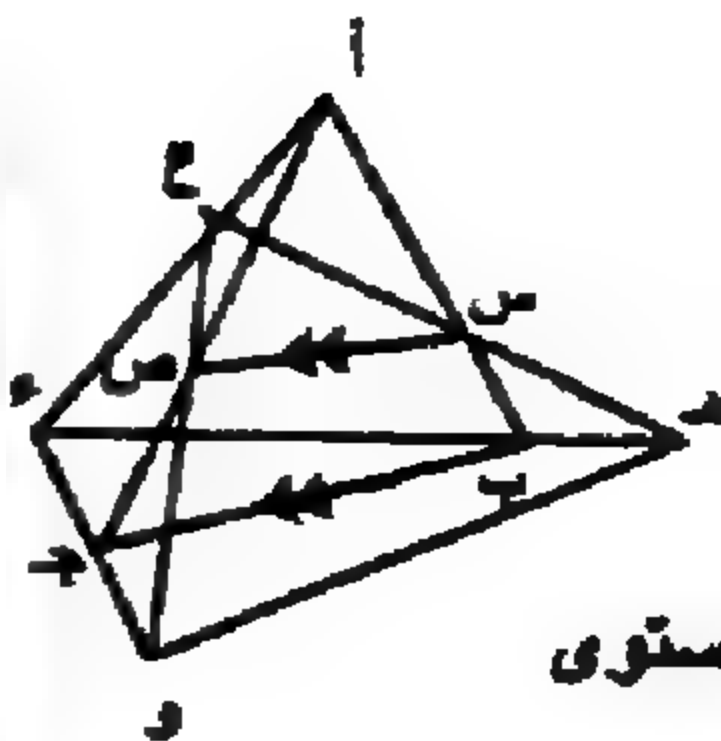
∴ ه منتصف ا ب

، و منتصف ا ج ∴ ه و // ب ج

∴ ه و // ب ج الواقع في المستوى ع ب ج

∴ ه و // المستوى ع ب ج

(2)



$$(10) \quad \therefore م ه // ب ج$$

م ه // المستوى ع ه و

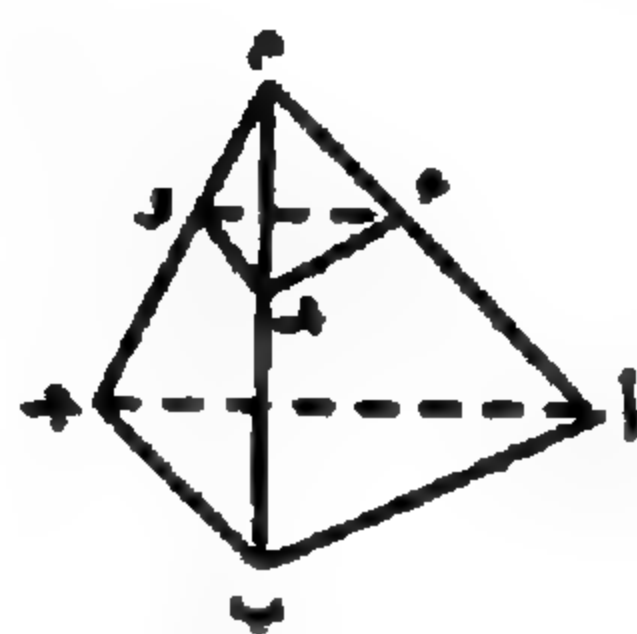
ب ج // المستوى ع ه و

∴ المستوى ع ه و ∩ المستوى

ع ه و = ه و

$$\therefore م ه // ب ج // ه و$$

المسألة تمسك (8)



$$(1) \quad \frac{م}{ا} = \frac{ع}{ب} = \frac{1}{4} \quad \therefore$$

∴ ع ه // ا ب (1)

$$\frac{م}{ب} = \frac{ه}{ج} = \frac{1}{4} \quad \therefore$$

∴ ه و // ب ج (2)

∴ المستوى ع ه و // المستوى ا ب ج اولاً

في Δ م ا ب ∴ ع ه // ا ب

$$(3) \quad \frac{1}{4} = \frac{ع}{ا} = \frac{م}{م} \quad \therefore$$

في Δ م ب ج ∴ ه و // ب ج

$$(4) \quad \frac{1}{4} = \frac{ه}{ب} = \frac{م}{م} \quad \therefore$$

في Δ م ا ج ∴ ع و // ا ج

$$(5) \quad \frac{1}{4} = \frac{ع}{ا} = \frac{م}{م} \quad \therefore$$

من (3)، (4)، (5)

$$\frac{ع}{ا} = \frac{ه}{ب} = \frac{1}{4} \quad \therefore$$

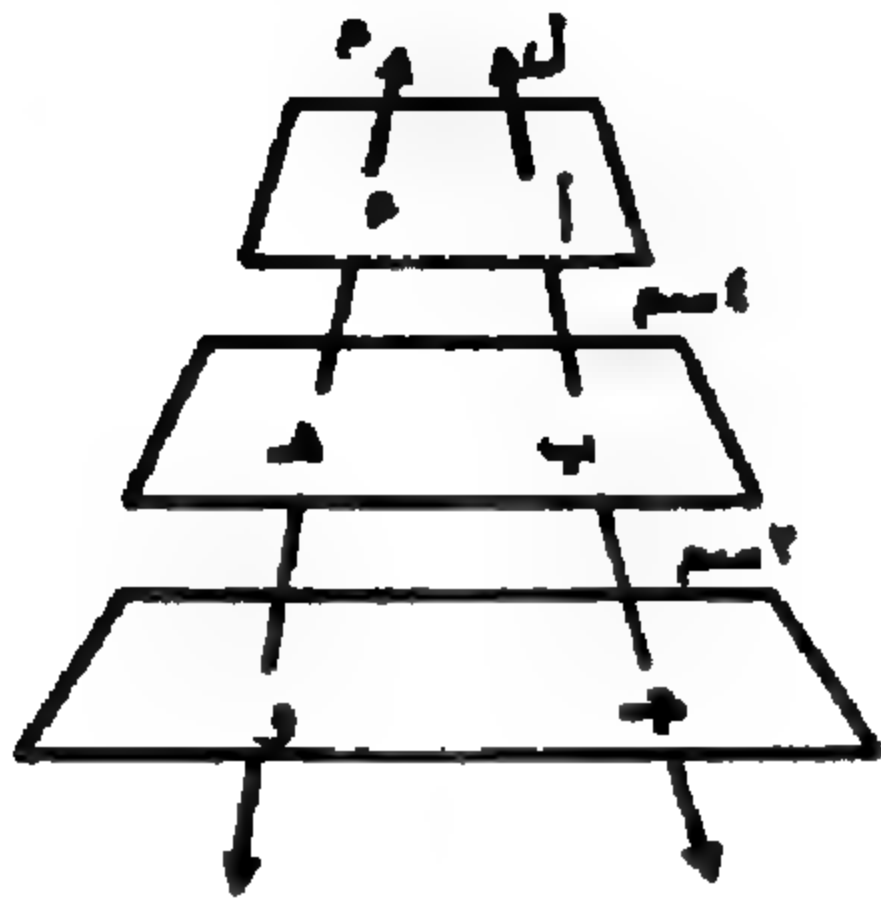
∴ Δ ع ه و ، ا ب ج متشابهان

$$\therefore \left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{ع}{ا}\right) = \frac{م}{م} \Delta ع ه و = \frac{م}{م} \Delta ا ب ج$$

$$\therefore م (\Delta ع ه و) = 9 سم$$

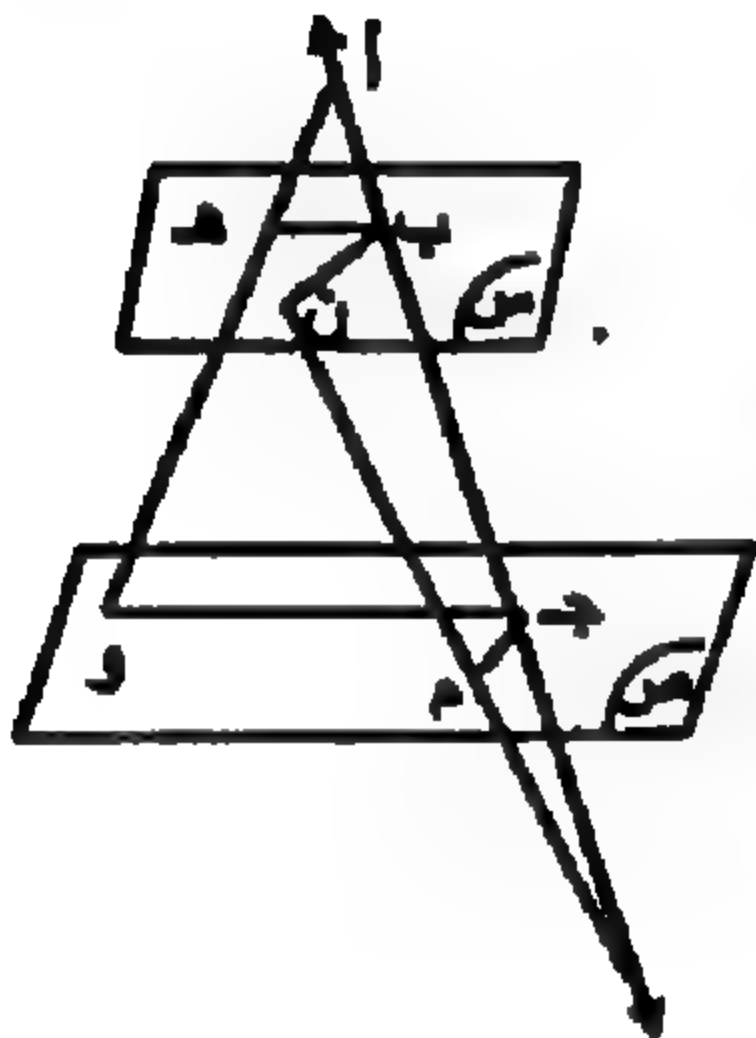
$$\therefore م (\Delta ا ب ج) = 16 \times 9 = 144$$

ن ج ه في هـ و \therefore ا ب // هـ و \therefore هـ و // ج ه
 \therefore ن ج = ن ه \therefore ن ه = ن و
 \therefore ق (> ا ن و) = ق (> ب ن ه) من تطابق
 $\Delta \Delta$ ن ا ه ، ن ب ج \therefore ا ن و ينطبق Δ ب ن ه
 \therefore ا ه = ب و
 \therefore ا ب هـ و شبه منحرف متساوي الساقين



(٧)

$$\therefore \frac{ا ب}{ب ج} = \frac{ا ه}{هـ و} \therefore \frac{ا ب}{ب ج} = \frac{ا ه}{هـ و} = \frac{1}{3} \therefore ا ه = \frac{1}{3} هـ و$$



(٨)

\therefore المستوى ا ج و قطع
 المستويين المتوازيين
 م، هـ في ب هـ ، ج و
 \therefore ب هـ // ج و

$$\therefore \frac{ا ب}{ب ج} = \frac{ا ه}{هـ و} = \frac{1}{3} \text{ --- (١)}$$

\therefore المستوى هـ ب ن قطع المستويين المتوازيين م،

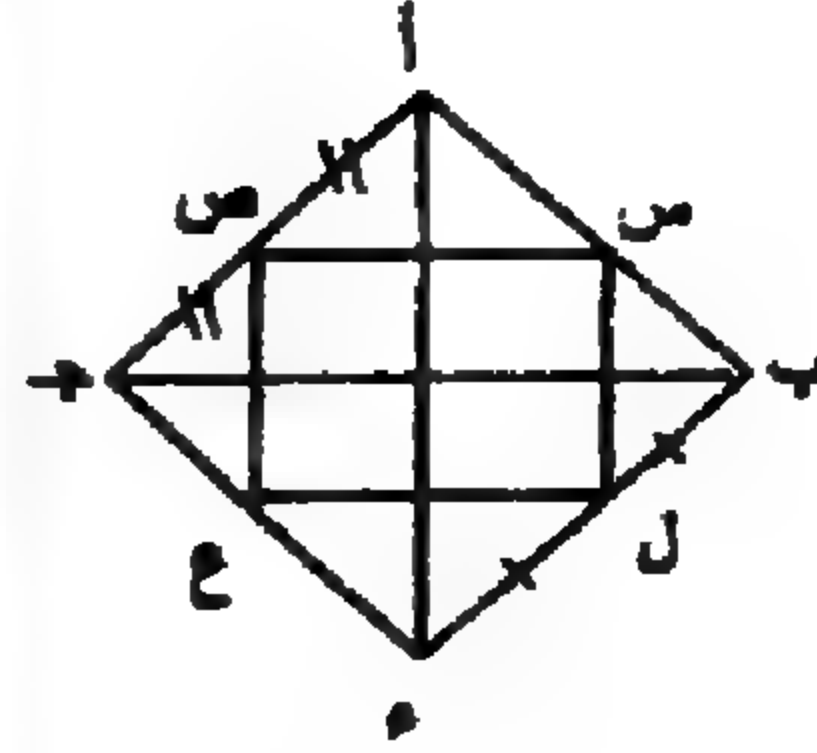
م في ج م ، ب ن \therefore ج م // ب ن

$$\therefore \frac{ا ب}{ب ج} = \frac{ب ن}{ج م} = \frac{ا ه}{هـ و} \text{ --- (٢)}$$

$$\therefore \frac{ا ب}{ب ج} = \frac{ب ن}{ج م} \times \frac{ا ه}{هـ و} \therefore \frac{ا ب}{ب ج} = \frac{ب ن}{ج م} \times \frac{1}{3}$$

$$\therefore ا ب هـ ب ن = ٢ ج و . ج م$$

(٤) في Δ ا ب ج \therefore م منتصف ا ب



م منتصف ا ج

\therefore م م // ب ج

م م = $\frac{1}{2}$ ا ج

وبالمثل Δ ب ج هـ

\therefore ل ع // ب ج ، ع ل = $\frac{1}{2}$ ب ج

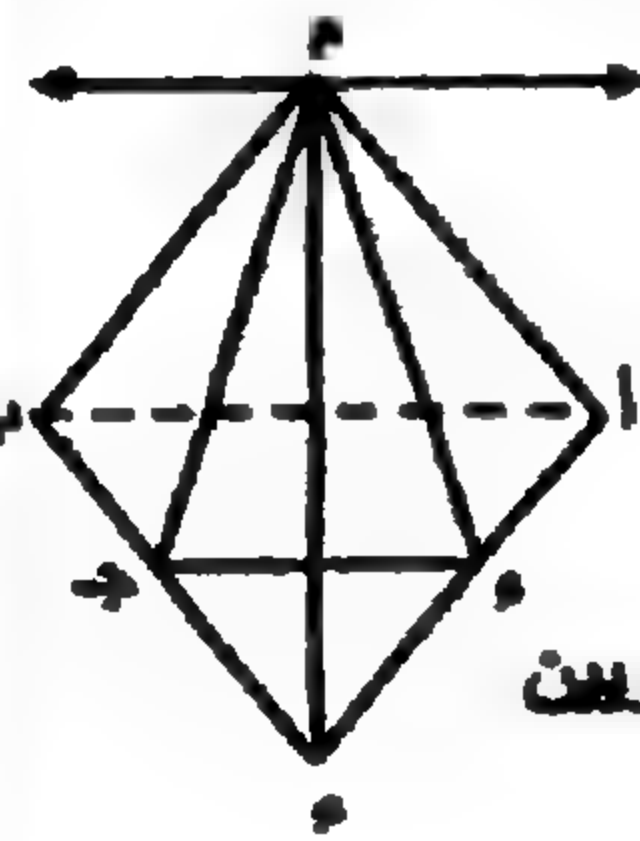
\therefore م م // ل ع ، م م = ل ع

\therefore الشكل م م ع ل متوازي اضلاع

\therefore ب ج // م م الواقع في المستوى م م ع ل

\therefore ب ج // المستوى م م ع ل

وينتقل الطريقة تثبت ا هـ // المستوى م م ع ل



(٥) ا هـ م ب ج = { هـ }

\therefore هـ تقع في كل المستويين

م ا هـ ، م ب ج

\therefore م تقع في كل من المستويين

\therefore م هـ هو خط تقاطعهما

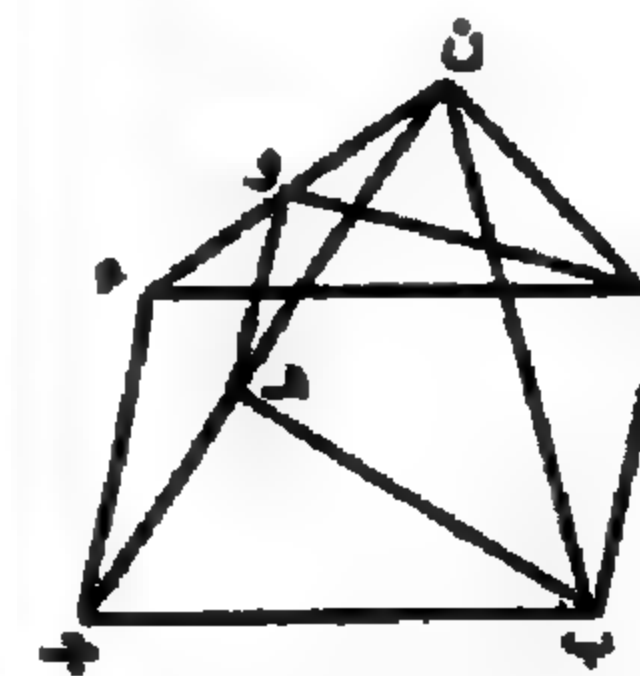
\therefore انهما يشتركان في رأس م

\therefore يتقاطعان في مستقيم يمر بنقطة م

\therefore ا ب // ج هـ ومر بهما المستويان

\therefore خط تقاطعهما يوازي كلا منهما

\therefore خط تقاطع المستويين هو مستقيم يمر بنقطة م



ويوازي كلا من ا ب ، ج هـ

(٦) ا ب // ج هـ الواقع

في المستوى ن ج هـ

\therefore ا ب // المستوى ن ج هـ

\therefore المستوى ا ب هـ يحتوي ا ب ويقطع المستوى

عسول تمسرين (٥)

(١) [ا] \perp المستوى ا ب ج د

[ب] $\overline{ا ب} \perp$ المستوى ا ب ج د

[ج] $\overline{ب ج} \perp$ المستوى ا ب ج د

[د] $\overline{ا ج} \perp$ المستوى ا ب ج د

$\overline{ا ج} \perp$ المستقيم فيه

$\overline{ا ج} \perp \overline{ا ب} \therefore \overline{ا ج} \perp \overline{ب ج}$

(٢) $\overline{ب ج} = \overline{ا ب} + \overline{ا ج}$

$\overline{م ج} = \overline{ا م} + \overline{ا ج}$

$\Delta م ا ج$ قائم $\therefore \overline{ا ج} \perp \overline{ا م}$

$\therefore \overline{ا ج} \perp \overline{ا ب} \therefore \overline{ا ج} \perp$ كل من $\overline{ا م}$ ، $\overline{ا ب}$

$\therefore \overline{ا ج} \perp$ المستوى ا م ب

$\overline{ا ج} \perp$ المستوى ا م ب

(٣) ا ب ج يطبق Δ و ب ج

و ب = ا ج ، ب ج مشترك

فيهما $\angle ق (> ا ب ج) = \angle ق (> م ب ج) = ٩٠^\circ$

$\therefore \overline{ب ج} \perp \overline{ا ب}$ ، $\overline{ب ج} \perp \overline{م ب}$

$\therefore \overline{ب ج} \perp$ كل من $\overline{ا ب}$ ، $\overline{م ب}$

$\therefore \overline{ب ج} \perp$ المستوى ا ب م

$\therefore \overline{ب ج} \perp$ المستوى ا ب م

في $\Delta ا ب م$: $ب ا = م ب$

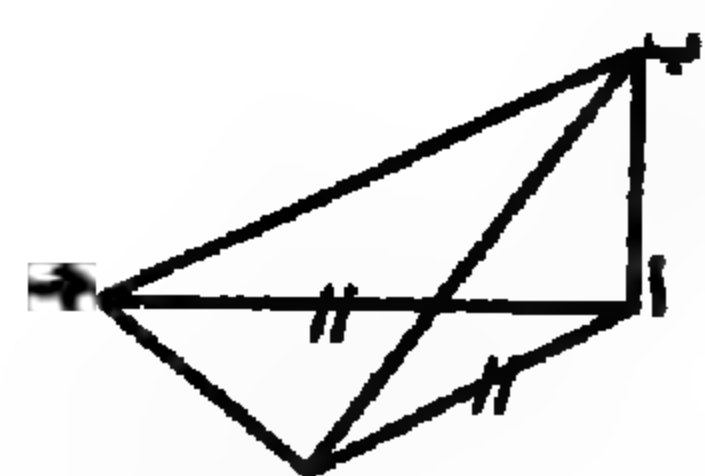
\therefore ب ه منتصف ا م في ه $\therefore \overline{ب ه} \perp \overline{ا م}$

$\therefore \overline{ب ه} \perp \overline{ا م} \text{ — (١)}$

$\therefore \overline{ب ج} \perp$ المستوى ا ب م $\therefore \overline{ب ج} \perp \overline{ا م} \text{ — (٢)}$

من (١) ، (٢) $\therefore \overline{ا م} \perp$ كل من $\overline{ب ج}$ ، $\overline{ب ه}$

$\therefore \overline{ا م} \perp$ المستوى ا ب ج



(٤) $\therefore \overline{ا ب} \perp$ المستوى ا ج د

$\therefore \overline{ا ب} \perp \overline{ا ج}$

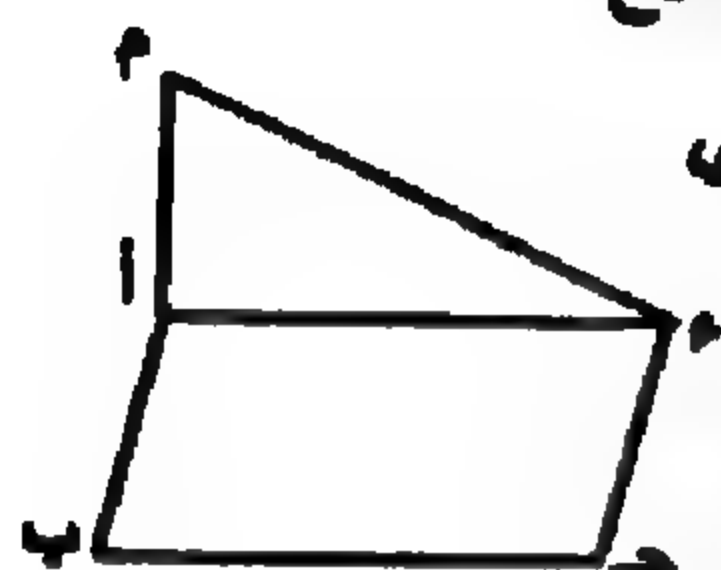
$\therefore \overline{ب ج} = \overline{ا ج} \therefore \overline{ا ج} \perp$ المستوى ب ا م

$\therefore \overline{ا ج} \perp \overline{ا م} \therefore \overline{ا ج} \perp$ المستوى ب ا ج

$\therefore \overline{ا م} \perp$ المستوى ب ا ج $\therefore \overline{ا م} \perp \overline{ا ب}$

$\therefore \overline{ب م} = \overline{ا ج} = \overline{ب ج} = \overline{م ج} \therefore \overline{ب م} = \overline{ا ج} = \overline{ب ج} = \overline{م ج}$

$\therefore \Delta ب ج د$ متساوي الأضلاع



(٥) [ا] م ا ليست عمودية على

المستوى ا ب ج د لأن

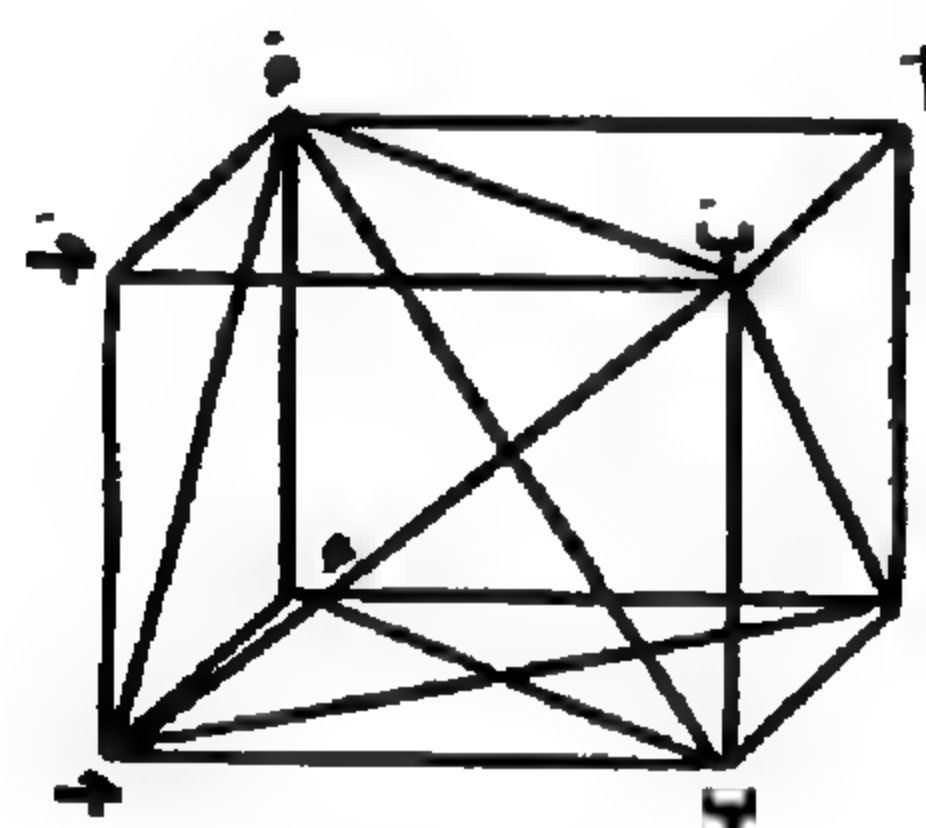
م ا \perp ا ب الواقعة فيه فقط

[ب] $\therefore \overline{ا ب} \perp \overline{ا م}$ ، $\overline{ا م}$

$\therefore \overline{ا ب} \perp$ المستوى م ا م

[ج] $\overline{م ج} \parallel \overline{ب ا}$ ، $\overline{ب ا} \perp$ المستوى م ا م

$\therefore \overline{م ج} \perp$ المستوى م ا م



(٦) [ا] من خمسة الشكل

$\overline{ا ج} = \overline{ا د}$

$\overline{ا ج} = \overline{ا د}$

$\therefore \Delta ا ج د$ متساوي

الأضلاع

مساحة $\Delta ا ج د = \frac{\sqrt{3}}{4} \times$ مربع طول ضلعه

$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times ٢ \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

[٢] $\therefore \overline{ا ب} \perp \overline{ب ج}$ ، $\overline{ب ج} \perp$ من خواص المكعب

$\therefore \overline{ا ب} \perp$ الوجه ب ج د $\therefore \overline{ا ب} \perp \overline{ب ج}$

[٣] $\therefore \overline{م ج} \perp$ القاعدة ا ب ج د $\therefore \overline{م ج} \perp \overline{ا ج}$

$\therefore \overline{ا ج} \perp \overline{م ج}$ $\therefore \overline{ا ج} \perp \overline{ب م}$

$\therefore \overline{ا ج} \perp$ كل من $\overline{ب م}$ ، $\overline{م ج}$

∴ $\overline{ا ج} \perp \text{المستوى ب ع د} \therefore \overline{ا ج} \perp \overline{ع ب}$

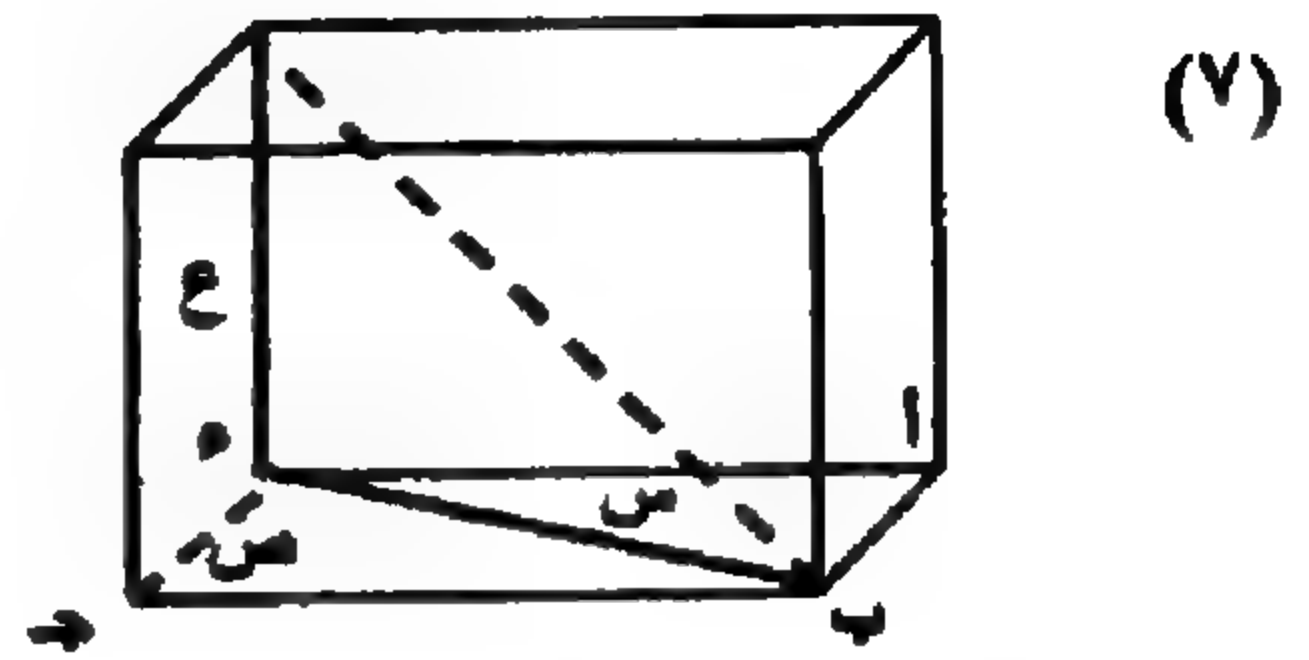
٤ | في $\Delta ا ج د$: $\overline{ا ج} = \overline{ا د} = \overline{ج د}$ ∴ $\angle ٣ = \angle ٢ + \angle ١$

∴ $\angle ا ج د = \angle ج د ا$ ، $\Delta ع د ب$ فيه

(ع ب) $\angle ٣ = \angle ٢ + \angle ١$ ∴ $\angle ٣ = \angle ٢ + \angle ١$

في $\Delta ب ا ب$ فيه ب ع د ∴ $\angle ٣ = \angle ٢ + \angle ١$

∴ $\angle ا ج د = \angle ع د ب = \angle ب ع د$



∴ $\overline{ب ج} \perp \text{كل من } \overline{ب ا} , \overline{ب د}$

∴ $\overline{ب ج} \perp \text{المستوى ا ب د}$

∴ $\overline{ا ب} \perp \text{المستوى ا ب د}$

∴ $\overline{ا ب} \perp \overline{ب ج}$

في $\Delta ب ج د$: (ب ع د) = (ب ع د) + (ب ع د)

∴ $\overline{ع د} \perp \text{المستوى ا ب د}$

∴ $\overline{ع د} \perp \overline{ب ج}$

في $\Delta ع د ب$: (ع د ب) = (ب ع د) + (ب ع د)

= (ب ع د) + (ب ع د)

∴ $\overline{ع د} = \sqrt{\overline{ب ع}^2 + \overline{ب د}^2}$

∴ طول القطر = $\sqrt{٥٧٦ + ٣٦ + ٦٤} = ٢٦$ سم

(٧) $\overline{ا د} = \sqrt{\overline{ا ب}^2 + \overline{ب د}^2}$

(١) ∴ $\overline{ج د} \perp \text{المستوى ا ب ج}$

∴ $\overline{ج د} \perp \text{المستوى ا ب ج}$

∴ $\overline{ج د} \perp \overline{ب ا}$

∴ م ب ل ب ا (نظرية) اولا

في $\Delta م ب ا$ القائم في ب

∴ $\overline{م ب} = \frac{١}{٢} \overline{ا م}$ — (١)

∴ $\overline{ج د} \perp \text{المستوى ا ب ج}$ ∴ $\overline{ج د} \perp \overline{ج ا}$

∴ م ج ا قلم الزاوية في ج

∴ $\overline{م ج} = \frac{١}{٢} \overline{ا م}$ — (٢)

من (١)، (٢) ∴ $\overline{م ج} = \overline{م ب}$

∴ $\Delta م ج ب$ متساوي الساقين

(٢) ∴ $\overline{ب د} \perp \text{المستوى ا ب ج}$ ∴ $\overline{ب د} \perp \overline{ب ج}$ مسقط هـ

على المستوى ا ب ج ∴ $\overline{ب د} \perp \overline{ب ا}$

∴ $\overline{ب د} \perp \overline{ب ا}$ ∴ $\overline{ب د} = \frac{١}{٢} \overline{ا ب}$

∴ $\overline{ب د} = ٨$ سم

∴ $\overline{ب د} \perp \text{المستوى ا ب ج}$ ∴ $\overline{ب د} \perp \overline{ب هـ}$

∴ $\Delta ب هـ د$ قائم الزاوية في ب

∴ (م ب) = (ب د) + (ب د) = ٢٢٥ + ٦٤

∴ م ب = ١٧ سم

(٣) $\overline{ب ج} = \sqrt{\overline{ب د}^2 + \overline{ب هـ}^2} = \sqrt{٢٢٥^2 + ٦٤^2}$ ∴ $\overline{ب ج} = ٢٥$

في $\Delta ا ب ج$ قائم الزاوية في ب

$\frac{٢}{٥} = \frac{٩}{١٥} = \frac{\overline{ب ج}}{\overline{ا ب}}$ ، $\frac{٢}{٥} = \frac{١٥}{٣٥} = \frac{\overline{ب ج}}{\overline{ا ج}}$

∴ $\frac{\overline{ب ج}}{\overline{ا ب}} = \frac{\overline{ب ج}}{\overline{ا ج}}$ ، $\overline{ب ج}$ مشتركة ∴ $\Delta ا ب ج$ متشابهان

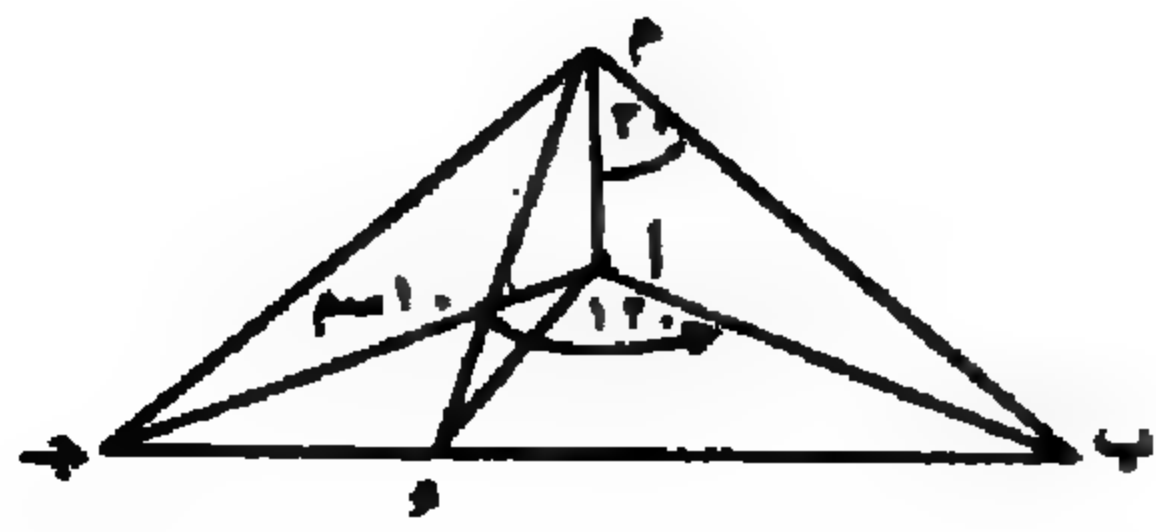
∴ $\overline{ا ب} = \overline{ا ج}$ ∴ $\overline{ا ب} = ٩٠$

∴ $\overline{ا ب} \perp \overline{ب ج}$ ، $\overline{ا ب}$ هو مسقط هـ على مستو $\Delta ا ب ج$

∴ $\overline{ا ب} = \sqrt{\overline{ب ج}^2 + \overline{ب د}^2} = \sqrt{٩^2 + ١٥^2} = ١٨$

في $\Delta ا ب ج$ قائم الزاوية في ب ∴ $\overline{ا ب} = ١٨$ سم ، $\overline{ا ب} = ١٨$ سم

القائم م ا ب ∴ $\overline{ا ب} = ١٨$ سم



(٦)

$\therefore \overline{MA} \perp \text{المستوى}$ $\therefore \overline{MA} \perp \overline{AB}$
 \therefore م ا ب قلم الزاوية $\therefore \angle (MAB) = 30^\circ$
 \therefore م ب = ٢٠ سم \therefore م ا = $10\sqrt{3}$
 $\therefore \Delta$ م ا ب قلم، $\angle (MAB) = 30^\circ$
 $\therefore \angle (MBA) = 60^\circ$ \therefore م ا = ١٠ سم
 $\therefore \overline{MA} \perp \text{المستوى}$ $\therefore \overline{MA} \perp \overline{AB}$
 \therefore مسقط \overline{MA} على \overline{AB} $\therefore \overline{MQ} \perp \overline{AB}$
 $\therefore \overline{MQ}$ يمثل ارتفاع Δ م ب ج
 $\therefore \Delta$ م ا ب قلم $\therefore \angle (MAB) = 30^\circ$ $\therefore \angle (MBA) = 60^\circ$
 \therefore م ا = ١٠ سم \therefore م ب = 20
 \therefore مساحة Δ م ب ج = $\frac{1}{2} \times 20 \times 10\sqrt{3} = 100\sqrt{3}$

(٧) أولاً: (١) $\therefore \overline{AN} \perp \text{المستوى}$ ا ب ج د

(١) — $\therefore \overline{AN} \perp \overline{AB}$

\therefore القطران في المربع متعامدان

(٢) — $\therefore \overline{AD} + \overline{AB}$

من (١)، (٢) $\therefore \overline{AN} \perp \text{كل من } \overline{AB}, \overline{AD}$

$\therefore \overline{AN} \perp \text{المستوى}$ ا ب ج د

(ب) $\therefore \overline{AN} \perp \overline{AB}$ ، $\overline{AN} \perp \overline{AD}$ مسقط المثلث \overline{AN} على

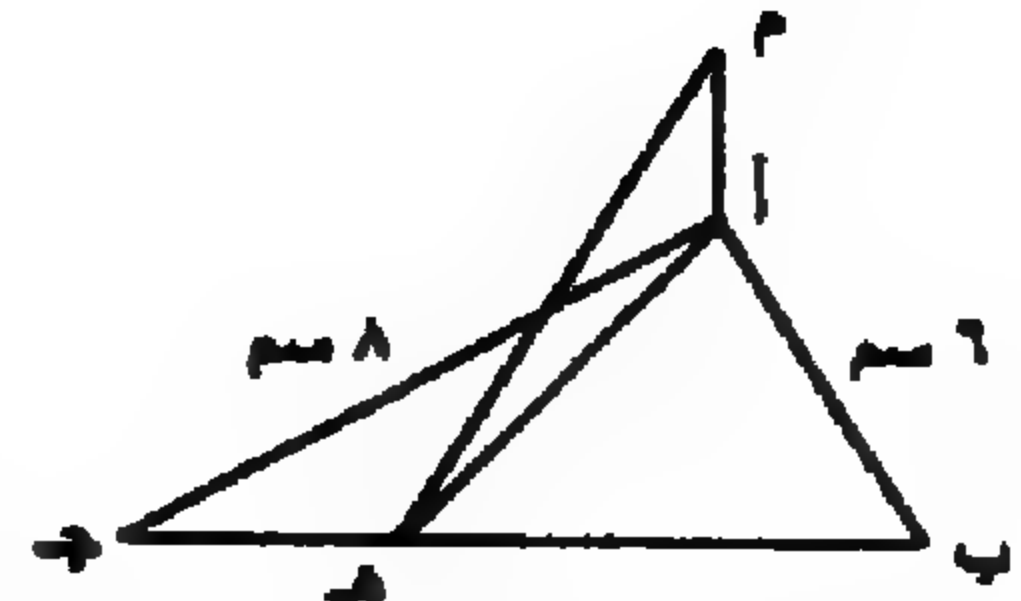
$\therefore \overline{AN} \perp \overline{BD}$

ثانياً: في Δ ن ا ب $\angle (NAB) = 90^\circ$

$\therefore \angle (NAB) = \angle (NBA) = \angle (ANB) = 90^\circ$

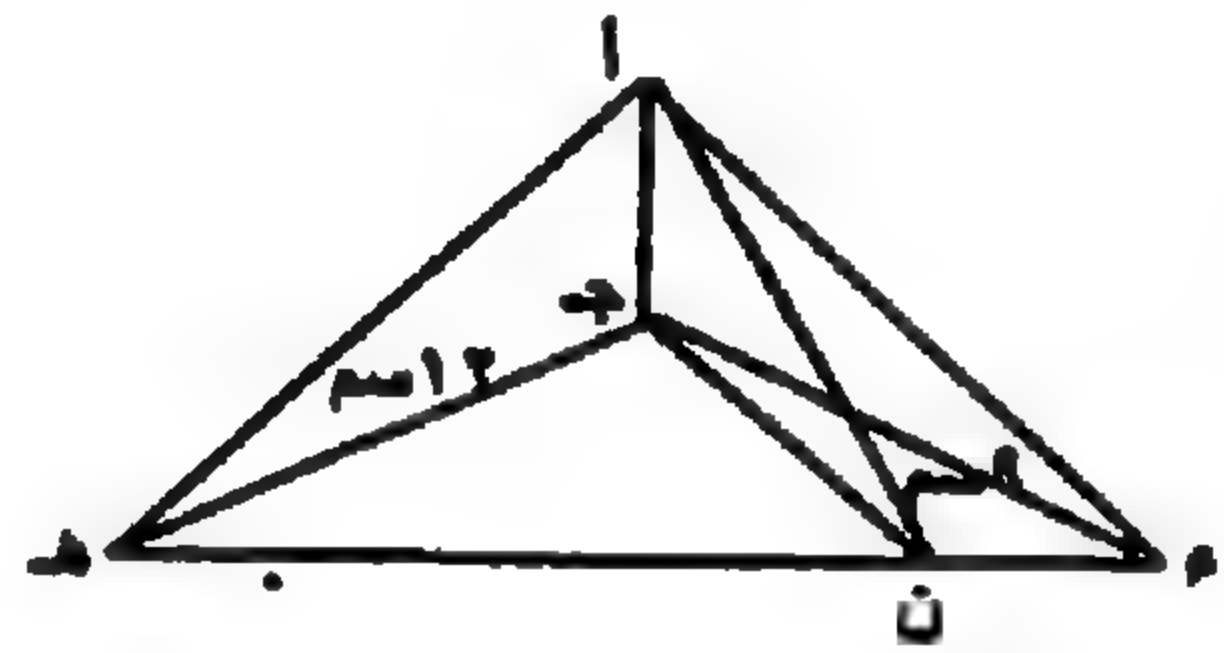
$169 = 144 + 25 =$

\therefore ن ب = ١٣ سم



(٤)

$\therefore \overline{MA} \perp \text{المستوى}$ ا ب ج د $\therefore \overline{MA} \perp \overline{AB}$
 $\therefore \overline{MA}$ هو مسقط المثلث \overline{MA} على \overline{AB} $\therefore \overline{MQ} \perp \overline{AB}$
 $\therefore \overline{MA} \perp \overline{AB}$ في Δ ا ب ج
 \therefore م ا ب ج = م ا د ج
 \therefore م ا د ج = $\frac{8 \times 6}{4} = 12$ سم
 $\therefore \Delta$ م ا د ج قلم في ا
 $\therefore \angle (MAD) + \angle (MDA) = \angle (MDA) + \angle (MAD) = 36^\circ$
 $\therefore \angle (MAD) = \angle (MDA) = 18^\circ$
 \therefore م د = ٦ سم



(٥)

$\therefore \angle (MAD) = \angle (MDA) = 18^\circ$

\therefore م د = ٦ سم

\therefore مساحة Δ ا ب ج د = $\frac{1}{2} \times 10 \times 12 = 60$

$\therefore 169 = 144 + 25 =$

\therefore ن ب = ١٣ سم

$\therefore \overline{AN} \perp \text{المستوى}$ ا ب ج د

$\therefore \overline{AN} \perp \overline{AB}$ ، $\overline{AN} \perp \overline{AD}$ مسقط \overline{AN} على

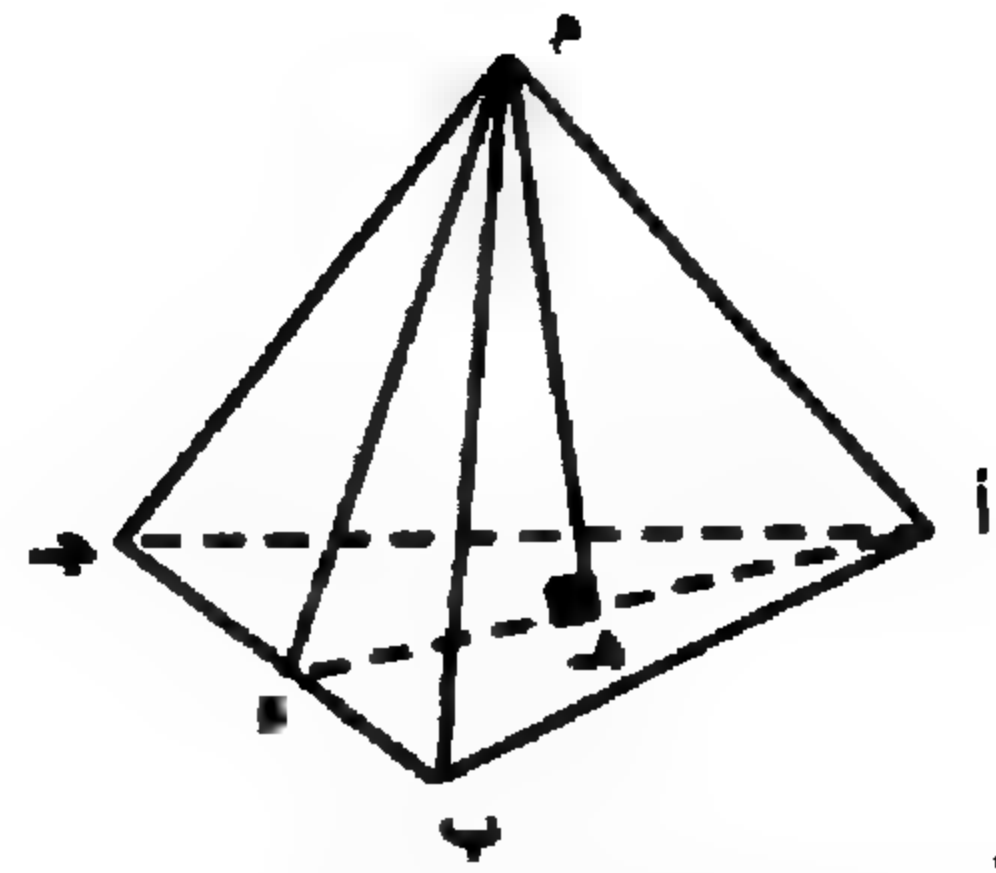
$\therefore \angle (MAD) = \angle (MDA) = 18^\circ$

$\therefore \angle (MAD) = \angle (MDA) = 18^\circ$

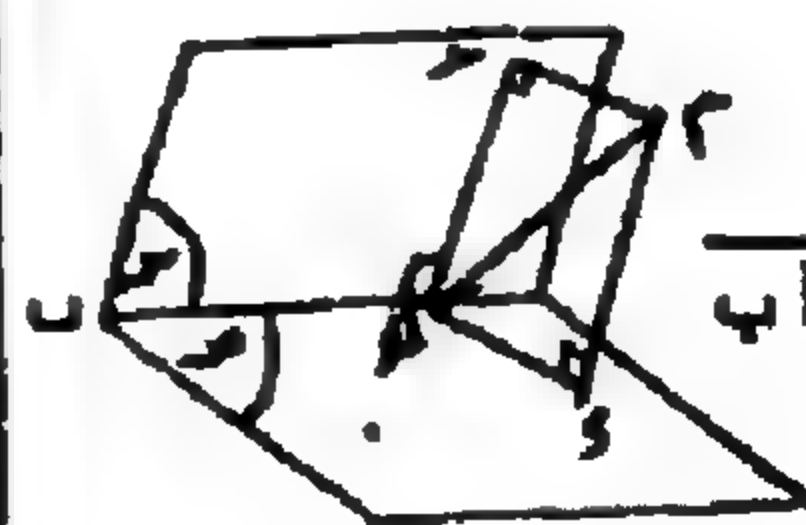
\therefore م د = ٦ سم

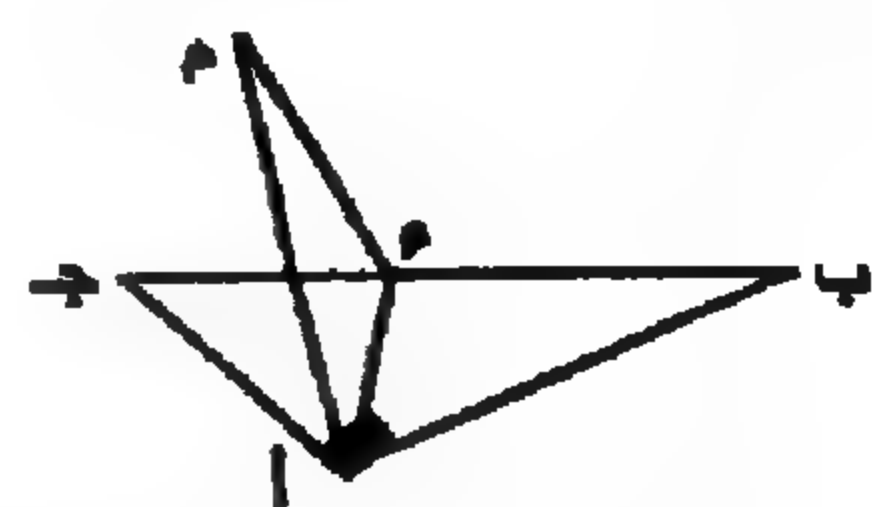
\therefore ن ب = ١٣ سم

(٨)


 $\therefore \overline{MA} \perp \text{كل من } \overline{MB}, \overline{MC}$
 $\therefore \overline{MA} \perp \text{المستوى م ب ج}$ اولاً
 $\therefore \overline{MA} \perp \overline{ME}$ لأن $\overline{ME} \subset \text{المستوى م ب ج}$
 $\therefore \overline{ME} \perp \text{المستوى ا ب ج}$
 $\therefore \Delta \text{ م ا ه قائم في م}$
 $\therefore \Delta (م ه) = \text{ا ه. ه ه}$ ثانياً
 $\therefore \overline{MA} \perp \text{المستوى م ب ج}$
 $\therefore \overline{MA} \perp \overline{AB}$
 $\therefore \overline{AH}$ مسقط \overline{AM} على المستوى ا ب ج

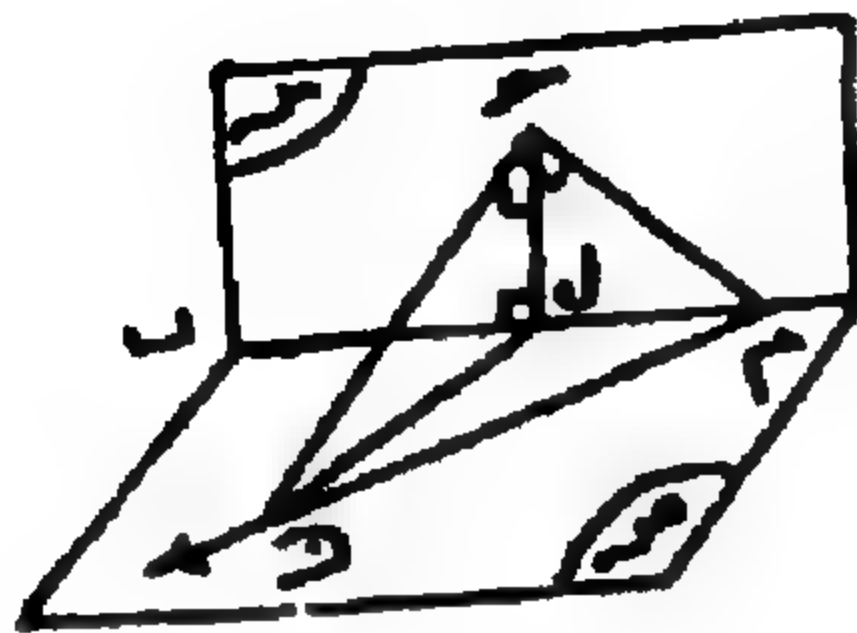
 $\therefore \overline{AH} \perp \overline{AB}$
 $\therefore \overline{EH}$ مسقط \overline{ME} على المستوى ا ب ج

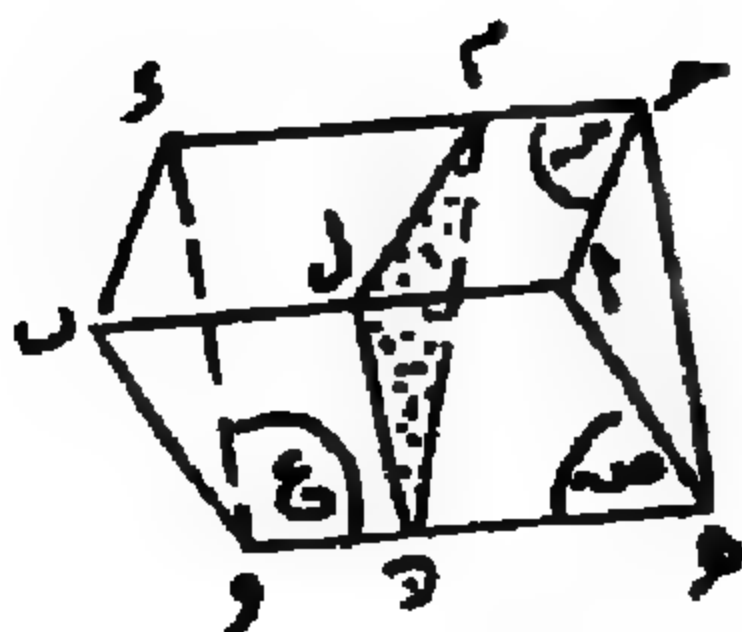
 $\therefore \overline{EH} \perp \overline{AB}$
عشرون تمثيلين (٧)
(١) نرسم م ه

 $\therefore \overline{CH}$ مسقط \overline{CM}
 $\text{على م، } \therefore \overline{CH} \perp \overline{AB}$
 $\therefore \overline{MH} \perp \overline{AB}$
 $\therefore \overline{EH}$ مسقط \overline{ME} على م

 $\therefore \overline{MH} \perp \overline{AB}$


(٢)

نفرض ان ا ج = ل
 $\therefore \text{ا ب} = \text{ل} \therefore (\text{ب ج}) = \text{ل} + \text{ل} = \text{ه ل}$
 $\therefore \text{ب ج} = \sqrt{\text{ه ل}}$ ، \overline{AM} مسقط م

 $\therefore \overline{AM} \perp \overline{AB}$
 $\therefore \angle (ا >) = ٩٠^\circ \therefore (\text{ب ا}) = \text{ب} \times \text{ب ج}$
(٣) $\therefore \overline{AN} \perp \overline{MS}$
 $\therefore \overline{AN} \perp \overline{AM}$
 $\therefore \overline{AN} \perp \overline{AL}$
 $\therefore \overline{AN}$ مسقط ن

 $\therefore \overline{AN} \perp \overline{AB}$
 $\therefore \text{جا} (> \text{ن م ل}) \times \text{جا} (> \text{ن ل ج})$
 $\frac{\text{ل ن}}{\text{ن م}} \times \frac{\text{ن ج}}{\text{ل ن}} = \frac{\text{ن ج}}{\text{ن م}} = \text{جا} (> \text{ن م ج}) = \frac{\text{ج ن}}{\text{ن م}}$
(٤) ي ك مسقط ط ك
 $\therefore \overline{PK} \perp \overline{MS}$
 $\therefore \text{ي ك} \perp \overline{MS}$
بالمثل ي ع $\perp \overline{MS}$
 $\therefore \text{زوايا المضلع م ع ي ك قوائم}$
 $\text{م ع م} = \text{م ك} = ١٠ \text{ جتا } ٦٠^\circ = ٥ \text{ سم}$
 $\therefore \text{م ع ي ك مربع}$ $\therefore \text{م ي} = \sqrt{٥} \text{ سم}$
 $\therefore \text{جتا} (> \text{ط م ي}) = \frac{\sqrt{٥}}{١٠} = \frac{١}{\sqrt{٥}}$
 $\therefore \angle (> \text{ط م ي}) = ٤٥^\circ$


(٥)

 $\therefore \overline{AB} \parallel \overline{EC}$
 $\therefore \overline{AB} \parallel \overline{CH}$

وبالمثل $\overline{AB} \parallel \overline{HD}$ $\therefore \overline{CD} \parallel \overline{HD}$

نرسم مستوي عموديا على AB فيكون عموديا

على \overline{CD} ، \overline{HD} ويقطعها في L ، M ، N

ويكون $\overline{AB} \perp$ كل من \overline{LM} ، \overline{LN}

، $\overline{CD} \perp$ كل من \overline{LN} ، \overline{NM}

\therefore الزوايا L ، M ، N هي الزوايا المستوية

لمقاييس الزوايا الزوجية ومجموع قياساتها = 180°

الزوجية حيث :

$$\text{جنا } (\angle B \angle C) = \frac{10}{3} = \frac{1}{3}$$

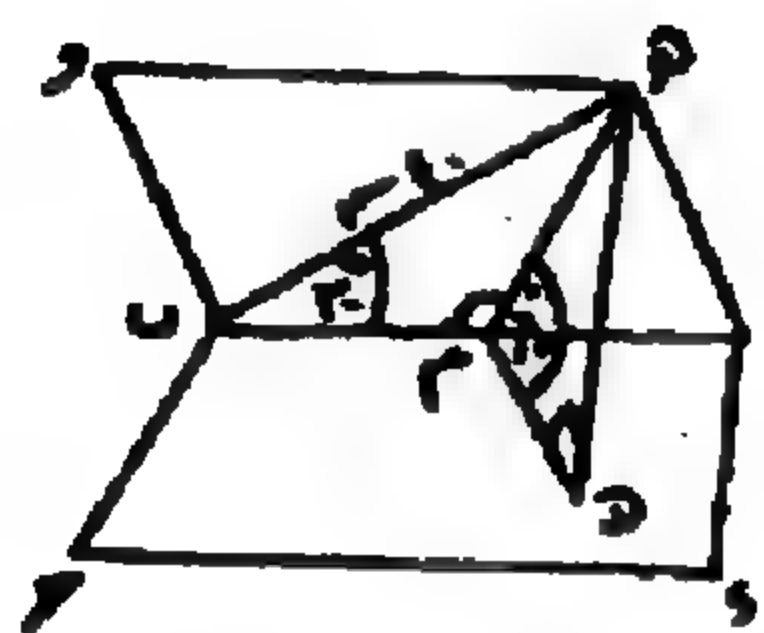
$$\therefore \text{قي } (\angle B \angle C) = 60^\circ$$

$$\therefore \angle E = 90^\circ \text{ و } \angle V = 120^\circ \text{ جانا } \angle V = 10^\circ \text{ سم}$$

$$\therefore \text{م } (\Delta B \angle C) = \frac{1}{3} \times 10^\circ \times 120^\circ$$

$$= 10^\circ \text{ سم}$$

(A)



نرسم $\overline{HM} \perp \overline{AB}$

يقطعه في M - ثم نرسم

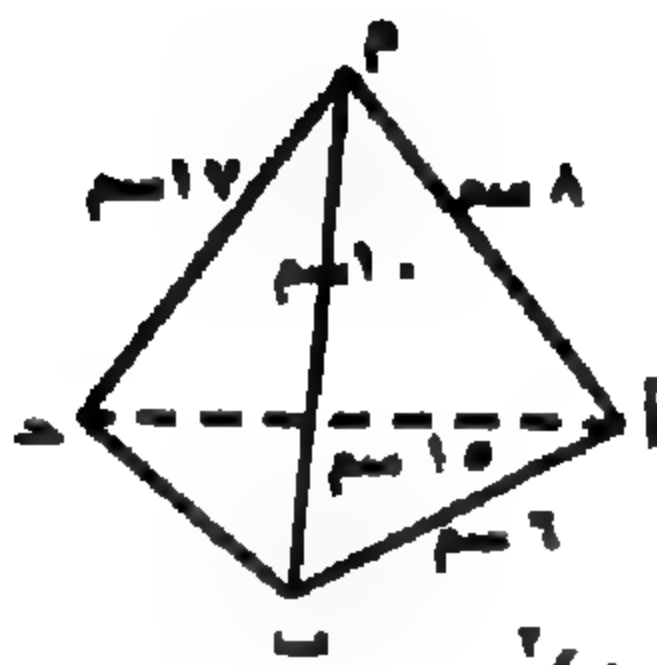
\overline{MN} وهو مسقط \overline{HM}

$\therefore \overline{MN} \perp \overline{AB}$

$$\therefore \text{قي } (\angle H \angle M \angle N) = 60^\circ$$

$$\angle H \angle M = 40^\circ \text{ جانا } \angle H \angle M = 20^\circ \text{ سم، } \angle H \angle N = 20^\circ \text{ سم جانا } 60^\circ$$

$$\therefore \angle H \angle N = 20^\circ \times \frac{3}{4} = \frac{3}{2} \times 20^\circ = 30^\circ \text{ سم}$$



$$(9) \quad \angle (M \angle A) + \angle (A \angle B) = 36 + 64 = 100^\circ$$

$$\angle (M \angle B) = 100^\circ =$$

$$\therefore \overline{AM} \perp \overline{AB}$$

$$\text{بالمثل } \angle (M \angle A) = \angle (A \angle B) = \angle (M \angle B)$$

$$\therefore \overline{AM} \perp \overline{AB} \text{ و } \overline{AM} \perp \text{المستوى } AB \angle C$$

$$\therefore \overline{AM} \text{ محتوي في كل من المستويين } M \angle A \text{، } M \angle B$$

$$\therefore \text{كل من المستويين } M \angle A \text{، } M \angle B \perp \text{المستوى } AB \angle C$$

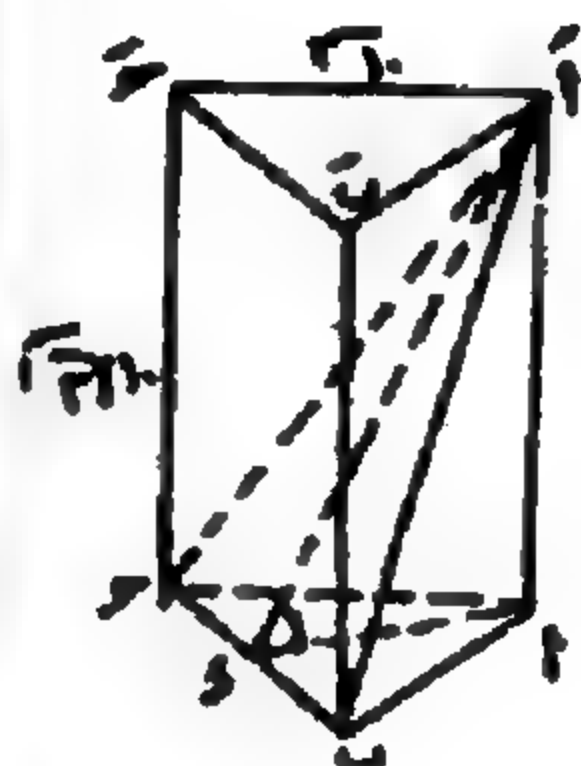


$$(10) \quad \overline{AB} \text{ قطر } \therefore \overline{AB} \perp \overline{AC}$$

$$\therefore \overline{AC} \perp \text{مستوى الدائرة}$$

$$\therefore \overline{AC} \perp \overline{AB}$$

$$\therefore \overline{AB} \perp \text{المستوى } C \angle A$$



$$(6) \quad \overline{AA'} \perp \text{مستوى القاعدة}$$

$$\therefore \overline{AA'} \perp \overline{A'B}$$

$$\therefore \text{ظا } (\angle A \angle B) = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$\sqrt{10} =$$

$$\therefore \text{قي } (\angle A \angle B) = 60^\circ$$

نرسم $\overline{AA'} \perp \overline{AB}$ يقطعه في E ثم نرسم \overline{AE}

$$\therefore \overline{AE} \perp \overline{AB} \angle C \text{ و } \overline{AE} \perp \overline{AB} \angle C$$

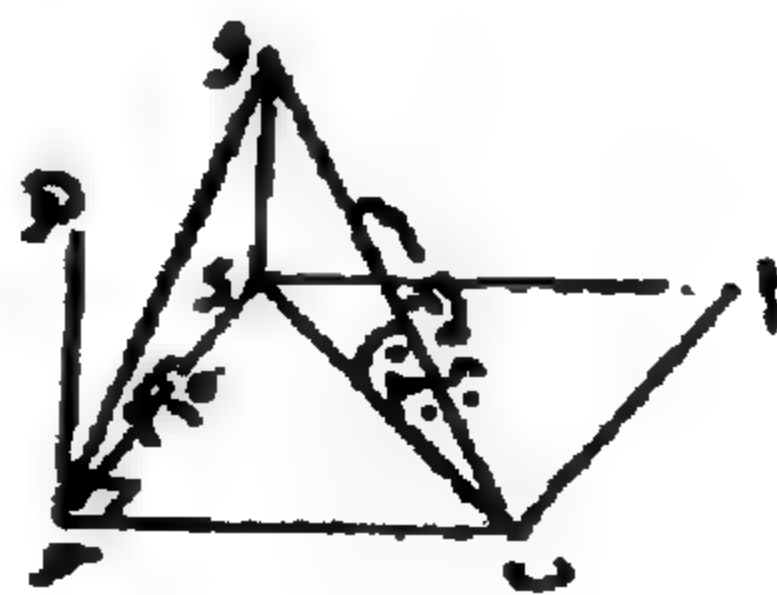
$$\therefore \angle A \angle B = \angle A \angle B \angle C$$

$$\therefore \text{قي } (\angle A \angle B \angle C) = \text{قي } (\angle A \angle B \angle C)$$

$$\therefore \angle A \angle B = 60^\circ \text{ جانا } 60^\circ \text{ جانا } 60^\circ$$

$$\therefore \text{ظا } (\angle A \angle B) = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

(V)



نرسم \overline{OB} ، \overline{OC}

\overline{OB} مسقط \overline{OB}

$$\angle B = 90^\circ \text{ جانا } \angle V = 120^\circ \text{ جانا } \angle V = 10^\circ \text{ سم}$$

$$\therefore \overline{OB} \perp \text{مستوى المستطيل}$$

$$\therefore \overline{OB} \perp \overline{OB} \angle C \text{ و } \overline{OB} \perp \overline{OB} \angle C$$

$\therefore \angle B \angle C$ هي الزاوية المستوية لمقاييس الزاوية

∴ \vec{AB} محتوي في المستوى ب ج د

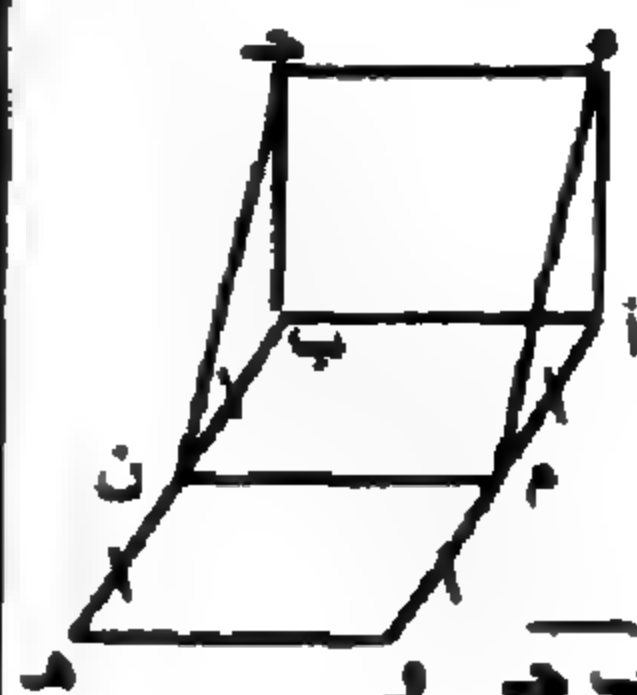
∴ المستوى ب ج د \perp المستوى ج ا د

(١١) $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$ ، $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

∴ $\overline{MN} \parallel \overline{CD}$

∴ $MN = AB = CD$

∴ ج د م ن متوازي اضلاع



∴ $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ ، $\overline{AB} \perp \overline{CD}$ و

∴ $\overline{AB} \perp$ المستوى ج ب ن

∴ $\overline{AB} \perp \overline{CN}$ ، $\overline{MN} \perp \overline{CN}$

∴ ج د م ن مستطيل

∴ $\overline{BC} \perp \overline{CD}$ ، $\overline{CN} \perp \overline{CD}$

∴ $\angle B$ جن هي للزاوية المستوية لمقياس الزاوية

الزوجية ، فقا $(\angle B \text{ جن}) = \frac{\angle B \text{ جن}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

(١٢) نرسم $\overline{HM} \perp \overline{AB}$

يقطعه في م حيث م منتصف

\overline{AB} ثم نرسم \overline{MO}

و م مسقط ه م

∴ $\overline{OM} \perp \overline{AB}$

∴ $\angle (O \text{ م ب ه}) = \angle (O \text{ م د ه}) = 90^\circ$

∴ $MO = \frac{1}{2} AB$ ، $MO = \frac{1}{2} AB$

∴ $\overline{AO} \perp \overline{OB}$ ، $\overline{AO} \perp \overline{OD}$

∴ $\overline{AO} \perp$ المستوى ب ه د

∴ المستوى ه د ا \perp المستوى ه د ب

(١٣) $\overline{AE} \perp$ المستوى س

∴ $\overline{AE} \perp \overline{BE}$

∴ $\angle (A \text{ ب ه}) = 90^\circ$

∴ $AE = BE$ ، $AE = BE$

∴ $\triangle ABE \equiv \triangle ABE$ مشترك

∴ $\angle (A \text{ ب ه}) = \angle (A \text{ ب ه}) = 90^\circ$

∴ $\overline{AE} \perp$ المستوى ا ب ه

∴ المستوى ا ب ه \perp ا ب ج

(١٤) ∴ المستويين ا ب ج ، ا ب ه

متقاطعان في \vec{AB} و \vec{AE}

على المستوى ب ج د

∴ $\overline{AB} \perp$ المستوى ب ج د

∴ $\overline{AB} \perp \overline{CD}$ ، $\overline{AB} \perp \overline{DE}$

∴ $\angle (A \text{ ب ه}) = \angle (A \text{ ب ج}) = \angle (A \text{ ب د})$

∴ $\angle (A \text{ ب ه}) = \angle (A \text{ ب ج}) = \angle (A \text{ ب د})$

(١٥) ∴ $\overline{OM} \perp$ مستوى الدائرة

∴ $\overline{OM} \perp \overline{OA}$ ، نصف القطر

م ا \perp المماس ج ا

∴ $\overline{OA} \perp$ المستوى م ا ن

والمستوى ن ج د م ا ب ه

∴ المستوى ن ج د \perp المستوى م ا ن

ثالثاً : إجابة تمارين التفاضل والتكامل

حسب قول تشرينج (٢٠)

$$(١) \text{ نها } \leftarrow (١) \text{ د } (س) = \text{ نها } \leftarrow ١ = ٣ = ٣^+$$

$$\text{نها } \leftarrow (س) = \text{ نها } \leftarrow (١) \text{ د } = ٢ = ٢ + س^-$$

∴ للدالة نهاية عدداً من ١

$$\text{∴ نها } \leftarrow ١ \text{ د } (س) = ٣$$

$$(٢) \text{ نها } \leftarrow ١ \text{ د } (س) = \text{ نها } \leftarrow ٢ + س^+ = ١ = ٣ + س^-$$

$$\text{نها } \leftarrow ١ \text{ د } (س) = \text{ نها } \leftarrow س^+ + ٢ = ٦$$

∴ الدالة ليس لها وجود

$$(٣) \text{ نها } \leftarrow ١ \text{ د } (س) = ٣$$

$$\text{نها } \leftarrow ١ \text{ د } (س) = ٣$$

$$\text{∴ نها } \leftarrow ١ \text{ د } (س) = ٣$$

$$(٤) \text{ نها } \leftarrow ١ \text{ د } (س) = ١$$

$$\text{نها } \leftarrow ١ \text{ د } (س) = ٣$$

∴ الدالة ليس لها وجود

$$(٥) \text{ نها } \leftarrow (١) \text{ د } (س) = ٣ ، \text{ نها } \leftarrow (١) \text{ د } (س) = ٣$$

$$\text{∴ نها } \leftarrow ١ \text{ د } (س) = ٣$$

$$(٦) \text{ نها } \leftarrow (١) \text{ د } (س) = ١- ، \text{ نها } \leftarrow (١) \text{ د } (س) = ١$$

∴ الدالة ليس لها وجود

$$(٧) \text{ مجال الدالة } (١- ، ٧) \text{ يوجد نهاية للدالة عند } س =$$

$$٣ ، ٥ ، \text{ نها } \leftarrow (٢) \text{ ليس لها وجود ، ولا يمكن إيجاد}$$

النهاية لعدم معرفة سلوك الدالة في القيم أقل من ١ -

لا توجد س في النطاق كذلك عند (٧)

$$(٨) \text{ د } (٣) = \text{ نها } \leftarrow ٢ = \text{ نها } \leftarrow (س) \text{ د } (٣) \times \text{ نها } \leftarrow (٣) \text{ د } (٣)$$

$$٠ = ١ \times ٠ =$$

$$\text{د } (٣) = \text{ نها } \leftarrow ٢ = \text{ نها } \leftarrow (س) \text{ د } (٣) \times \text{ نها } \leftarrow (٣) \text{ د } (٣)$$

$$٠ = ١ \times ٠ =$$

$$\text{∴ د } (٣) = \text{ نها } \leftarrow (٣) \text{ د } (٣) \text{ نها } \leftarrow ٢ = (س) \text{ د } (س) = \text{ صفر}$$

$$(٩) \text{ د } (٠) = \text{ نها } \leftarrow \frac{\text{قاسم}}{\text{نها}} - \frac{\text{قاسم}}{\text{نها}} = \frac{٠-١}{١+٣} = ١-$$

$$\text{نها } \leftarrow \frac{٠ \times س}{س} + \text{نها } \leftarrow \frac{س}{س} = \frac{٠-١}{١+٣}$$

$$\text{د } (٠) = \text{ نها } \leftarrow (١-س) = ١-$$

$$\text{∴ نها } \leftarrow (س) = ١-$$

$$(١٠) \text{ د } (١-) \text{ ليس لها وجود ، د } (١-) = \text{ نها } \leftarrow (٥-٢س) = ٧$$

$$\text{∴ د } (س) = ٧ ، \text{ د } (٢) = ١- ، \text{ د } (٢) = ١٣-$$

∴ لا يوجد نهاية عند س = ٢ ، د (٥) ليس لها

$$\text{وجود ، د } (٥) = \frac{١٣}{٨}$$

حسب قول تشرينج (٧)

$$(١) \text{ نها } \leftarrow (١) \text{ د } (س) = ٢ = ١ \times ٢ = (س) \text{ د } (س)$$

$$\text{نها } \leftarrow (١) \text{ د } (س) = ٢ = ٢ + ١-١ = (س) \text{ د } (س)$$

$$\text{∴ نها } \leftarrow ١ \text{ د } (س) = \text{ نها } \leftarrow ١ \text{ د } (س)$$

(٢) نعيد تعريف الدالة بدون مقياس

$$\text{∴ د } (س) = \frac{(٣-س)(٤-س)}{(٣-س)} \text{ ∴ د } (س) = ٤-س$$

$$س > ٤ ، \text{ د } (س) = ١ = س = ٣$$

$$\text{د } (س) - (س-٤) = ٣ > س > ٤$$

$$\text{نها } \leftarrow ٢ \text{ د } (س) = \text{ نها } \leftarrow ٢ \text{ د } (س-٤) = ١$$

$$\text{نها } \leftarrow ٢ \text{ د } (س) = ١- ، \text{ د } (٣) = ١$$

∴ نها د(س) ≠ د (٣) الدالة غير متصلة من

اليسار ، نها ← د(س) = د (٣)

$$\frac{1}{3} = \frac{(1+س)س}{(1+س-س)(1+س)} \quad \text{نها ← (٣)}$$

$$\frac{1}{3} = 1 \quad \therefore \text{ك}$$

$$(٤) د(٣) = ١ \quad \text{نها ← (٣)}$$

$$\frac{١-س}{٣-س} = ١ \quad \therefore \text{نها ← (٣)}$$

$$\therefore د(س) متصلة عند س = ٣$$

$$(٥) د(٤) = \frac{1}{3} \quad \text{نها ← (٤)}$$

$$\frac{٣+١-س\sqrt{٣}}{٣+١-س\sqrt{٣}} \times \frac{٣-١+س\sqrt{٣}}{٤-س}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{٣}{٣+١+س\sqrt{٣}} \quad \text{نها ← (٤)}$$

$$\therefore \text{الدالة متصلة}$$

$$(٦) \text{نها ← (٦)} = \frac{٤-س}{٤-س} = ١ \quad \text{نها ← (٦)}$$

$$\therefore \text{ك}$$

$$(٧) د(٢) = ٤ \quad \text{نها ← (٢)}$$

$$٢+١٢ = ٤ \quad \therefore \text{الدالة متصلة}$$

$$١ = ١ \quad \therefore ٢+١٢ = ٤$$

$$(٨) \left. \begin{array}{l} \frac{س}{|س|} \\ \frac{س}{س} \end{array} \right\} = \begin{array}{l} (٠ < س) \\ س > ٠ \\ س < ٠ \\ س > ٠ \end{array}$$

د(س) غير معرفة عند س = ٠ ∴ غير متصلة

$$د(س) = س - |س|$$

$$\therefore د(س) = \left. \begin{array}{l} س - |س| \\ س + |س| \end{array} \right\} = \begin{array}{l} س \leq ٠ \\ س > ٠ \end{array}$$

$$\text{نها ← (٠)} = ٠ + ٠ = (س + |س|)^+$$

$$\therefore \text{الدالة متصلة عند س = ٠}$$

$$(٩) د(١) = ١ \quad \text{نها ← (٩)}$$

$$\text{نها ← (٩)} = (س + |س|)^+$$

$$\therefore د(١) = ١$$

$$\therefore د(١) = ١$$

$$(١٠) د(٣) = ٣ = ٣ + ٠ = ٣$$

$$د(٣) = ٣ = (س + |س|)^+$$

$$\therefore د(٣) = ٣$$

$$\therefore \text{الدالة متصلة}$$

(١١) الدالة متصلة عند س = م

$$\frac{٢٨}{٣} = (م) \quad \frac{٧}{٣} = (م)$$

$$\therefore م = ٤$$

$$(١٢) د(س) = \left. \begin{array}{l} \frac{٤-س}{٤+س} \\ \frac{٠}{٣} \end{array} \right\} = \begin{array}{l} \text{نها ← (١٢)} \\ \text{نها ← (١٢)} \end{array}$$

$$\therefore \text{الدالة متصلة}$$

عسول تمزيق (٣)

(٤) ∴ الدالة قابلة للاشتقاق ∴ د (+١) = د (-١)

$$1 = 1 \therefore 1 = 1$$

∴ الدالة قابلة للاشتقاق فيها تكون متصلة عند

$$\text{النقطة } x = 1 \therefore د (+١) = د (-١)$$

$$\therefore \text{صفر} = 1 + 2 = 3 \therefore 2 = 3 - 1 \therefore 1 = 1$$

$$(٥) د (-١) = 2, د (+١) = 2 \therefore د (١) = 2$$

$$د (-١) = د (١) \therefore \text{الدالة متصلة عند } x = 1$$

$$\therefore د (-١) = \text{نهاية} \rightarrow \frac{2-1+(1-1)}{1} = 0$$

$$د (+١) = \text{نهاية} \rightarrow \frac{2-1+1+1}{1} = 1$$

∴ الدالة متصلة وغير قابلة للاشتقاق

$$(٦) د (١) = 1 = د (-١), د (+١) = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = 2$$

$$\therefore \text{نهاية} \rightarrow د (١) = 1 = د (١) \therefore \text{الدالة متصلة}$$

$$د (-١) = \text{نهاية} \rightarrow \frac{1-1+1}{1} = 1$$

$$د (+١) = \text{نهاية} \rightarrow \frac{1-\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+1+\frac{1}{1}}{1} = 2$$

$$\therefore د (-١) = د (+١)$$

∴ الدالة قابلة للاشتقاق عند $x = 1$

$$د (١) = \left. \begin{array}{l} 1 \geq x \\ 1 < x \end{array} \right\} = 1$$

$$د (-١) = \text{نهاية} \rightarrow \frac{1-1}{1} = 0 = \text{صفر}$$

$$د (+١) = \text{نهاية} \rightarrow \frac{1-1+1}{1} = 1$$

$$\therefore د (-١) \neq د (+١)$$

∴ الدالة غير قابلة للاشتقاق مرة ثالثة

(١) ∴ الدالة متصلة ∴ د (-٢) = د (+٢) = د (٢)

$$1 = 1 \therefore \frac{1}{1} = 2 \times \frac{1}{2}$$

$$د (-٢) = \text{نهاية} \rightarrow \frac{\frac{1}{2} - (1+2) - \frac{1}{2} - 1}{1} = -2$$

$$د (+٢) = \text{نهاية} \rightarrow \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 1}{1} = -1$$

$$\therefore د (-٢) = د (+٢) \therefore \text{الدالة قابلة للاشتقاق}$$

(٢) ∴ الدالة متصلة عند $x = 2$

$$\therefore د (-٢) = د (+٢) = د (٢) = 0$$

$$1 = 1 \therefore 0 = 1 - 1 + 2 = 2$$

$$د (+٢) = 1 + 2 + 2 = 5 \therefore 2 = 5$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{من } 1 \text{ من } 1 \text{ عندما } x > 2 \\ 0 \text{ عندما } x = 2 \\ \text{من } 2 + 1 \text{ عندما } x < 2 \end{array} \right\} = د (٢)$$

$$\therefore د (-٢) = \text{نهاية} \rightarrow x^-$$

$$\text{نهاية} \rightarrow \frac{0-1-(1+2)+1(1+2)}{1} = 0 = 0 + 0$$

$$2 = \frac{2}{1} = د (+٢)$$

$$\therefore د (-٢) \neq د (+٢)$$

∴ الدالة غير قابلة للاشتقاق

(٣) ∴ الدالة متصلة عند $x = 1$ ∴ د (-٢) = د (+٢)

$$1 = 1 \iff 2 = 1 + 1$$

$$د (+١) = \text{نهاية} \rightarrow \frac{2-1+(1+1)}{1} = 2$$

$$د (-١) = 1 \therefore د (+١) \neq د (-١)$$

∴ الدالة غير قابلة للاشتقاق

(٧) ∴ الدالة قابلة للاشتقاق مرتين عن $s = 1$

فهي متصلة عند $s = 1$ أي نها $s \rightarrow 1^-$ (من)

$$= \text{نها } s \rightarrow 1^- = (1) = 1$$

$$\therefore \text{ذ (من)} = 1 = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$\therefore 1 + 1 + 1 = 3 \text{ — (1)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{من}^3 \\ \text{من} > 1 \end{array} \right\} \therefore \text{ذ (من)} = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{من}^3 \\ \text{من} < 1 \end{array} \right\} \therefore \text{ذ (من)} = 1 + 1 + 1 = 3$$

∴ الدالة قابلة للاشتقاق عند $s = 1$

$$\therefore \text{نها } s \rightarrow 1^- = \frac{(1) - (1+1)}{1} = 0$$

$$\therefore \text{نها } s \rightarrow 1^- = \frac{1 - (1+1)}{1 - (1+1)} = 0$$

$$\therefore 3 = \text{نها } 1 + 1 + 1 = 3$$

ولكن من (1) $1 = 1 + 1 + 1$

$$\therefore 3 = \text{نها } s \rightarrow 1^- = \frac{1 + 1 + 1}{1} = 3$$

$$3 = \text{نها } (1 + 1 + 1)$$

$$\therefore 3 = 1 + 1 + 1 \text{ — (2)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{من}^3 \\ \text{من} > 1 \end{array} \right\} \text{وتكون ذ (من)} = 3$$

لأن ذ (من) قابلة للاشتقاق عند $s = 1$

وتكون ذ (من) متصلة عند $s = 1$

$$\therefore \text{ذ (1)} = \text{نها } s \rightarrow 1^- = \frac{(1) - (1+1)}{1} = 0$$

$$= \text{نها } s \rightarrow 1^- = \frac{(1) - (1+1)}{1} = 0$$

$$\therefore 1 = 1 + 1 + 1 \text{ — (2)}$$

$$\therefore 3 = 1 + 1 + 1$$

$$\therefore 1 = 1 + 1 + 1 \text{ — (1)}$$

$$\therefore 1 = 1$$

(٨) بحث اتصال الدالة عند $s = 1$

$$(1) = 1, (1) = 1, (1) = 1$$

∴ نها $s \rightarrow 1^-$ (من) $1 = 1$ ∴ الدالة متصلة

بحث الاشتقاق : ذ (1) = صفر

ذ (1) = صفر ∴ الدالة قابلة للاشتقاق

$$\therefore 1 = 1, \text{ذ (1)} = 0$$

$$(9) \text{ذ (1)} = (1) = 1 - 1 = 0$$

$$\therefore \text{ذ (1)} = \text{نها } s \rightarrow 1^- = \frac{(1) - (1+1)}{1} = 0$$

$$\therefore \text{ذ (1)} = 0 \text{ ∴ الدالة قابلة للاشتقاق}$$

∴ فهي متصلة عند $s = 1$

(١٠) بالقسمة المطولة ينتج أن :

$$\text{ذ (من)} = \frac{(3 - \text{من})}{3 - \text{من}}$$

$$16 = 1 + 1 + 1, \text{نها } s \rightarrow 1^- = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$\therefore 16 = 1 + 1 + 1 \text{ — (من)}$$

$$\text{ذ (من)} = 2 + 1 = 3 \therefore \text{ذ (3)} = 8$$

$$\text{ذ (3)} = 16 \therefore \text{النقطة (3, 16)}$$

∴ ميل العودي = $\frac{1}{8}$ ∴ معادلة العودي

$$\text{من-} 16 = \frac{1}{8} (\text{من} - 3)$$

$$8 \text{ من} + 128 = 16$$

فصل فی تفسیر (۳)

نقطة التقاطع هي (٠، ١) (١، ٠) (٢، ٠)

قفا هـ = ١، ٠ = ٠ = ٠ = ٠ ق (٢، هـ) = صفر

$$(١) \frac{٦}{٦} = \frac{٤}{٤} + \frac{٢}{٢}$$

$$\therefore \left(\frac{٦}{٦} \right) (١، ٠) = ١ \times ٦ + ١ \times ٤ = ١٠$$

$$(٢) \frac{١}{٢} = \frac{٦}{٦} + \frac{٢}{٢}$$

$$\therefore \left(\frac{٦}{٦} \right) (١، ٠) = \frac{١}{٢}$$

(٣) بإجراء الاشتقاق للطرفين بالنسبة إلى س

$$\therefore -٢ = -٢ - (١ \times \frac{٦}{٦} + \frac{٢}{٢} \times \frac{٦}{٦})$$

$$\therefore \frac{٦}{٦} - (٢ + ٢) = -٢$$

$$\therefore \frac{٦}{٦} - ٤ = -٢$$

$$\therefore \left(\frac{٦}{٦} \right) (٣، ١) = \frac{١٢-٢}{٦-٦} = \frac{١٠}{٠} = \text{غير معرف}$$

(٤) لإيجاد نقط التقاطع مع محور السينات نضع س = ٠

$$\therefore \text{صفر} = (١-٢) (٢+٢) (٣-٢)$$

$$\therefore ١ = ٢، ٢ = ٢، ٣ = ٢$$

$$\therefore \text{نقط التقاطع هي } (٠، ١)، (٠، ٢)، (٠، ٣)$$

$$\therefore \text{س} = ٢ - ٢ = ٠، ٢ - ٢ = ٠، ٣ - ٢ = ١$$

$$\therefore \frac{٦}{٦} = \frac{٣}{٣} - \frac{١}{١} = ٠$$

$$\therefore \text{ميل المماس عند } (٠، ١) = ٢ - ٢ = ٠$$

$$\therefore \text{ميل المماس عند } (٠، ٢) = ٢ - ٢ = ٠$$

$$\therefore \text{ميل المماس عند } (٠، ٣) = ٢ - ٢ = ٠$$

$$(٥) \frac{٦}{٦} = \frac{٣}{٣} - \frac{١}{١} \text{ ولكن ميل المماس = قفا هـ}$$

$$\therefore \text{قفا هـ} = ٢ - ٢ = ١ \text{ ق (٢، هـ) = } ٤٠$$

$$\therefore ١ = ٢، ٢ = ٢، ٣ = ٢$$

$$(٦) \frac{٤}{٤} = \frac{٦}{٦} + \frac{٢}{٢}$$

$$\therefore \text{قفا هـ} = \frac{٤}{٤} = \frac{٦}{٦} + \frac{٢}{٢} = ١$$

$$\therefore \text{ق (٢، هـ) = } ١٢٠$$

(٧) بإجراء الاشتقاق بالنسبة إلى س

$$\therefore ٢ = ٢ - (١ \times \frac{٦}{٦} + \frac{٢}{٢} \times \frac{٦}{٦})$$

$$\therefore \frac{٦}{٦} - (٢ + ٢) = ٢$$

$$\therefore \frac{٦}{٦} - ٤ = ٢$$

$$\therefore \frac{٦}{٦} = \frac{٤}{٤} = \frac{٦}{٦} \text{ عند } (١، ٣)$$

$$\therefore \text{قفا هـ} = ١، ٠ = ٠ = ٠ = ٠ \text{ ق (٢، هـ) = } ١٢٠$$

$$(٨) \frac{٦}{٦} = \frac{٣}{٣} - \frac{١}{١} = ١٢$$

$$\therefore \text{عندما يكون المماس // محور السينات} \therefore \frac{٦}{٦} = ٠$$

$$\therefore ١ = ٢، ٢ = ٢، ٣ = ٢ \therefore \text{بالقسمة + والتحليل}$$

$$\therefore ٠ = (٢ + ٢) (٢ - ٢)$$

$$\therefore ٢ = ٢، ٢ = ٢، ٣ = ٢$$

$$\therefore \text{من معادلة المنحنى} \therefore \text{النقط هي } (١٩، ٢)، (٨، ١)$$

(٩) بإجراء الاشتقاق بالنسبة إلى س

$$\therefore \frac{٦}{٦} = \frac{٣}{٣} - \frac{١}{١} = ٢ \times (٢ + ٢) (٢ - ٢)$$

لاحظ أن مشتقة حاصل ضرب دالتين =

الأولى \times مشتقة الثانية + الثانية \times مشتقة الأولى

$$\therefore \text{صفر} = ٢ - ٢ = ١٨ + ١٨ - ٢ = ٦$$

$$\therefore \text{صفر} = ٢ - ٢ = ٤ + ٤ = ٠ \therefore (١-٢) (٢-٢) = ٠$$

$$\therefore ١ = ٢ = ٢ = ٢ = ٢ = ٢ = ٢ = ٢$$

من معادلة المنحنى \therefore النقطة هي $(2,1)$ ، $(5,-4)$

$$(10) \quad \frac{1 \times (2-1) - 2 \times (2-5)}{(2-5)} = \frac{6}{3}$$

\therefore المماس // المستقيم

\therefore ميل المماس = ميل المستقيم

$$\text{لاحظ أن ميل المستقيم} = \frac{\text{معامل } x}{\text{معامل } y} = \frac{3}{1}$$

$$\therefore \frac{3}{(2-5)} = 3 \quad \therefore 1 = (2-5)$$

$$\therefore (2-5) = 1 \pm 3 = 4, \therefore 1 = 5$$

من معادلة المنحنى \therefore النقطة هي $(5,-4)$ ، $(1,1)$

$$(11) \quad 3 = 3 - 3$$

أولاً: ميل المستقيم $3 = 3 + 0$ هو 0

$$\therefore 3 = 3 - 3 = 0$$

من معادلة المنحنى \therefore النقطة هي $(0,0)$

ثانياً: ميل المستقيم $3 = 3 + 0$ هو 0

\therefore ميل العمودى هو 9

$$\therefore 3 = 3 - 9 = -6 \quad \therefore 4 = 1 \pm 2$$

من معادلة المنحنى \therefore النقطة هي $(7,2)$ ، $(3,-2)$

(12) \therefore النقطة $(2,1)$ \exists للمنحنى \therefore تحقق معادلته

$$\therefore 2 = 1 + 2 - 6$$

$$\therefore 2 = 1 + 2 - 6 \quad (1)$$

$$3 = 1 + 2 + 2 - 6$$

ميل المماس عند $(2,1)$ هو $3 = 2 + 2 - 6$

$$\therefore 3 = 2 + 2 - 6 \quad \therefore 3 = 2 + 2 - 6$$

$$\therefore 1 = 2 + 3 - 6 \quad (2)$$

بضرب طرفي (1) \times 2 والجمع مع طرفي (2)

$$\therefore 1 = 2 + 3 - 6 \quad (1)$$

$$(13) \quad \text{المنحنى الأول} = 3 = 1 + 3$$

ميل المماس عند $(2,1)$ $3 = 1 + 3$

المنحنى الثاني $= 3 = 2 + 3$

ميل المماس عند $(2,1)$ $3 = 2 + 3$

\therefore المماس مشترك $3 = 3$

$$3 = 1 + 3 - 6 \quad (1)$$

\therefore للمنحنى الأول \exists تحقق معادلته

$$\therefore 2 = 1 + 3 - 6$$

\therefore للمنحنى الثاني \exists تحقق معادلته

$$\therefore 2 = 1 + 3 - 6$$

بطرح (2) من (1) $\therefore 1 = 2 - 3$

$$\therefore 1 = 2 - 3 \quad (2) \quad \therefore 1 = 2 - 3$$

$$(14) \quad 3 = 3 + 3 - 6$$

ميل المماس $3 = 3 + 3 - 6$

\therefore متجه إتجاه المماس هو $(3,1)$

\therefore المعادلة المتجهة للمماس هي $3 = 3 + 3 - 6$

$$\therefore 3 = 3 + 3 - 6$$

\therefore متجه إتجاه العمودى هو $(1,-3)$

\therefore المعادلة المتجهة للمماس هي $3 = 3 + 3 - 6$

$$[ب] \text{ من } \frac{1-x(س+١)-١ \times (س-١)}{(س-١)}$$

$$\text{من } (٢,٢) = \frac{٢}{١} = ٢$$

$$\text{معادلة المماس هي } ٢ = ٣ + \text{من} - (س-٢)$$

$$\text{أي: } ٢ \text{ من} - \text{من} - ٧ = ٠$$

$$\text{معادلة العمودي هي } ٢ + \text{من} = ٣ - \frac{١}{٢} (س-٢)$$

$$\text{أي: } ٢ \text{ من} + \text{من} + ٤ = ٠$$

$$[ج] \text{ عندما } ١٢ = \text{من} \therefore ١ = \frac{٢ \times ١٨}{١٤ + ١٤}$$

$$\therefore \text{النقطة هي } (١, ١٢)$$

$$\text{من} = \frac{٢ \times ١٨}{(١٤ + ١٤)}$$

$$\therefore \text{ميل المماس عند } (١, ١٢) = م = \frac{١٣٢}{١٦٤} = \frac{١}{٢}$$

$$\therefore \text{متجه إتجاه المماس هو } (١, ٢)$$

$$\therefore \text{متجه إتجاه العمودي هو } (٢, ١)$$

$$\therefore \text{المعادلة المتجهة للمماس هي } ٢ = ٣ + (١, ٢) + (١, ٢)$$

$$\therefore \text{المعادلة المتجهة للعمودي هي } ٢ = ٣ + (١, ٢) + (٢, ١)$$

$$[د] \text{ بإجراء الاشتقاق بالنسبة إلى من}$$

$$\therefore ٢ \text{ من} + ٢ \text{ من} + ٢ = ٣ - ٢ \text{ من}$$

$$\therefore \text{من} = \frac{٢ - ٢ \text{ من}}{٣ - ٢}$$

$$\text{ميل المماس } م = \text{من} = (١, ٢) = ٢$$

$$\text{معادلة المماس هي } ٢ = ١ + (س-٢)$$

$$\text{أي: } ٢ \text{ من} + \text{من} + ٣ = ٠$$

$$\text{معادلة العمودي هي } ١ - \text{من} = \frac{١}{٢} (س-٢)$$

$$\text{أي: } ٢ \text{ من} - ٤ + \text{من} = ٠$$

$$[هـ] \text{ عندما } ٣ = \text{من} \therefore ٨ = \text{من}$$

$$\therefore \text{النقطة هي } (٨, ٣)$$

$$\text{من} = ٣ - ٦ - ١$$

$$\text{ميل المماس } ٨ = ١ - ١٨ - ٢٧ = م$$

$$\therefore \text{متجه إتجاه المماس هو } (٨, ١)$$

$$\therefore \text{المعادلة المتجهة للمماس هي } ٢ = ٣ + (٨, ١) + (٨, ١)$$

$$\therefore \text{متجه إتجاه العمودي هو } (١, ٨)$$

$$\therefore \text{المعادلة المتجهة للعمودي هي } ٢ = ٣ + (٨, ١) + (١, ٨)$$

$$(١٥) \text{ من} = ٢ - ٥ \text{ من}$$

$$\text{من} (١, ٢) = ٢ - ٥ = ٣$$

$$\therefore \text{ميل المماس } ٣ = \text{من} \therefore \text{ميل العمودي } = \frac{١}{٣}$$

$$\therefore \text{معادلة العمودي هي } ٢ - \frac{١}{٣} = \frac{١}{٣} (س-١)$$

$$\text{أي: } ٢ \text{ من} - ٣ = ٠$$

$$\therefore (٠, ٠) \text{ تحقق معادلة العمودي}$$

$$\therefore \text{فهو يمر بنقطة الأصل}$$

$$(١٦) \text{ بإجراء الاشتقاق بالنسبة إلى من} \therefore ٢ \text{ من} = ٢٠$$

$$\therefore \text{من} = ١٠$$

$$\therefore \text{المماس يصنع مع السينات زاوية } ٤٥^\circ = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \text{من} = \text{ظا } ٤٥^\circ = ١ \therefore \text{من} = ١٠$$

$$\text{من معادلة المنحنى: من} = ٥ \therefore \text{النقطة هي } (١٠, ٥)$$

$$\therefore \text{معادلة المماس هي: من} - ١٠ = ١ \times (س-٥)$$

$$\text{أي: من} - ٥ = ٠$$

$$(١٧) \text{ بإجراء الاشتقاق بالنسبة إلى من}$$

$$\therefore ٢ \text{ من} + ٢ \text{ من} + ٢ = ٣ - ٢ \text{ من} \therefore \text{من} = \frac{٢ - ٢ \text{ من}}{٣ - ٢}$$

$$\text{متجه إتجاه المستقيم هو } (٢, ٣) \therefore \text{ميله } = \frac{٢}{٣}$$

$$\therefore \text{المماس // المستقيم} \therefore \text{ميل المماس} = \text{ميل المستقيم}$$

$$\therefore \frac{٢}{٣} = \frac{٢ - ٢ \text{ من}}{٣ - ٢} \therefore \text{من} = \frac{٢}{٣}$$

بالتعويض في معادلة الدائرة

$$\therefore \text{مس}^2 + \left(\frac{3}{4}\text{مس}\right)^2 = 5^2 \Rightarrow \text{مس}^2 = 16 \Rightarrow \text{مس} = \pm 4$$

$$\therefore \text{مس}^2 = 16 \Rightarrow \text{مس} = \pm 4$$

\therefore النقطة هي $(\pm 4, \pm 4)$

معادلة المماس هي : $\text{مس} - 6 = \frac{2}{3}(4 - \text{مس})$

$$\text{أي : } 2\text{مس}^2 + 3\text{مس} - 26 = 0$$

معادلة المماس الثاني هي : $\text{مس} + 6 = \frac{2}{3}(4 + \text{مس})$

$$\text{أي : } 2\text{مس}^2 + 3\text{مس} - 26 = 0$$

$$(18) \text{ مس} = 4 - 3$$

$$\text{ميل المستقيم} = \frac{\text{معامل مس}}{\text{معامل مس}} = \frac{2}{29}$$

\therefore المماس \perp المستقيم \therefore ميل المماس = 29

$$\therefore 29 = 4 - 3 \Rightarrow \text{مس} = 8$$

$\therefore \text{مس} = 2$ من معادلة المنحنى $\therefore \text{مس} = 10$

\therefore معادلة المماس هي : $\text{مس} - 10 = 29(2 - \text{مس})$

$$\text{أي : } 29\text{مس} - 58 = 0$$

$$(19) \text{ المنحنى الأول : مس} = 4 - 3$$

المنحنى الثاني : $\text{مس} = 2 - 3$ عند النقطة (7,1)

$$\text{ميل المماس للمنحنى الأول : مس} = 3 - 4 = 1$$

$$\text{ميل المماس للمنحنى الثاني : مس} = 2 - 2 = 1$$

$$\therefore 1 = 1 \times 1 = 1$$

\therefore المماسان متعامدان

أي أن المنحنيان على التعمد عند النقطة (7,1)

لاحظ أن (7,1) تحقق المعادلتين فهي نقطة تقاطع

(20) في البداية توجد نقطة التقاطع

$$\therefore \text{مس}^2 - 2\text{مس} + 3 = 0$$

$$\therefore 2\text{مس}^2 - 4\text{مس} + 2 = 0$$

أي أن : $\text{مس}^2 - 2\text{مس} + 1 = 0$

$$(1 - \text{مس})^2 = 0 \Rightarrow 1 - \text{مس} = 0 \Rightarrow \text{مس} = 1$$

\therefore المنحنيان يتقاطعان في نقطة واحدة

بالتعويض في أي من المنحنيين $\therefore \text{مس} = 2$

\therefore نقطة التقاطع هي (2,1)

المنحنى الأول : $\text{مس} = 2 - 3$

$$\therefore \text{مس} = 2 - 3$$

ميل المماس عند (2,1) : $\text{مس} = 1 - 2 = 1$

المنحنى الثاني : $\text{مس} = 3 - 2$

$$\therefore \text{مس} = 3 - 2$$

ميل المماس عند (2,1) : $\text{مس} = 2 - 3 = 1$

$\therefore \text{مس} = 1$ \therefore المنحنيان تماسان

معادلة المماس المشترك

$$\text{مس} - 2 = 1(1 - \text{مس}) \text{ أي : مس} - 1 = 0$$

على سبيل تمثيل

(1) بإجراء الاشتقاق للطرفين بالنسبة إلى ن

$$\therefore \text{مس} \times \frac{\text{مس}}{\text{ن}} + \frac{\text{مس}}{\text{ن}} \times 2 + \frac{\text{مس}}{\text{ن}} \times 3 + \frac{\text{مس}}{\text{ن}} \times 1 = 0$$

$$\text{عند النقطة (3,1) : } 0,1 = \frac{\text{مس}}{\text{ن}}$$

$$\therefore 0,1 \times 2 + 0,1 \times 3 + \frac{\text{مس}}{\text{ن}} \times (1 - 0,1) + 0,1 \times 2 - 2 \times 0,1 = 0$$

$$\therefore 0,1 = \frac{\text{مس}}{\text{ن}} \Rightarrow 0,1 = 0,1$$

$$(2) \quad \frac{v}{v_0} = \frac{v}{v_0} \times 2 + \frac{v}{v_0} \times 4$$

∴ سرعة الإحداثى الصادي = ضعف سرعة

الإحداثى السيني

$$\therefore \frac{v}{v_0} \times 2 = \frac{v}{v_0}$$

$$\therefore \frac{v}{v_0} \times 2 = \frac{v}{v_0} \times 2 + \frac{v}{v_0} \times 4$$

بقسمة الطرفين + $\frac{v}{v_0}$ ∴ $v = 1$

من معادلة المنحنى ∴ $v = 6$

∴ النقطة هي (1، 6)

(3) بإجراء الاشتقاق للطرفين بالنسبة إلى ن

$$\therefore \frac{v}{v_0} \times 2 + \frac{v}{v_0} \times 4 = \frac{v}{v_0} \times 8 - \frac{v}{v_0} \times 4$$

$$\therefore \frac{v}{v_0} = \frac{v}{v_0} \text{ بالقسمة على أي منها}$$

$$\therefore 2 + 4 = 8 - 4$$

$$\therefore v = 2 - v \text{ من معادلة المنحنى}$$

$$\therefore v = 2 - v \text{ ∴ } 10.8 = (2 - v) \times 8 - 4$$

$$\therefore 120 = 8 - 4$$

$$\therefore v = 6 - 4 = 2$$

$$\therefore (10 + v) = (6 - v)$$

$$\therefore v = 10 \text{ ، } v = 6$$

من معادلة المنحنى $v = 1.2$ ، $v = 4$

∴ النقطة هي (12، 10) ، (4، 6)

(4) نفرض أن الطول v ، الغرض (20-)

∴ الطول ينكمش بمعدل 0.025 سم/ث

$$\therefore \frac{v}{v_0} = 0.025 \text{ عندما } v = 20$$

$$\text{أي أن : } \frac{v}{v_0} = 0.025 \text{ عندما } v = 100$$

نفرض أن المساحة $M = v(20-)$

$$\therefore M = v - 20$$

بإجراء الاشتقاق بالنسبة إلى ن

$$\therefore \frac{dM}{dt} = \frac{dv}{dt} - 20$$

$$\therefore \frac{dM}{dt} = \frac{dv}{dt} - 20 = 0.025 \times 20 - 20$$

$$= 0.5 - 20 = -19.5 \text{ سم/ث}$$

(5) مساحة الموجة الدائرية $M = \pi r^2$ حيث r ثابت

$$\therefore \frac{dM}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$$

$$\therefore \frac{dM}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$$

$$\text{بعد 10 ثنية } r = 10 \times 2 + \text{صفر} = 20$$

لاحظ أن نصف قطر الموجة في البداية = صفر

$$\therefore \frac{dM}{dt} = 2\pi \times 20 \times 80 = 80\pi \text{ سم/ث}$$

(6) نفرض أن الطرف السفلي للسلم يبتعد عن الحائط بمقدار v

وأن الطرف العلوي للسلم يبتعد عن الأرض بمقدار v

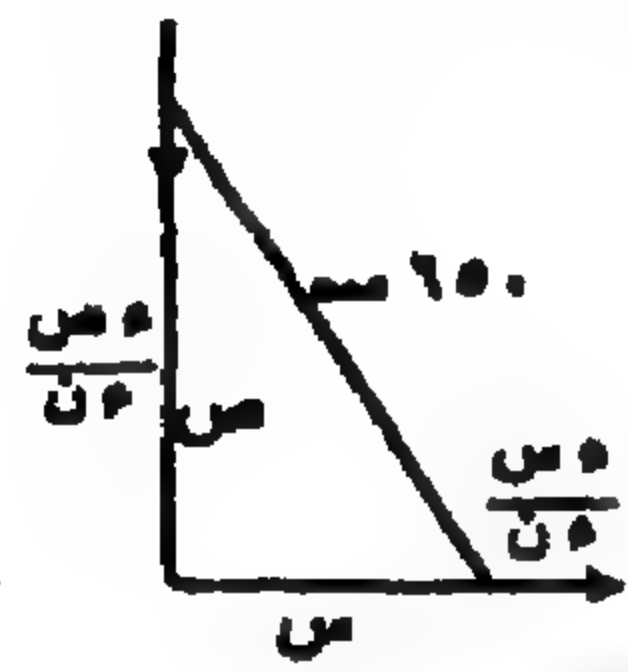
$$\therefore \text{سرعة الطرف السفلي } \frac{v}{v_0} = 30 \text{ سم/ث}$$

$$\text{سرعة الطرف العلوي } \frac{v}{v_0}$$

$$\therefore \frac{v}{v_0} = 30 \text{ سم/ث عندما } v = 250$$

المطلوب $\frac{v}{v_0}$

من الشكل



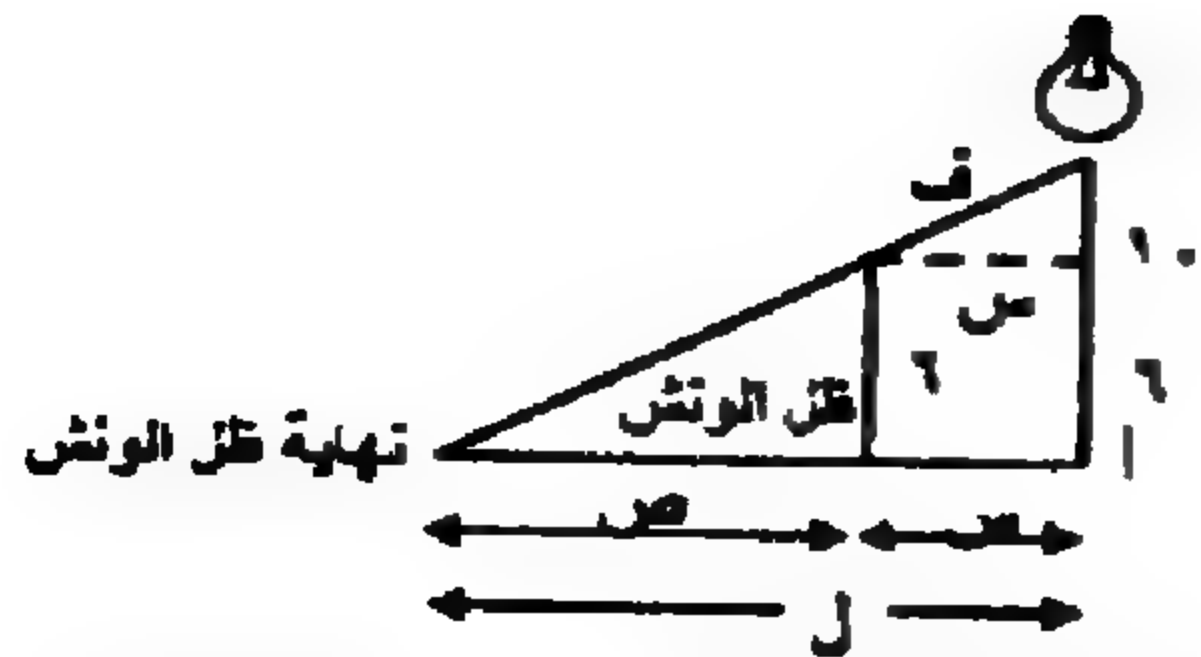
$$v(250) = v + v$$

$$\therefore v = \frac{v}{v_0} + \frac{v}{v_0}$$

$$\therefore \frac{v}{v_0} = \frac{v}{v_0} - \frac{v}{v_0} \text{ — (1)}$$

$$\text{عندما } v = 250$$

$$\therefore v = (250) - (250) = 0 \text{ ∴ } v = 100$$



(A) 11

نعرض أن الونش يبعد عن النقطة الثابتة أ (أسفل)

المصباح) بمقدار من

$$\therefore \text{سرعة الونش} = \frac{\text{م}}{\text{ث}} = 5 \text{ متر / ث}$$

لاحظ أن الونش يتحرك في اتجاه أ أي أن من تتناقص
فتكون $\frac{\text{م}}{\text{ث}}$ سالبة.

المطلوب : معدل تحرك نهاية ظل الونش أي $\frac{\text{ل}}{\text{ث}}$

$$\text{من الشكل} \frac{\text{م}}{\text{ل}} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{1}{6} = \frac{\text{ل}}{6} \Rightarrow \text{ل} = 6 \text{ م}$$

$$\therefore \frac{\text{ل}}{\text{ث}} = \frac{6}{5} = 1.2 \text{ متر / ث}$$

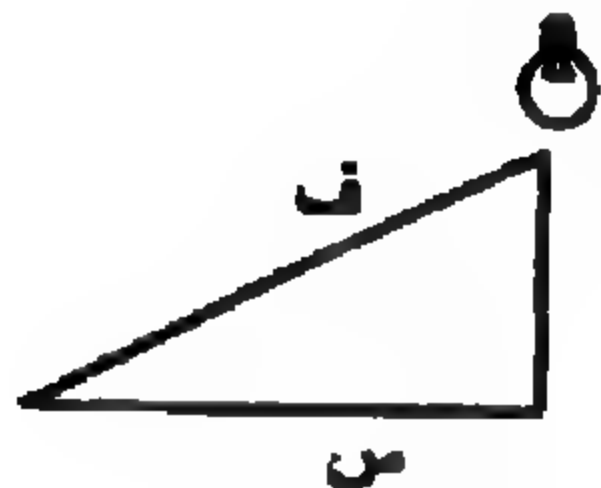
[ب] المطلوب : معدل تحرك طول ظل الونش أي $\frac{\text{م}}{\text{ث}}$

$$\text{من التشابه} \frac{\text{م}}{\text{ل}} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{1}{6} = \frac{\text{م}}{6} \Rightarrow \text{م} = 6 \text{ م}$$

$$\therefore \frac{\text{م}}{\text{ث}} = \frac{6}{5} = 1.2 \text{ متر / ث}$$

$$\therefore \frac{\text{م}}{\text{ث}} = \frac{6}{5} = 1.2 \text{ متر / ث}$$

[ج] المطلوب $\frac{\text{م}}{\text{ث}}$ عندما م = 10 متر



$$\text{من الشكل : } \text{ف} = \text{م} + 10$$

$$\therefore \text{ف} = \text{م} + 10$$

$$\therefore \frac{\text{ف}}{\text{ث}} = \frac{\text{م}}{\text{ث}} + \frac{10}{\text{ث}}$$

$$\text{عندما م} = 10 \Rightarrow \text{ف} = 20 \therefore \frac{\text{ف}}{\text{ث}} = \frac{20}{5} = 4 \text{ متر / ث}$$

$$\therefore \frac{\text{ف}}{\text{ث}} = \frac{20}{5} = 4 \text{ متر / ث}$$

$$(9) \text{ ح} = \text{طنق}_1 - \text{طنق}_2 = \text{ط} (\text{نق}_1 - \text{نق}_2)$$

$$\frac{\text{ح}}{\text{ث}} = \text{ط} (\frac{\text{نق}_1}{\text{ث}} - \frac{\text{نق}_2}{\text{ث}})$$

$$= \text{ط} (2 \times 0.1 - 2 \times 0.2)$$

$$\therefore \frac{\text{ح}}{\text{ث}} = -0.2 \text{ م / ث}$$

$$\therefore \frac{\text{م}}{\text{ث}} = \frac{20}{5} = 4 \text{ م / ث}$$

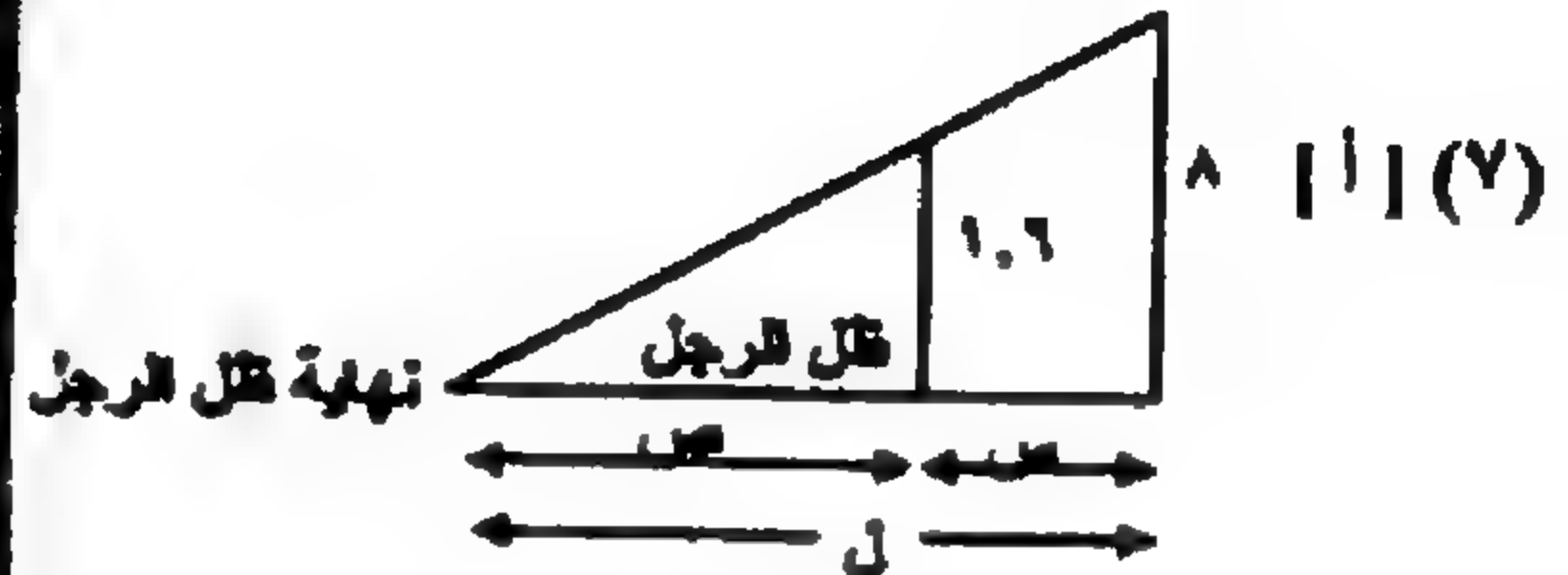
$$\text{عندما} \frac{\text{م}}{\text{ث}} = \frac{\text{م}}{\text{ث}}$$

$$\text{من (1)} \frac{\text{م}}{\text{ث}} = 1 \therefore \text{م} = \text{ث}$$

$$\therefore \text{م} + \text{م} = 20 \Rightarrow \text{م} = 10$$

$$\therefore \text{م} = 10$$

$$\therefore \text{م} = \frac{20}{5} = 4 \text{ م / ث}$$



نفرض أن الرجل يبعد عن الحائط بمقدار من

$$\therefore \text{سرعة الرجل} = \frac{\text{م}}{\text{ث}} = 2 \text{ متر / ث}$$

ونفرض أن طول ظل الرجل = م

\therefore المطلوب معدل إزدياد طول الرجل $\frac{\text{م}}{\text{ث}}$

$$\text{من تشابه المثلثين بالشكل} \therefore \frac{\text{م}}{\text{ل}} = \frac{\text{م}}{\text{م} + 10}$$

$$\therefore \frac{\text{م}}{\text{م} + 10} = \frac{1}{6} \Rightarrow \text{م} = 10$$

$$\therefore \frac{\text{م}}{\text{ث}} = \frac{10}{5} = 2 \text{ متر / ث}$$

$$\therefore \frac{\text{م}}{\text{ث}} = \frac{10}{5} = 2 \text{ متر / ث}$$

[ب] نفرض أن نهاية ظل الرجل تبعد عن الحائط بمقدار ل

$$\therefore \text{ل} = \text{م} + 10$$

$$\therefore \frac{\text{ل}}{\text{ث}} = \frac{\text{م}}{\text{ث}} + \frac{10}{\text{ث}}$$

$$\therefore \frac{\text{ل}}{\text{ث}} = \frac{10}{5} + 2 = 4 \text{ متر / ث}$$

(١٠) بعد ن ثابتة يكون :



$$ص = ٨ - ن$$

$$ص = ٦ + ن$$

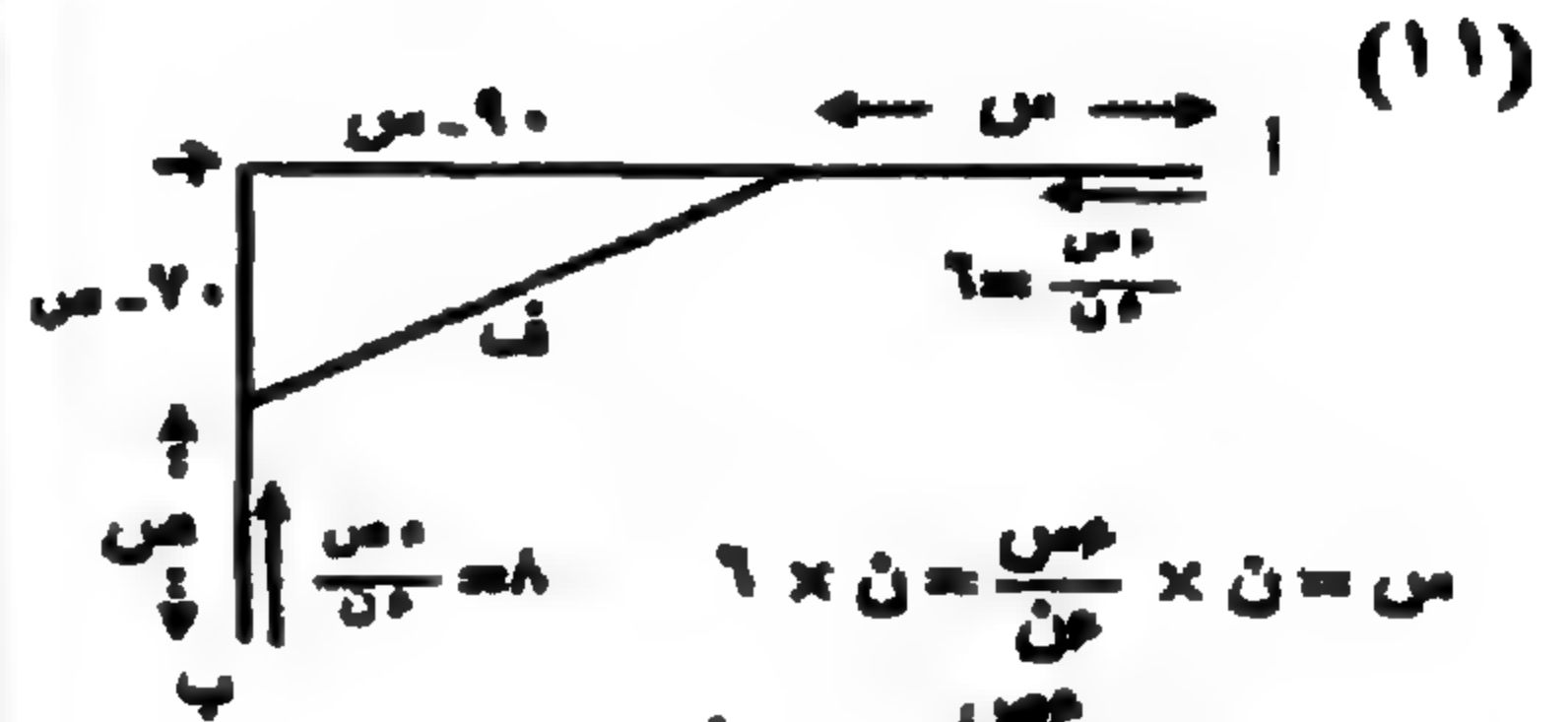
$$\text{مساحة المثلث م} = \frac{1}{2} ن ص$$

$$م = \frac{1}{2} (ن - ٨) (ن + ٦)$$

$$\therefore م = ٢٤ + ن - ن^2$$

$$\therefore \frac{٢٤}{ن} = ٢ - ن$$

$$\text{بعد لفتين} \therefore \frac{٢٤}{ن} = ٢ - ن \Rightarrow ١ = ٢ \times ٢ - ٢ = ١ \text{ سم / ث}$$



$$\text{من الشكل : } ف = (٩٠ - ن) + (٧٠ - ص)$$

$$= (٩٠ - ن) + (٧٠ - ص)$$

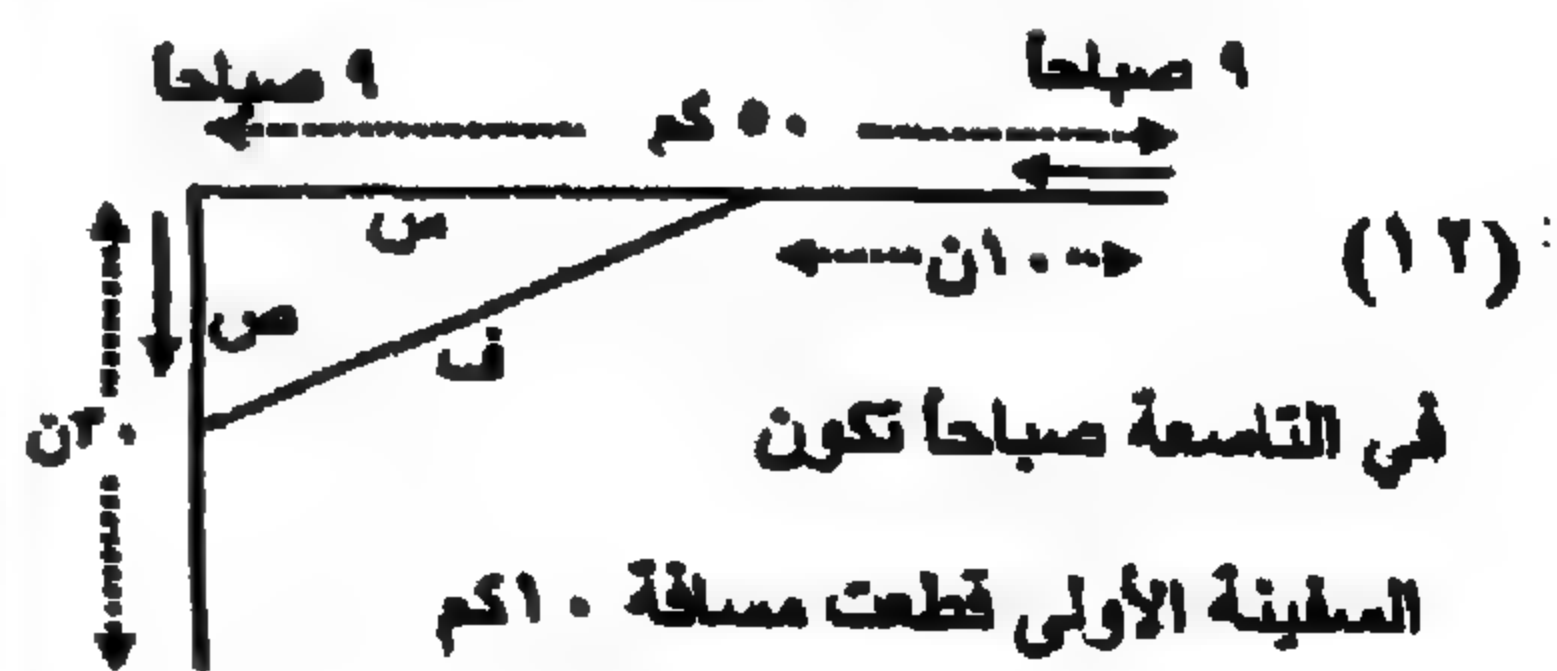
$$\therefore ف = ١٠٠ - ن - ص \quad (١)$$

$$\therefore ٢ ف = ٢٠٠ - ٢ن - ٢ص$$

$$\therefore \frac{١٠٠}{ف} = \frac{١}{٢} (١١ - ن)$$

$$\text{عندما } ٨ = ن \quad (١) \therefore ف = ٢٠$$

$$\therefore \frac{١٠٠}{ف} = \frac{١}{٢} (١١ - ٨) \Rightarrow ٢٧٥ = \sqrt{٢٧٥} \text{ متر / ث}$$



فتكون المسافة بينها وبين الميناء ٥٠ كم

وتكون إزاحة الأولى ١٠ ن وإزاحة الثانية ٣٠ ن

$$ف = ص + ن$$

$$\therefore ف = (٥٠ - ن) + (٣٠ - ص)$$

$$\therefore ف = ٨٠ - ن - ص \quad (١)$$

$$\therefore ٢ ف = ١٦٠ - ٢ن - ٢ص$$

في الساعة العشرة صباحاً تكون ن = ١

$$\text{من (١)} \therefore ف = ٨٠ - ١ - ص = ٧٩ - ص$$

$$\therefore ١٦٠ - ٢ص = ١٥٨ - ٢ص$$

$$\therefore \frac{١٦٠}{ف} = \frac{١٥٨}{١٠} \text{ ساعة / كم (الإشارة موجبة أي أنها يتباعان)}$$



المطلوب هو : $\frac{ص}{ن}$

$$\text{من الشكل} \quad \frac{١٢}{١٥} = \frac{ص}{ن}$$

$$\therefore ١٨٠ - ص = ١٥ - ن$$

$$ص = (١٥ - ن)$$

$$\therefore \frac{١٨٠}{١٥ - ن} = \frac{ص}{ن}$$

$$\therefore \frac{ص}{ن} = \frac{١٨٠}{(١٥ - ن)}$$

عند منتصف الثانية الأولى

المسافة المقطوعة ف = السرعة $\frac{ف}{ن}$ عند منتصف تلك الثانية

$$\therefore \frac{ص}{ن} = \frac{١٨٠}{(١٥ - ن)} \Rightarrow ٩ = \frac{١٨٠}{(١٥ - ن)}$$

الجواب تقريبي لأننا اعتبرنا أن سرعة الكرة ثابتة تقريباً

(١٤) [١] نلخص أن نصف القطر الخارجي نقي،

و أن نصف القطر الداخلي نقي،

$$\therefore \frac{٤}{٣} ط (نقي - نقي)$$

$$\therefore \frac{٤}{٣} ط (٣ نقي - ٣ نقي) = \frac{٤}{٣} ط (٣ نقي - ٣ نقي)$$

$$= \frac{1}{3} \times 2 \times (نق١ - نق٢) = \frac{1}{3} \times 2 \times (نق١ - نق٢)$$

ولكن حجم المادة ثابت $\therefore \frac{ع}{د} = \frac{ع}{د}$ صفر

$$\therefore نق١ = \frac{ع}{د} = \frac{ع}{د} = نق٢$$

$$\therefore ٨١ = \frac{ع}{د} = ١ \times ٩$$

$$\therefore \frac{ع}{د} = \frac{١}{٩} \text{ سم / ث}$$

[ب] مساحة السطح الخارجى م = ٤ ط نق١

$$\therefore \frac{ع}{د} = \frac{ع}{د} = \frac{ع}{د} = \frac{ع}{د}$$

$$= \frac{1}{9} \times ٩ \times ٢ \times ٤$$

$$\therefore \frac{ع}{د} = ٨ \text{ ط سم / ث}$$

[ج] نفرض أن سمك مادة الكرة س سم

$$\therefore س = نق١ - نق٢$$

$$\therefore \frac{ع}{د} = \frac{ع}{د} = \frac{ع}{د}$$

$$= ١ - \frac{1}{9} = \frac{٨}{9} \text{ سم / ث}$$

(١٥) نفرض أن عرض القاعدة س فيكون طولها

(س+٢) ويكون ارتفاع متوازي المستطيلات س

حجم متوازي المستطيلات ح = س(س+٢) × س

$$\therefore ح = س^٣ + ٢س^٢$$

$$\therefore \frac{ع}{د} = \frac{ع}{د} = \frac{ع}{د} = \frac{ع}{د}$$

$$\therefore ٠,٦ = (١٢ + س^٢) \times ٠,١$$

$$\therefore س^٣ + ٢س^٢ = ٢٠$$

$$\therefore (س+٢)(س^٢ + ١٠) = ٠$$

$$\therefore س = ٢, \text{ أ } س = \frac{1}{3} \text{ مرفوض}$$

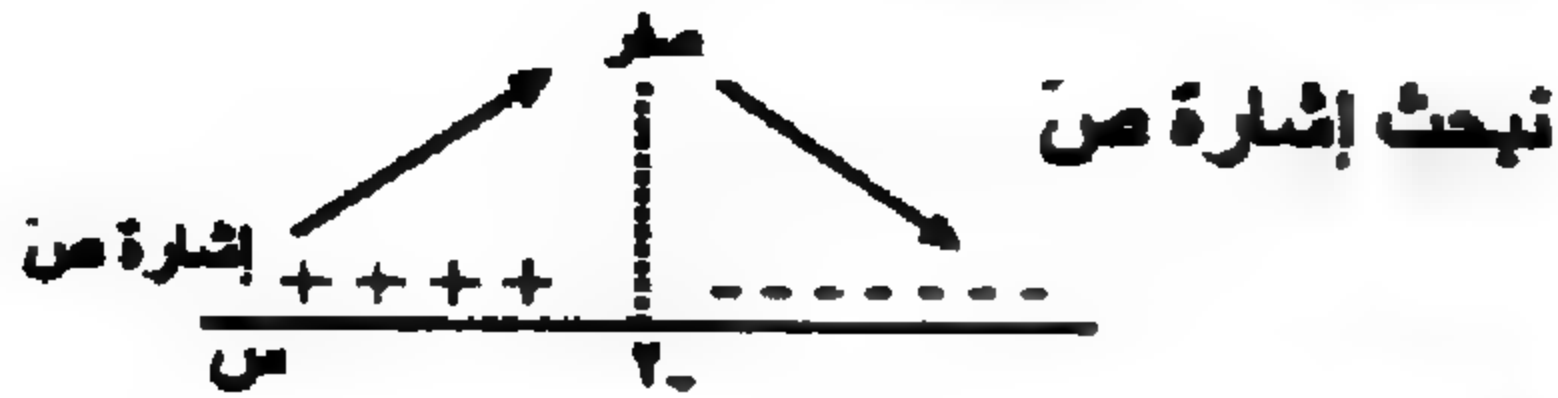
\therefore الأبعاد هي ٢، ٤، ٦

كأسول تمسرين (٧)

$$(١) س = ١ - ٤ = س١$$

$$س = ٤ - ٢ = س٢$$

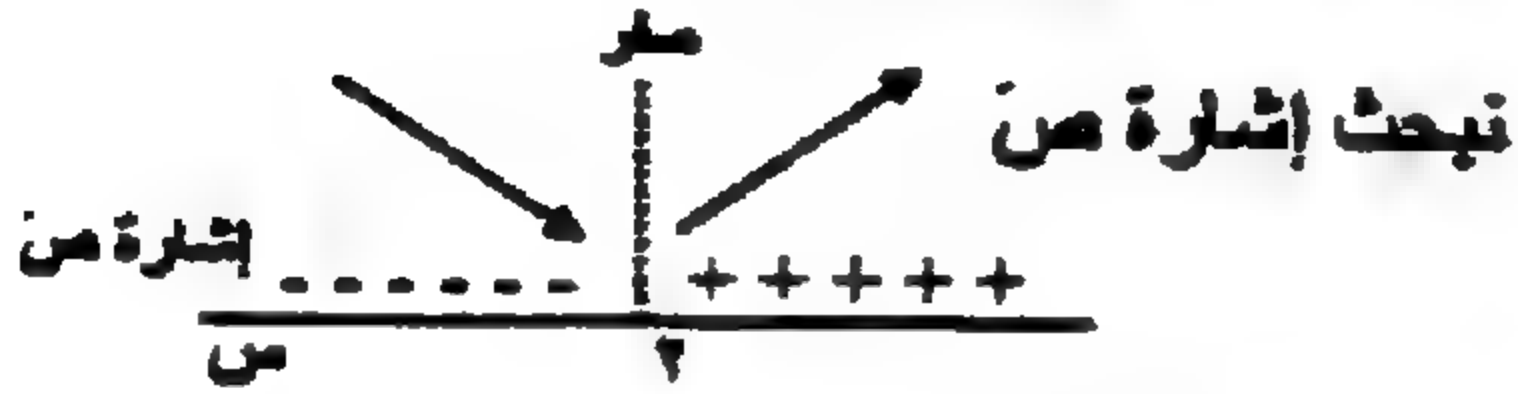
$$س = ٠ \text{ عندما } س = ٢$$



الدالة متزايدة في $[-\infty, ٠]$ ومتناقصة في $[٠, \infty]$

$$(٢) س = (٢ - س) \text{ ، } س = (٢ - س)$$

$$س = ٠ \text{ عندما } س = ٢$$



متناقصة في $[-\infty, ٢]$ ومتزايدة في $[٢, \infty]$

$$(٣) س = (٤ + س)^٢ \text{ مربع كامل موجب واضح أن}$$

$$س \leq ٠ \text{ لكل } س \geq ٠$$

\therefore الدالة متزايدة على ح

$$(٤) (س) = س^٢ - س^٣$$

$$(س) = س^٣ - س^٢ \text{ ، } (س) = س^٣ - س^٢$$

$$(س) = ٠ \text{ عندما } س = ٢, ٠$$



متزايدة في $[-\infty, ٠] \cup [٢, \infty]$

متناقصة في $[٠, ٢]$

$$(٥) س = \frac{س}{٢ - س} \text{ حيث } س \neq ٢$$

$$س = \frac{١ \times س - ١ \times (٢ - س)}{(٢ - س)}$$

∴ من $\frac{2}{(2-س)} =$ لاحظ المقام موجب

∴ من > 0 لكل من $0 < ح$

∴ الدالة متناقصة على $ح - [2]$

(٦) من $\frac{1}{س} = \frac{1}{س} - \frac{1}{س}$

من $\frac{1}{س} + \frac{1}{س} = \frac{1}{س}$ حيث من $\neq 0$

من $\frac{1-\sqrt{س}}{\sqrt{س}} =$
من $= 1 - \sqrt{س}$ عندما $0 = 1 - \sqrt{س}$

أو $0 = (1 + \sqrt{س})(1 - \sqrt{س})$

أي من $1 = 1$ ، من $1 = 1$



متزايدة في $[0, 1] \cup [1, \infty)$

متناقصة في $[1, 1]$

(٧) من $س = س$ } من $س \leq 1$
من $س > 1$

من $س < 1$ } من $س > 1$
من $س > 1$

من ذلك فإن من $0 \leq$ لكل من $0 < ح$

∴ الدالة متزايدة على $ح$

(٨) د (س) = $\left. \begin{matrix} س + ٢ \\ س + ١ \end{matrix} \right\}$ من $س \geq 1$
من $س < 1$

د (س) = $\left. \begin{matrix} س \\ ٢ \end{matrix} \right\}$ من $س > 1$
من $س < 1$

د (س) = 0 عندما $١ = (٢ + س)(١ - س)$

نبحث إشارة د (س)



متناقصة في $[0, \infty)$

متزايدة في $[1, 0] \cup [1, \infty)$

المسؤول نحصل على (٨)

(١) [i] من $س = س + ١ + س + ٢$

∴ من $س = س + ٢ + س + ١$ ، من $٢ = ٢$

من $= 0$ عندما من $= \frac{1}{س}$ ، من > 0

∴ عند من $=$ توجد عظمى مطلية هي:

من $٢ = \frac{1}{س} - \frac{1}{س} + ٢ = \frac{9}{٤}$

∴ القيمة العظمى المطلية $= \frac{9}{٤}$

[ii] من $س = س - ٢ + س + ٢ + س + ٢$

∴ من $س = س - ٢ + س + ٢$ ، من $٢ = س - ٢$

من $= 0$ عندما $٢ = (١ - س)$ ، من $١ = ١$

أو من $١ = ١$ ولكن من $١ = ١ - ١ = 0$

∴ لا توجد عظمى أو صغرى مطلية عند نقطة

الانقلاب من $= 0$

من $= 0$ عندما من $١ = ١$

من $٢ = ٢ + ٢ + ٢ - ١ = ٢$

∴ النقطة $(١, ٢)$ نقطة انقلاب

[iv] د (س) = $س + ٢ + س + ٢ - ١٢ + س + ١$

∴ د (س) = $س + ٢ + س + ٢ - ١٢$

∴ د (س) = $س + ٢ + س + ٢$

[vi] د (س) = $س (١ - س)$

أى : $2 = \text{من}$ ، $1 = \text{من}$

عند $\text{من} = 2$ ، $\text{ذ}(\text{من}) = 18 > 0$

\therefore توجد قيمة عظمى محلية هي $\text{ذ}(-2) = 20$

عند $\text{من} = 1$ ، $\text{ذ}(\text{من}) = 18 < 0$

\therefore توجد قيمة صفري محلية هي $\text{ذ}(1) = 2$

\therefore القيمة العظمى المحلية $= 0$

، الصغرى المحلية $= 2$

عند نقطة الانقلاب $\text{ذ}(\text{من}) = 0$

$\text{ذ}(\text{من}) = 0$ ، عندما $\text{من} = -\frac{1}{3}$

$\text{ذ}(-\frac{1}{3}) = 0 + 6 - \frac{1}{2} \times 3 + \frac{1}{8} \times 2 = \frac{23}{4}$

\therefore نقطة الانقلاب هي $(-\frac{1}{3}, \frac{23}{4})$

[v] $\text{من} = 2$ ، $\text{من}^2 = 3$ ، $1 + \text{من}^3$

$\therefore \text{من} = 2$ ، $\text{من} = 6$ ، $\text{من} = 12$ ، $\text{من} = 6$

$\text{من} = 0$ ، عندما $\text{من} = (1 - \text{من})$

أى : $\text{من} = 0$ ، $\text{من} = 1$

عند $\text{من} = 0$ ، $\text{من} = 6 > 0$

\therefore عند $\text{من} = 0$ توجد قيمة عظمى محلية هي $\text{من} = 1$

\therefore القيمة العظمى المحلية $= 1$ ، الصغرى المحلية $= 0$

عند الانقلاب $\text{من} = 0$

$\therefore 12 = 6$ ، $\text{من} = 6$ ، $\text{من} = \frac{1}{4}$

عند $\text{من} = \frac{1}{4}$ ، $\text{من} = \frac{1}{4}$

\therefore نقطة الانقلاب $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$

[viii] $\text{من}^3 = \text{من}^2$ ، $\text{من}^3 = 9$ ، $10 + \text{من}$

$\therefore \text{ذ}(\text{من}) = \text{من}(\text{من}^2 - \text{من}^3 + 1)$

$\therefore \text{ذ}(\text{من}) = \text{من}^2 - \text{من}^3 + 1$

$\text{ذ}(\text{من}) = \text{من}^3 - \text{من}^2 + 1$ ، $\text{ذ}(\text{من}) = 6 - 1 = 5$

$\text{ذ}(\text{من}) = 0$ ، عندما $\text{من}^3 - \text{من}^2 + 1 = 0$

أى : $(\text{من}^3 - \text{من}^2 + 1) = 0$

أى : $\text{من} = \frac{1}{3}$ ، $\text{من} = 1$

\therefore عند $\text{من} = \frac{1}{3}$ توجد قيمة عظمى محلية هي

$\text{ذ}(\frac{1}{3}) = (\frac{1}{3})^3 - (\frac{1}{3})^2 + 1 = \frac{2}{3}$ ، عند $\text{من} = 1$ ، $\text{ذ}(1) = 2 < 0$

\therefore عند $\text{من} = 1$ توجد قيمة صفري محلية هي $\text{ذ}(1) = 0$

عند نقطة الانقلاب $\text{ذ}(\text{من}) = 0$ ، أى $\text{من} = 4$

أى $\text{من} = \frac{2}{3}$ ، $\text{ذ}(\frac{2}{3}) = \frac{2}{3}$

[vii] $\text{ذ}(\text{من}) = \frac{\text{من}^2}{1 - \text{من}}$ حيث $\text{من} \neq 1$

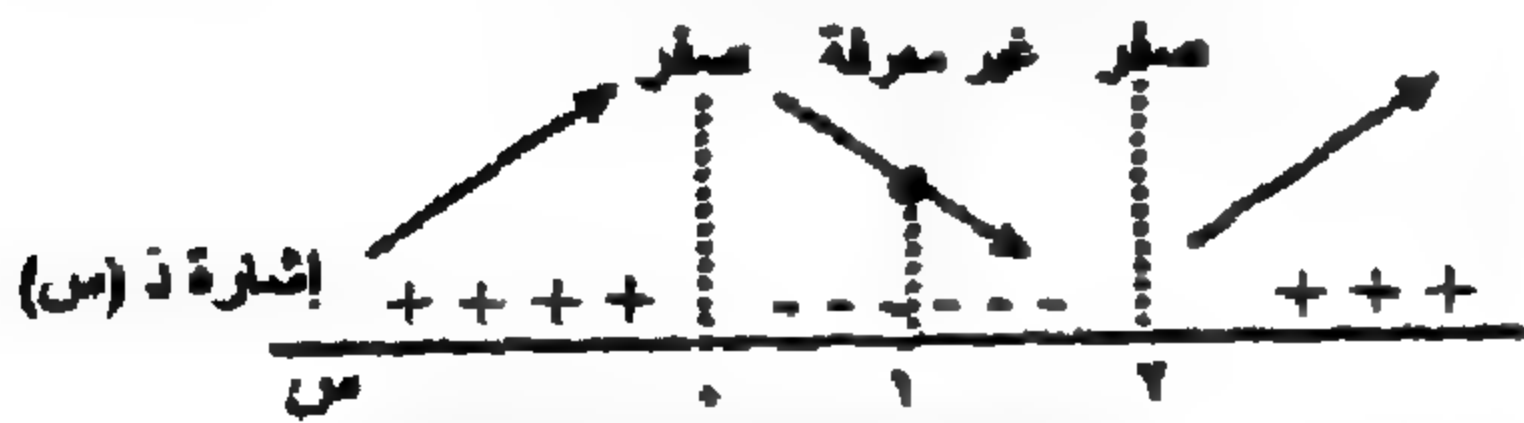
$\therefore \text{ذ}(\text{من}) = \frac{\text{من}^2 \times (1 - \text{من})}{(1 - \text{من})^2}$

$\therefore \text{ذ}(\text{من}) = \frac{\text{من}(\text{من} - 2)}{(1 - \text{من})}$

$\therefore \text{ذ}(\text{من}) = 0$ ، عندما $\text{من} = (2 - \text{من})$

أى $\text{من} = 0$ ، $\text{من} = 2$

نبحث إشارة $\text{ذ}(\text{من})$ على خط الأعداد



عند $\text{من} = 0$ توجد قيمة عظمى محلية هي $\text{ذ}(0) = 0$

عند $\text{من} = 2$ توجد قيمة صفري محلية هي $\text{ذ}(2) = 4$

$\text{ذ}(\text{من}) = \frac{2}{1 - \text{من}} \neq 0$ لكل $\text{من} \in \mathbb{R}$

\therefore لا توجد نقطة انقلاب

$\text{ذ}(2) = 40 + 81 - 27 = 94$

$$\therefore 3 \text{ ص} = 3 \text{ م}^2 - 6 \text{ م} - 9$$

$$\therefore \text{ص} = 3 \text{ م}^2 - 6 \text{ م} - 9$$

$$\text{ص} = 3 \text{ م}^2 - 6 \text{ م} - 9$$

$$\text{ص} = 0 \text{ عندما } 3 \text{ م}^2 - 6 \text{ م} - 9 = 0$$

$$\text{أى : (3 م - 3) (3 م + 3) = 0$$

$$\text{أى : م} = 3 \text{ ، م} = -3$$

$$\text{عند م} = 3 \therefore \text{ص} = 0 < 0$$

$$\therefore \text{عند م} = 3 \text{ توجد صغرى محلية} = 12$$

$$\text{عند م} = -3 \therefore \text{ص} = 0 > 0$$

$$\therefore \text{عند م} = -3 \text{ توجد عظمى محلية} = \frac{7}{3}$$

$$\text{توجد نقطة انقلاب عندما } \text{ص} = 0$$

$$\text{أى عندما } 3 \text{ م}^2 - 6 \text{ م} - 9 = 0 \text{ أى م} = 3$$

$$\text{عند م} = 1 \therefore \text{ص} = \frac{4}{3}$$

$$\therefore \text{نقطة الانقلاب هو } (1, \frac{4}{3})$$

$$[ix] \text{ د (م) = م}^2 - 9 \text{ م}^2 + 18 \text{ م}$$

$$\therefore \text{د (م) = م}^2 - 9 \text{ م}^2 + 18 \text{ م}$$

$$\text{د (م) = م}^2 - 9 \text{ م}^2 + 18 \text{ م}$$

$$\text{د (م) = 0 عندما } 3 \text{ (م}^2 - 9 \text{ م) = 0}$$

$$\text{أى : م} = 3 \text{ ، م} = -3$$

$$\text{عند م} = 1 \therefore \text{د (1) = 12} > 0$$

$$\therefore \text{توجد عظمى محلية د (1) = 7}$$

$$\text{عند م} = 5 \therefore \text{د (5) = 12} < 0$$

$$\therefore \text{توجد صغرى محلية د (5) = 25}$$

$$\text{عند نقطة الانقلاب د (م) = 0 أى م} = 3$$

$$\therefore \text{عند م} = 2 \text{ توجد قيمة عظمى محلية د (2) = 4}$$

$$\therefore \text{نقطة الانقلاب هي (3, 0)}$$

$$[x] \text{ د (م) = م} + \frac{4}{1-\text{م}} \text{ حيث م} \neq 1$$

$$\therefore \text{د (م) = م} + \frac{4}{1-\text{م}} - 1 = \frac{4 - (1-\text{م})}{(1-\text{م})}$$

$$\text{د (م) = م} + \frac{4}{1-\text{م}}$$

$$\text{د (م) = 0 عندما } 4 - (1-\text{م}) = 0$$

$$\text{أى : م} = 3 \text{ م}^2 - 6 \text{ م} - 9 = 0$$

$$\text{أى : (3 م - 3) (3 م + 3) = 0$$

$$\therefore \text{د (م) = 0 عندما م} = 3 \text{ ، م} = -3$$

$$\text{عند م} = 3 \therefore \text{د (3) = 1} < 0$$

$$\therefore \text{عند م} = 3 \text{ توجد صغرى محلية د (3) = 0}$$

$$\text{عند م} = -3 \therefore \text{د (-3) = 1} > 0$$

$$\therefore \text{عند م} = -3 \text{ توجد عظمى محلية د (-3) = 3}$$

$$\text{د (م) = م} \neq 0 \text{ لكل م} \neq 0$$

$$\therefore \text{لا توجد نقطة انقلاب}$$

$$[xi] \text{ د (م) = م} + \frac{4}{1-\text{م}}$$

$$\therefore \text{د (م) = م} + \frac{4}{1-\text{م}} \text{ حيث م} \leq 1$$

$$\text{د (م) = م} + \frac{4}{1-\text{م}} \text{ حيث م} > 1$$

$$\therefore \text{د (م) = م} + \frac{4}{1-\text{م}} \text{ حيث م} \leq 1$$

$$\text{د (م) = م} + \frac{4}{1-\text{م}} \text{ حيث م} > 1$$

$$\therefore \text{د (م) = م} + \frac{4}{1-\text{م}} \text{ حيث م} < 1$$

$$\text{د (م) = م} + \frac{4}{1-\text{م}} \text{ حيث م} > 1$$

$$\text{د (م) = 0 عندما م} = 2$$

$$\text{د (م) = 0 عندما م} = 2 \text{ ، م} < 2$$

$$\text{د (م) = 0 عندما م} = 2 \text{ ، م} > 2$$

$$\therefore \text{د (2) = 2} > 0$$

$$[iii] \text{ ص} = 2 \text{ م}^2 + 3 \text{ م}^2 - 12 \text{ م} + 1 \text{ فى } [10, 12]$$

ولا توجد قيمة صفري محلية "تصحح إجابة الكتاب"

واضح أن ذ (س) $\neq 0$ لكل س \in ح

\therefore لا توجد نقطة انقلاب

لاحظ أن عند س = 4 ذ (4) = 4

ذ (4) = 4

\therefore عند س = 4 توجد نقطة حرجة ولكنها ليست

عظمى أو صفري محلية

(٢) [i] هن = س^٢ في [-١، ٣]

\therefore هن = س^٣

هن = ٠ عندما س = ٠

عند س = ٠ هن = ٠

عند س = ١ هن = ١

عند س = ٣ هن = ٢٧

\therefore القيمة الصفري المطلقة = ١، العظمى المطلقة = ٢٧

[ii] هن = س^٢ + س^٣ - ١٢ س + ١ في [-١، ٥]

\therefore هن = س^٢ + س^٣ - ١٢ س + ١

هن = ٠ عندما ١ (س-١) (س+١٢) = ٠

أي عندما س = ١، س = -١٢

عند س = ١ هن = ١

عند س = -١٢ هن = ٢١

عند س = ١ هن = ١٤

عند س = ٥ هن = ٢٦٦

\therefore القيمة الصفري المطلقة = ١، العظمى المطلقة = ٢٦٦

$$\left. \begin{array}{l} \text{س} \geq ٢ \\ \text{س} < ٤ \end{array} \right\} \begin{array}{l} (٢-س) \\ س-٤ \end{array}$$

\therefore هن = س^٢ + س^٣ - ١٢ س + ١

هن = ٠ عندما ١ (س+١٢) (س-١) = ٠

أي : ١ (س+١٢) (س-١) = ٠

أي : س = -١٢، س = ١

عند س = ١ هن = ١

عند س = -١٢ هن = ٢١

عند س = ١ هن = ١٤

عند س = ٥ هن = ٢٧٤٥

\therefore القيمة الصفري المطلقة = ١، العظمى المطلقة = ٢٧٤٥

[iv] هن = $\frac{س}{١-س}$ في [٢، ٤]

$$\therefore \text{هن} = \frac{١-س}{(١-س)} = \frac{١ \times س - ١ \times (١-س)}{(١-س)}$$

نلاحظ أن هن $\neq ٠$

\therefore عند س = ٢ هن = ٢

عند س = ٤ هن = $\frac{٤}{٣}$

\therefore القيمة الصفري المطلقة = $\frac{٤}{٣}$ ، العظمى المطلقة = ٢

[v] هن = س + $\frac{س}{٢+س}$ في [٠، ٣]

$$\therefore \text{هن} = ١ - \frac{س}{(٢+س)} = \frac{٢+س+س}{(١-س)}$$

هن = ٠ عندما س^٢ + س + ٢ = ٠

أي : (س+١) (س+٢) = ٠ أي : س = -١، س = -٢

ولكن {١-، ٢-} \notin [٠، ٣]

عند س = ٠ هن = $\frac{١}{٢}$

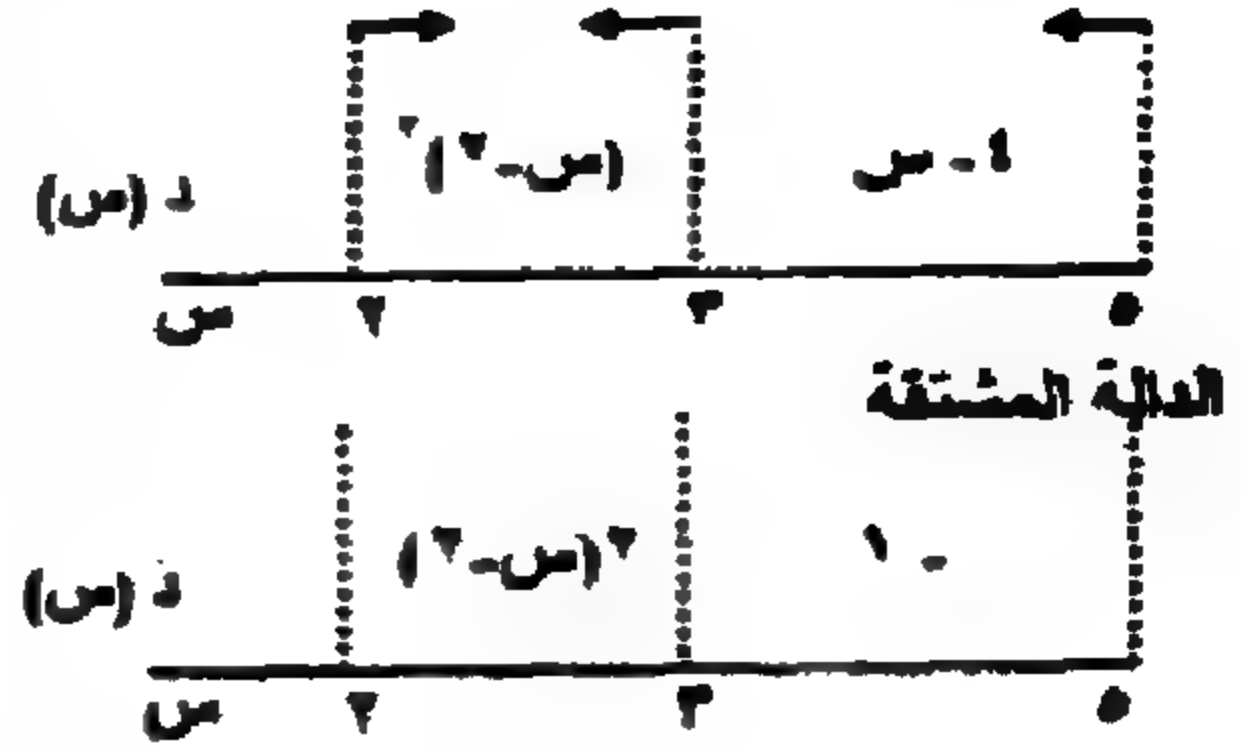
عند س = ٣ هن = $\frac{١٠}{٥}$

\therefore القيمة الصفري المطلقة = $\frac{١}{٢}$ ، العظمى المطلقة = $\frac{١٠}{٥}$

[vi] د(س) =

في [٥.٢]

هنا يجب تعريف الدالة على خط الأعداد



لاحظ أن د(٣) غير موجودة

حيث د(٣) = ١ ، د(٣) = ٢

أي أن د(٣) ≠ د(٣)

د(س) = ٠ عندما ٢ = (٣-س) ٠

أي س = ٢

عند س = ٢ د(٢) = ٠

عند س = ٣ د(٣) = ١

عند س = ٥ د(٥) = ١

∴ القيمة الصغرى المطلقة = ١ ، العظمى المطلقة = ١

[vii] نعرف الدالة على خط الأعداد



د(س) = ٠ عندما ٢ = (٣-س) ٠ أي س = ٢

عندما ٣ = (١+س) ٠ أي ٣ = (٢+س) ٠

أي س = ١ ، س = ٢

عند س = ١ د(١) = ١

عند س = ٠ د(٠) = ٠

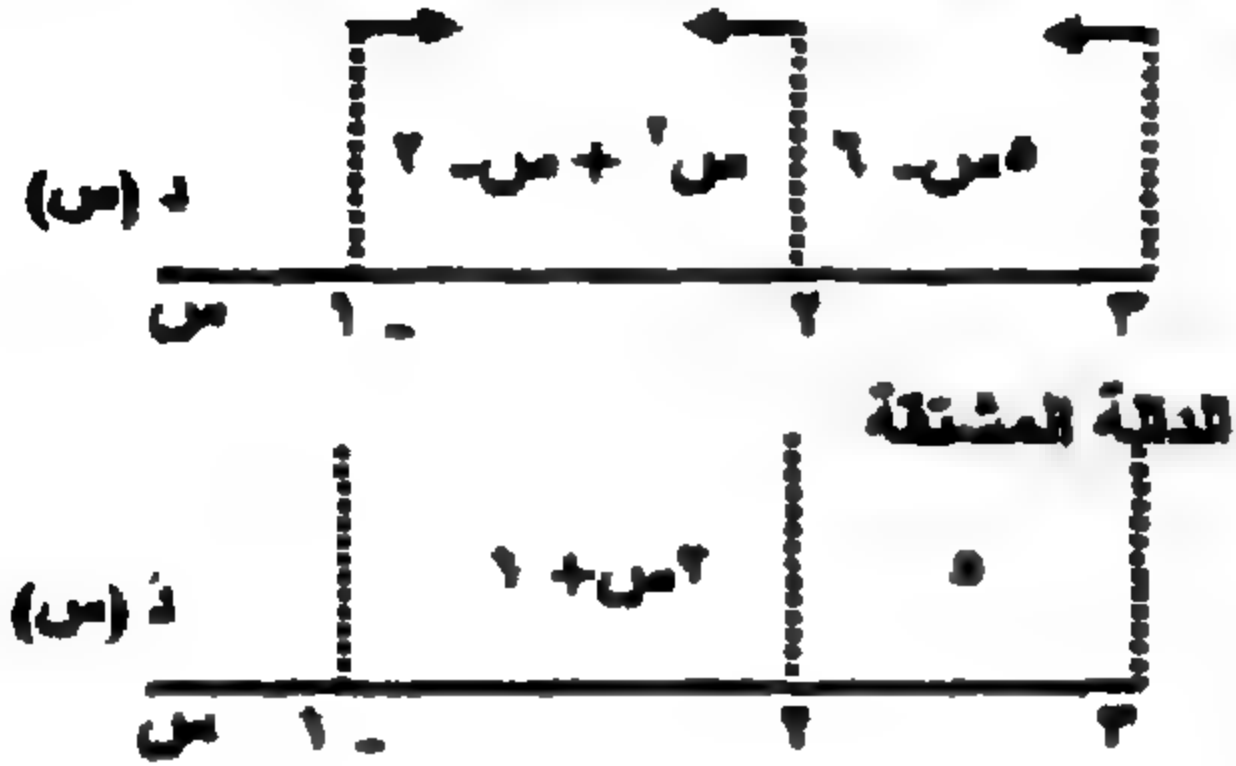
عند س = ٢ د(٢) = ١

عند س = ٣ د(٣) = ٠

عند س = ٢ د(٢) = ١

∴ القيمة الصغرى المطلقة = ١ ، العظمى المطلقة = ١

[viii] نعرف الدالة على خط الأعداد



د(س) = ٠ عندما ٢ = (٣-س) ٠

أي س = ٢

عند س = ٢ د(٢) = ٠

عند س = ١ د(١) = ١

عند س = ٢ د(٢) = ١

عند س = ٣ د(٣) = ٠

∴ القيمة الصغرى المطلقة = ٠ ، العظمى المطلقة = ١

(٣) نفرض أن س = ١ + س حيث س < ٠

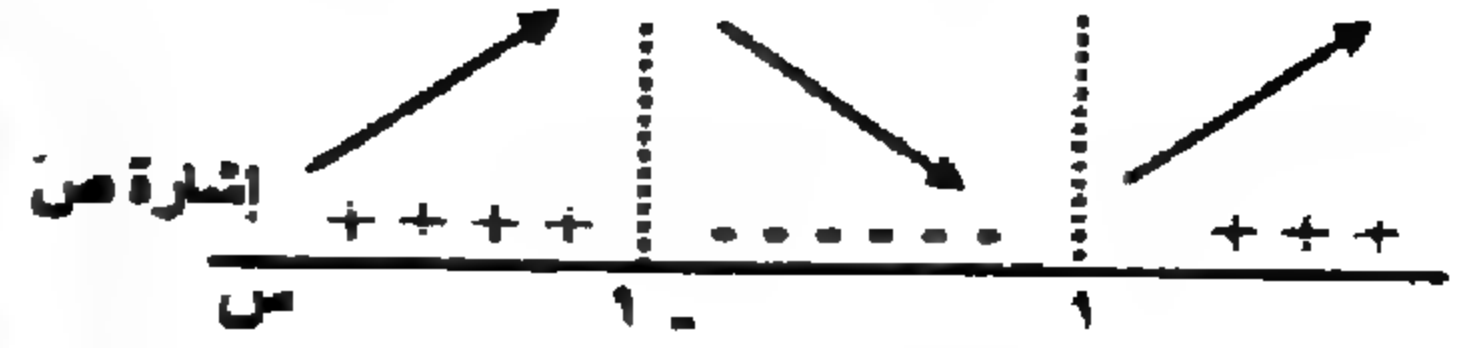
∴ س = ١ - ١ = ٠

س = ٠ عندما ١ = (٣-س) ٠

أي (١-س) (١+س) = ٠

أي س = ١ ، س = ٢ ولكن س

نبحث إشارة ص على خط الأعداد



من إشارة ص فإن ص أصغر ما يمكن

عندما $1 =$

$$2 = \frac{1}{1} + 1 = 2$$

أي أقل قيمة لـ ص

$$2 < \frac{1}{s} + s$$

$$(4) \therefore (s) = s + l + m$$

\therefore القيمة الصغرى $2 =$ عندما $s = 1$

\therefore النقطة $(2, 1)$ \exists لمنحنى الدالة

$$\therefore 3 = 1 + l + m$$

$$\therefore 2 = m + l \quad (1)$$

$$2 + s = (s) \text{ ذ}$$

عند القيمة الصغرى المحلية ذ $(1) = 0$

$$\therefore 0 = 2 + l \Leftarrow l = -2$$

$$\text{من (1)} \therefore m = 4$$

$$(5) \therefore s + s' + s'' = s + b + s = 0$$

$\therefore (2, \frac{5}{4})$ نقطة انقلاب $\therefore \exists$ للمنحنى

$$\therefore 0 = \frac{5}{4} + 12 + \frac{5}{4} \times 4$$

$$\therefore 20 = 5 + 4 \quad (1)$$

$$s - a = (s + b)$$

$$\therefore \frac{s - a}{s + b} = s$$

$$\therefore \frac{a - s}{(s + b)} = s$$

$$s = \frac{2a - s(s + b)}{(s + b)}$$

$$\therefore s = \frac{2a - s(s + b)}{(s + b)}$$

$\therefore (2, 5)$ نقطة انقلاب

$\therefore s = 0$ عندما $s = 2$

$$\therefore 0 = \frac{4 - s(s + b)}{(s + b)}$$

$$\therefore 0 = (4 - s - b)$$

$$\therefore \frac{4}{s} = b + 1$$

$$\text{من (1)} \therefore \frac{2}{s} = 1$$

$$\text{من (1)} \therefore b = 1$$

وهذا مرفوض لأنه في هذه

الحالة ص غير معرفة عند

$$s = \pm 2$$

$$\therefore s = \frac{20}{(s + b)} \quad \text{أي أن } s = \frac{20}{4 + s}$$

(6) نفرض أن عدد الأجهزة الزائدة س وأن الربح ص

الربح = عدد الأجهزة \times ربح الجهاز الواحد

$$\therefore s = (50 + s)(\frac{1}{4} - 30)$$

$$\therefore s = 1500 + 5s - \frac{1}{4}s$$

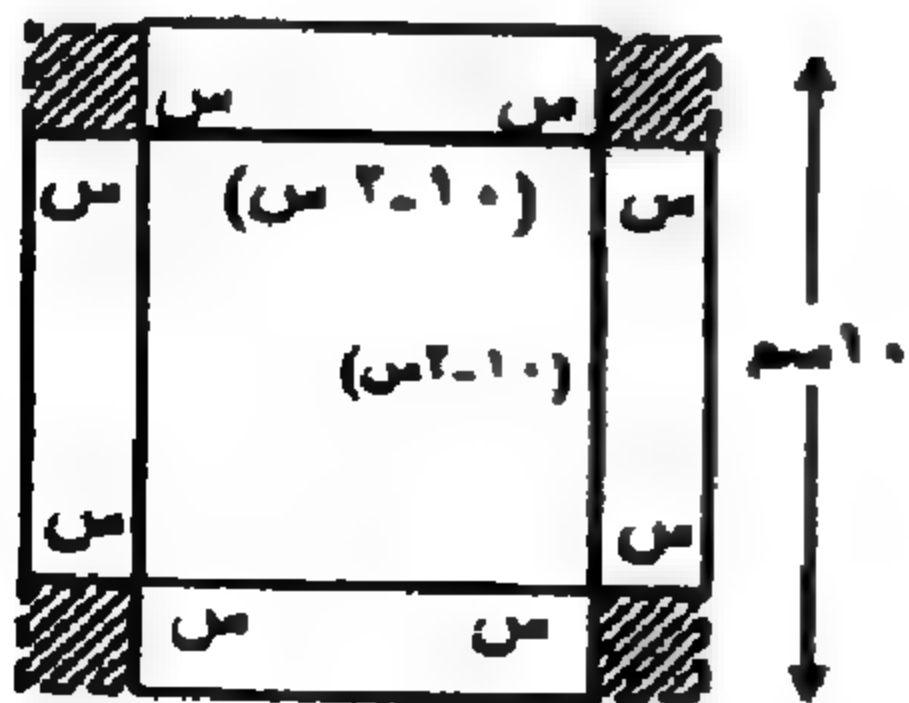
$$s = 5 \quad \therefore s = 1$$

$$s = 0 \quad \text{عندما} \quad s = 5 \quad \therefore s \text{ سالب}$$

$$\therefore s \text{ أكبر ما يمكن عندما } s = 5$$

$$\therefore \text{عدد الأجهزة الذي تحقق أكبر ربح } 55 = 5 + 50$$

(7) نفرض أن طول ضلع المربع المقطوع س



حجم الطبة ح = س(١٠-٢)

$$ح = س \times (١٠-٢) + ٢ \times (١٠-٢) \times ١$$

$$ح = س(١٠-٢) + ٢(١٠-٢)$$

$$٢ - س(١٠-٢) + ٢(١٠-٢) = ٢$$

$$٨٠ = ٢٤ - س$$

$$٠ = ح \text{ عندما } (١٠-٢) = ٠$$

$$٠ = س \text{ ، } ٠ = س$$

$$٠ = س \text{ ، } ٠ = س$$

$$٠ = س \text{ ، } ٠ = س$$

$$٠ = س \text{ ، } ٠ = س$$

$$٠ = س \text{ ، } ٠ = س$$

(٨) نفرض أن العددين هما س، ١٦ - س لاحظ أن

مجموعهما ١٦ وأن مجموع مربعيهما هو س

$$٠ = س \text{ ، } ٠ = س$$

$$٢٥٦ = س^٢ - ٢٢س + ٢٥٦$$

$$٢٢ = س$$

$$٠ = س \text{ ، } ٠ = س$$

$$٨ = س$$

$$٨ = س$$

$$٨ = س$$

(٩) نفرض أن أبعاد المستطيل س، س



$$٠ = س^٢ + س^٢ \text{ لاحظ أن } (س^٢ + س^٢) \text{ ثابت}$$

$$٠ = س \text{ ، } ٠ = س$$

نفرض مساحة المستطيل م = س س

$$٠ = س \times (١٠-٢)$$

$$٠ = م \text{ ، } ٠ = م$$

$$٠ = م \text{ ، } ٠ = م$$

$$٠ = م \text{ ، } ٠ = م$$

$$٠ = م \text{ ، } ٠ = م$$

$$٠ = م \text{ ، } ٠ = م$$

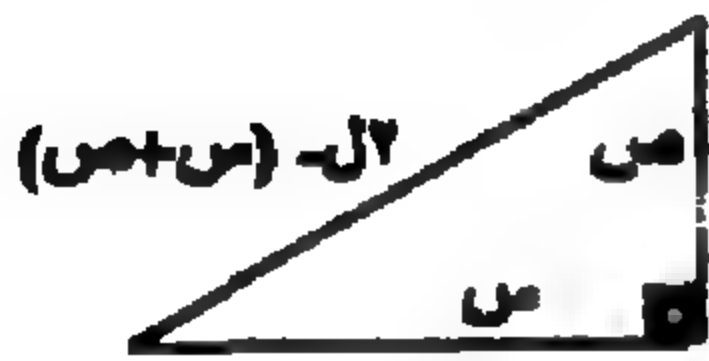
$$٠ = م \text{ ، } ٠ = م$$

$$٠ = م \text{ ، } ٠ = م$$

$$٠ = م \text{ ، } ٠ = م$$

(١٠) نفرض أن طول ضلعي القائمة س، س

$$٠ = س^٢ + س^٢$$



$$٠ = س^٢ + س^٢$$

$$٠ = س^٢ + س^٢$$

$$٠ = س^٢ + س^٢$$

$$٠ = س^٢ + س^٢$$

$$٠ = س^٢ + س^٢$$

$$٠ = س^٢ + س^٢$$

$$٠ = س^٢ + س^٢$$

$$٠ = س^٢ + س^٢$$

$$٠ = س^٢ + س^٢$$

$$٠ = س^٢ + س^٢$$

$$٠ = س^٢ + س^٢$$

$$٠ = س^٢ + س^٢$$

∴ مجموع مساحتي الشكلين أقل ما يمكن عندما يكون

$$\frac{ط ٣٤}{٤ + ط} = \text{طول الجزء الممتلى على شكل مربع}$$

$$\frac{ط ٣٤}{٤ + ط} - ٣٤ = \text{طول الجزء الممتلى على شكل دائرة}$$

$$= \frac{١٣٦}{٤ + ط} \text{ "يصح جواب الكتاب"}$$

$$(١٢) \therefore \text{التكليف } \alpha \text{ ع}$$

∴ التكليف = ا ع حيث ا ثابت

$$\therefore ٢٥ = ١ \times (٢٥) \therefore \frac{١}{٢٥} = ١$$

$$\therefore \text{التكليف} = \frac{١}{٢٥} \text{ ع}$$

$$\text{التكليف الفطية في الساعة} = \frac{١}{٢٥} \text{ ع} + ١٠٠$$

لاحظ أن التكلفة الإضافية ١٠٠

$$\therefore \text{تكليف الكيلومتر الواحد} = \left(\frac{١}{٢٥} \text{ ع} + ١٠٠ \right) \div \text{ع}$$

حيث ع هي المسافة المقطوعة من الساعة

$$\therefore \text{ت} = \frac{١}{٢٥} \text{ ع} + \frac{١٠٠}{\text{ع}}$$

$$\therefore \text{ت} = \frac{١}{٢٥} - \frac{١}{\text{ع}}$$

$$\text{ت} = \frac{٢٠٠}{\text{ع}} = \frac{٤٢ \times ١٠٠}{\text{ع}}$$

$$\text{ت} = ٠ \text{ عندما } ٠ = \frac{١}{٢٥} - \frac{١}{\text{ع}}$$

$$\text{أي ع} = ٢٥٠٠ = \text{ع} \pm ٥٠$$

$$\text{عندما ع} = ٥٠ \therefore \text{ت موجب}$$

∴ التكلفة للكيلومتر الواحد أقل ما يمكن عندما تكون

سرعة القاطرة ٥٠ كم/ساعة

(١٣) المساحة الكلية = المساحة الجنبية + مساحة القاعدتين

$$\therefore ط ٢٤ = ٢ ط نق ع + ٢ (ط نق)'$$

$$\text{بالقسمة على ط} \therefore \text{ع} = \frac{١٢ - \text{نق}'}{\text{نق}'}$$

$$\text{حجم الأسطوانة ح} = \text{ط نق}' \text{ ع}$$

$$= \text{ط نق}' \times \frac{١٢ - \text{نق}'}{\text{نق}'}$$

$$\text{أو س} - ٤ ل + ٢ ل = ٠$$

$$\text{س} = \frac{٤ ل + ٢ ل^٢}{١ \times ٢} = \frac{٢ ل (٢ + ل)}{٢}$$

$$\text{س} = \frac{٢ ل (٢ + ل)}{٢} = \frac{٢ ل (٢ + ل)}{٢}$$

$$\text{س} = ل (٢ + ل)$$

ولكن س > ل طول السلك

$$\therefore \text{س} = ل (٢ + ل)$$

$$\text{من (١)} \therefore \text{س} = ل (٢ + ل)$$

$$\therefore \text{طول الضلع الثالث} = ل (٢ + ل)$$

(١١) نفرض أن طول جزئي السلك س، ٣٤ - س



$$\therefore ٢ ط نق = \text{س}$$

$$\therefore \text{نق} = \frac{\text{س}}{٢}$$

$$\text{مساحة الدائرة م} = \pi \left(\frac{\text{س}}{٢} \right)^٢$$

$$\therefore \text{م} = \frac{١}{٤} \text{ س}^٢$$

$$\text{محيط المربع} = ٣٤ - س$$

$$\therefore \text{طول ضلعه} = \frac{١}{٤} (٣٤ - س)$$

$$\text{مساحة المربع م} = \frac{١}{١٦} (٣٤ - س)^٢$$

مجموع مساحتي الشكلين م = م + م

$$\therefore \text{م} = \frac{١}{٤} \text{ س}^٢ + \frac{١}{١٦} (٣٤ - س)^٢$$

$$\therefore \text{م} = \frac{١}{٤} \text{ س}^٢ + \frac{١}{١٦} (٣٤ - س)^٢$$

$$\therefore \text{م} = \frac{١}{٤} \text{ س}^٢ + \frac{١}{١٦} (٣٤ - س)^٢$$

$$\text{م} = \frac{١}{٤} \text{ س}^٢ + \frac{١}{١٦} \left(\frac{١}{٤} + \frac{١}{٢} \right) \text{ س} - \frac{١٧}{٤}$$

$$\text{م} = ٠ \text{ عندما س} = \frac{٣٤}{٤ + ط}$$

$$\text{م} = \frac{١}{٢} \left(\frac{١}{٤} + \frac{١}{٢} \right) \text{ موجب}$$

لاحظ المقصود هو المساحة الكلية للإسطوانة بالقسمة

على ٢ ط

$$\therefore \text{نق ع} = ١٢٥ - ٣ \text{ نق}'$$

$$\therefore \text{ع} = \frac{١٢٥}{٣} - ٣ \text{ نق}'$$

$$\text{مجموع الحجمين ح} = \frac{٢}{٣} \text{ ط نق}' + \frac{٢}{٣} \text{ ط نق}' \text{ ع}$$

$$\therefore \text{ح} = \frac{٢}{٣} \text{ ط نق}' + \frac{٢}{٣} \text{ ط نق}' - ٣ \text{ ط نق}'$$

$$\therefore \text{خ} = ٤ \text{ ط نق}' + ١٢٥ \text{ ط} - ٩ \text{ ط نق}'$$

$$\therefore \text{خ} = ١٢٥ \text{ ط} - ٥ \text{ ط نق}'$$

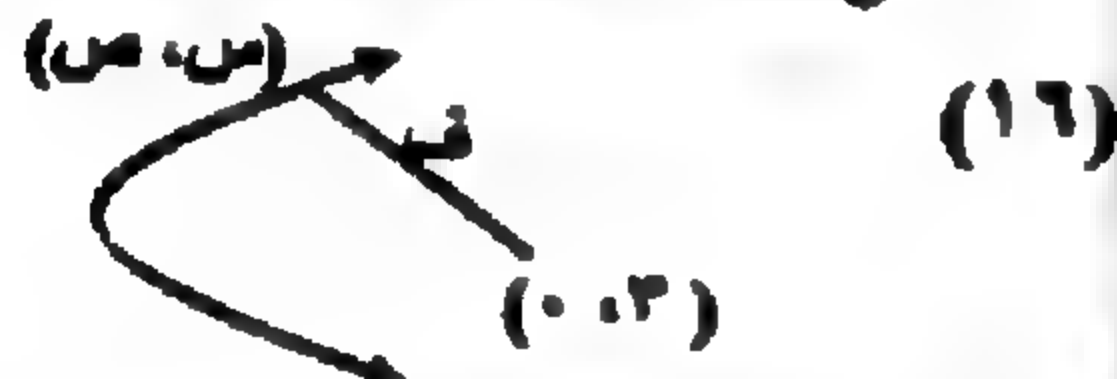
$$\text{خ} = ١٠ \text{ ط نق}' \text{ سالب دائما}$$

$$\text{خ} = ٠ \text{ عندما } ٤ \text{ ط نق}' - ١٢٥ \text{ ط} - ٥ \text{ ط نق}' = ٠$$

$$\text{أي عندما نق} = \pm ٠$$

ولكن نق = -٠ مرفوض

$$\therefore \text{ح أكبر ما يمكن عندما نق} = ٠$$



نفرض أن النقطة هي (س، ص) والمسافة ف

$$\therefore \text{ف} = (٣ - \text{س}) + (٠ - \text{ص})$$

$$\therefore \text{ف} = \text{س} - ٦ + ٩ + \text{ص}$$

(س، ص) للمنحنى \therefore تحقق معادلته

$$\therefore \text{ص} = \text{س} + ٤ - ٠ \text{ — (١)}$$

$$\therefore \text{ف} = \text{س} - ٦ + ٩ + \text{س} + ٤ + ٠$$

$$\therefore \text{ف} = \sqrt{\text{س}^2 - ٢ \text{س} + ١٤}$$

$$\therefore \text{ف} = \frac{\text{س}^2 - ٢ \text{س} + ١٤}{\sqrt{\text{س}^2 - ٢ \text{س} + ١٤}}$$

$$\text{ف} = ٠ \text{ عندما } \text{س}^2 - ٢ \text{س} + ١٤ = ٠ \text{ أي س} = ١$$

$$\text{ف} = \frac{١٣}{\sqrt{\text{س}^2 - ٢ \text{س} + ١٤}} \text{ موجب دائما}$$

$$\therefore \text{ح} = ١٢ \text{ ط نق}' - \text{ط نق}'$$

$$\therefore \text{ح} = ١٢ \text{ ط} - ٣ \text{ ط نق}'$$

$$\text{خ} = ٠ - ٦ \text{ ط نق}' \text{ سالب دائما}$$

$$\text{خ} = ٠ \text{ عندما } ١٢ \text{ ط} - ٣ \text{ ط نق}'$$

$$\text{أي نق}' = \pm ٢ \text{ السالب مرفوض}$$

\therefore الحجم أكبر ما يمكن عندما نصف القطر القاعدة = ٢

$$\text{وارتفاعها ع} = \frac{٤ - ١٢}{٣} = ٤$$

$$\text{أكبر حجم ح} = \text{ط} \times (٢)' \times ٤ = ١٦ \text{ ط سم}^٣$$

(١٤) نفرض أن عرض الطية س

$$\therefore \text{الارتفاع ٢ س الحجم (السم) = ٩٠٠٠}$$

$$\therefore \text{س} \times \text{س}^٢ \times \text{س} = ٩٠٠٠ \text{ حيث س طول قاعدتها}$$

$$\therefore \text{س} = \frac{٩٠٠٠}{\text{س}}$$

$$\text{المساحة الكلية} = (٢ \text{ س})^٢ + (٢ \text{ س})^٢$$

$$+ (٢ \text{ س} \times \text{س})^٢$$

$$\text{م} = ٤ \text{ س}' + ٦ \text{ س} \text{ س}$$

$$\therefore \text{م} = ٤ \text{ س}' + ٦ \text{ س} \times \frac{٩٠٠٠}{\text{س}}$$

$$\text{م} = ٤ \text{ س}' + \frac{٥٤٠٠ \times ٦}{\text{س}}$$

$$\text{م} = ٨ \text{ س} - \frac{٥٤٠٠ \times ٦}{\text{س}}$$

$$\text{م} = ٨ \text{ س} + \frac{٥٤٠٠ \times ١٢}{\text{س}} \text{ موجب دائما}$$

$$\text{م} = ٠ \text{ عندما } ٨ \text{ س} - \frac{٥٤٠٠ \times ٦}{\text{س}} = ٠$$

$$\text{أي عندما س} = ١٥$$

\therefore م أقل ما يمكن عندما تكون الأبعاد

$$٣٠، ٢٠، ١٥$$

(١٥) نفرض أن نصف القطر نق

\therefore مجموع مساحتي الكرة والإسطوانة = ٢٥٠ ط

$$\therefore ٤ \text{ ط نق}' + ٢ \text{ ط نق ع} + ٢ \text{ ط نق}' = ٢٥٠ ط$$

∴ ف أقل ما يمكن عندما $س = 1$

من (١) $ص = ٩$ ∴ $ص = ٣ ± ٢$

∴ النقط هي (٣، ١)، (٣، -١)

(١٧) نفرض أن نصف قطر الدائرة = نقي

وأن طول النافذة = $س$

محيط النافذة = ٦

∴ $٢ نقي + ٢ س + ٢ نقي = ٦$

∴ $س = (٦ - ٢ نقي - ٢ نقي) \times \frac{1}{٢}$

مساحة النافذة $م = ٢ نقي \times س + \frac{1}{٢} ٢ نقي$

∴ $م = نقي (٦ - ٢ نقي - ٢ نقي) + \frac{1}{٢} ٢ نقي$

∴ $م = ٦ نقي - ٢ نقي - \frac{1}{٢} ٢ نقي$

$م = ٤ نقي - ٦$

$م = ٤ - ٦$ سالب دائماً

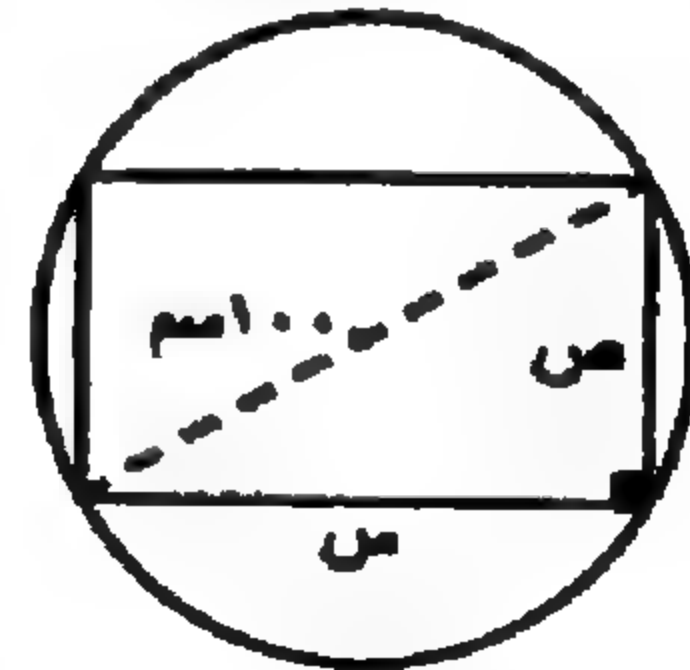
$م = ٠$ عندما $٤ نقي - ٦ = ٠$

أي نقي $(٤ + ٦) = ١٠$

∴ نقي $= \frac{٦}{٤ + ٦}$

م أكبر ما يمكن عندما نصف القطر $= \frac{٦}{٤ + ٦}$

(١٨) نفرض أن بعدى المستطيل هما $س، ص$



من هندسة الشكل $س + ص = ١.٠.٠$ — (١)

نفرض أن قوة الاحتمال $ق$

∴ $ق = \alpha س \times ص$

∴ $ق = \alpha س ص$ حيث α ثابت

من (١) $ص = ١.٠.٠ - س$

∴ $ق = \alpha س (١.٠.٠ - س)$

∴ $ق = ١.٠.٠ \alpha س - \alpha س^٢$

$ق = ١.٠.٠ \alpha - ٢ \alpha س$

$ق = ١.٠.٠ \alpha - ٢ \alpha س$ سالب

$ق = ٠$ عندما $١.٠.٠ \alpha - ٢ \alpha س = ٠$

أي عندما $س = \frac{١.٠.٠}{٢}$

أي $س = \frac{١.٠.٠}{٢}$

"الجواب السالب مرفوض حيث $س$ طول"

$س = \frac{٣\sqrt{١.٠.٠}}{٢} = \frac{٣\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{١.٠.٠}{٢}$

والبعد الآخر $ص = ١.٠.٠ - س$

$\frac{٣\sqrt{١.٠.٠}}{٢} = \frac{٣\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{٢}{٢} / ١.٠.٠ =$

∴ بعدى المستطيل $\frac{٣\sqrt{١.٠.٠}}{٢}, \frac{٣\sqrt{١.٠.٠}}{٢}$ سم

(١٩) [١]

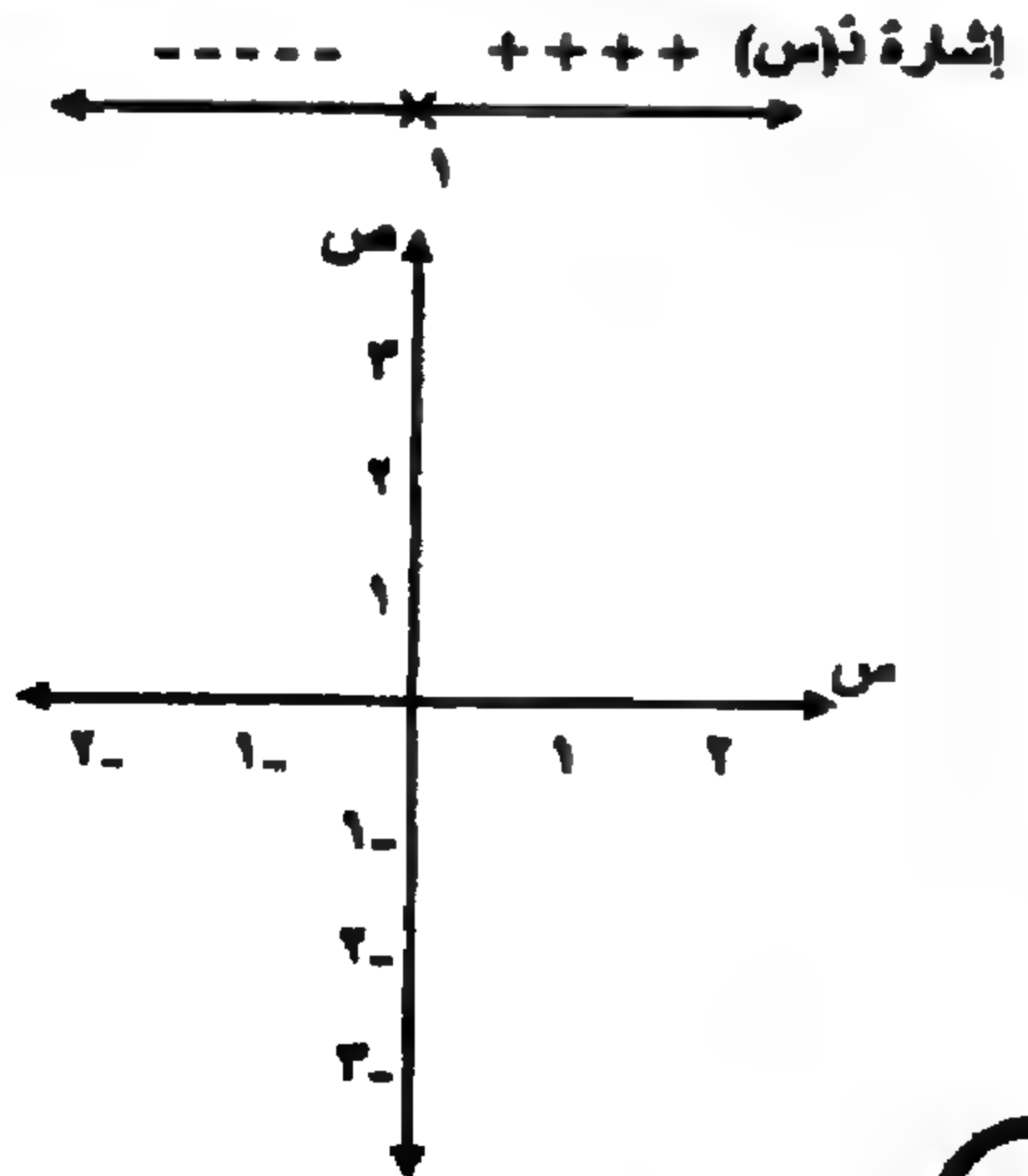
$ص = س - س^٢ - ٢$

$ص = س - س^٢ - ٢$

$٣(س - س^٢ - ٢) = (١ + س^٢ - ٢) (١ - س)$ حيث $س \neq ١$

$ص = ٠$ عندما $١ = س$ $ص = ٠$ عندما $١ = س$

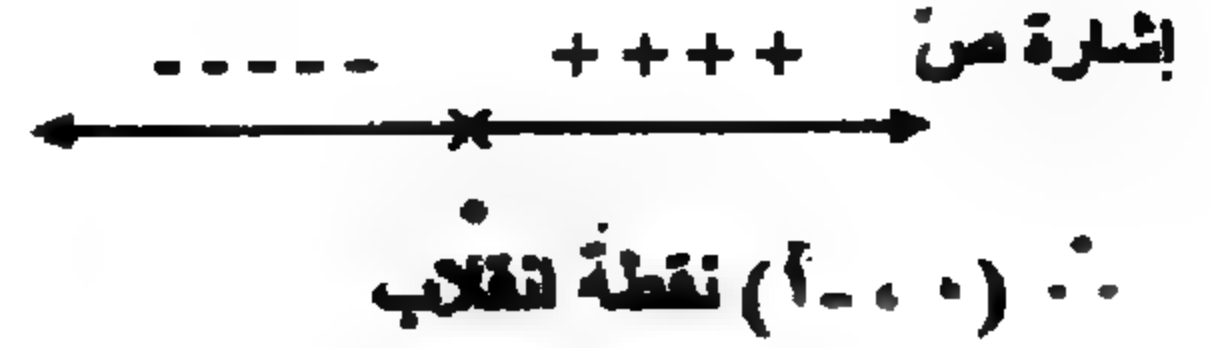
$ص = ٠$ عندما $س = ١$ ∴ (١، ١) نقطة إنقلاب



[ب] $ص = ص^2 + ص^3 - 1$

$ص = ص^3 + ص^2 - 1 = 0 < (ص + 1)^3$

$ص = 1$



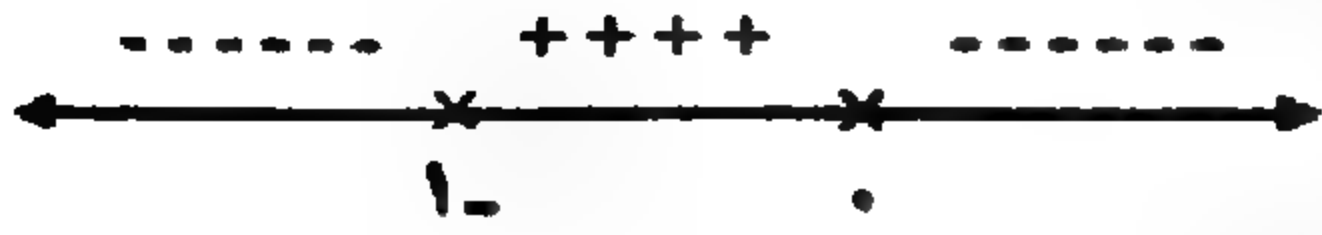
[ع] $ص = 3 - 3ص - 2ص^2$

$ص = 6 - 6ص - 2ص^2$

$ص = 6(ص + 1)$

$ص = 6 - 6(ص + 1) = 6(1 - (ص + 1))$

إشارة $ص$



$(2, 0)$ عظمى محلية، $(-1, 2)$ صفري محلية

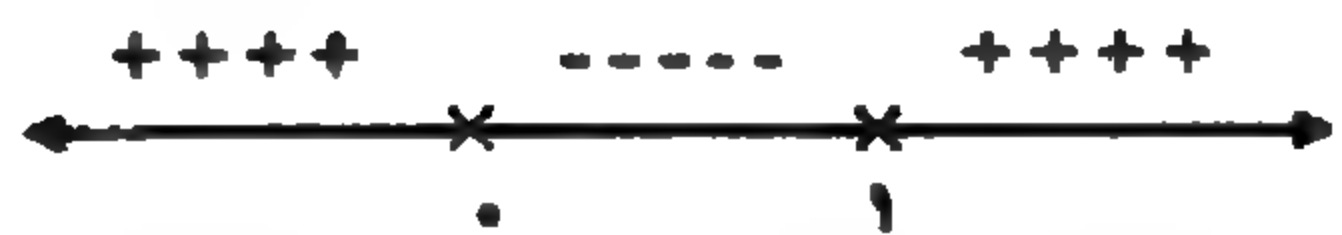
$(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$ نقطة انقلاب

[ج] $ص = 2ص^2 - 3ص^3$

$ص = 6ص - 6ص^3 = 6ص(1 - ص^2)$

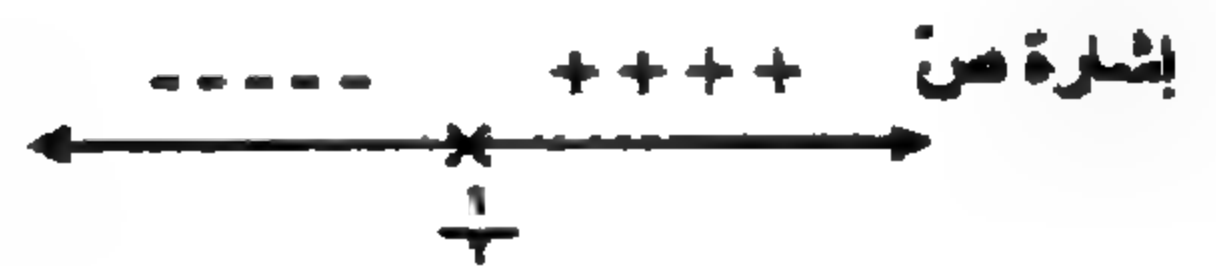
$ص = 0$ عندما $ص = 0$ ، $ص = 1$

إشارة $ص$



$(0, 0)$ عظمى محلية، $(1, -1)$ صفري محلية

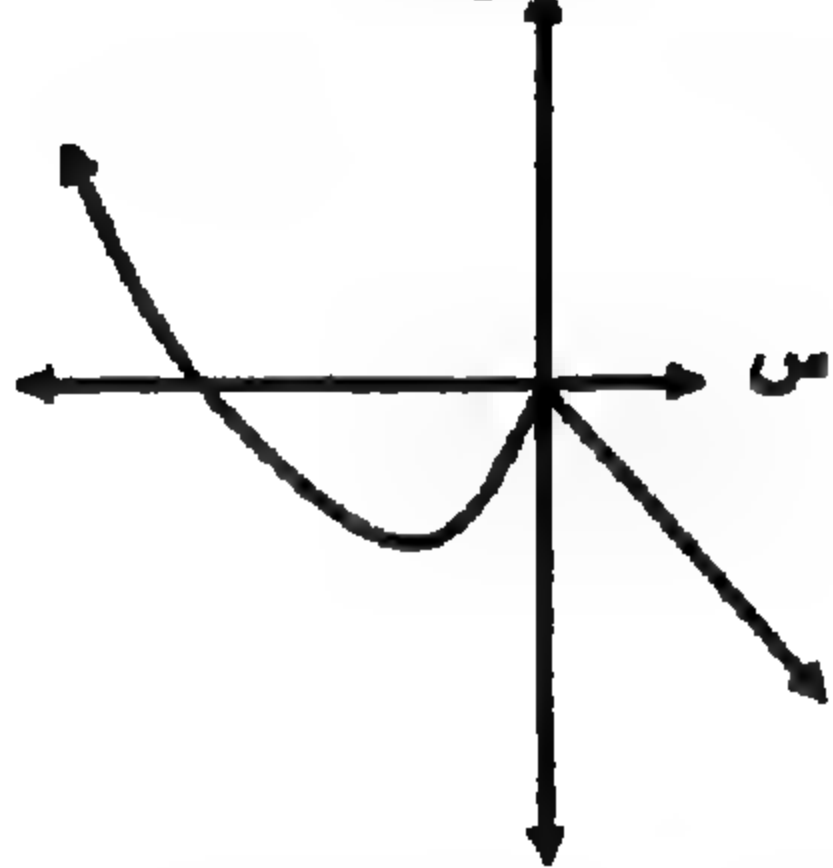
$ص = 6 - 6(ص^2 - 1) = 6(2 - ص^2)$



$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ نقطة انقلاب

[د] $(-1, 1)$ صفري محلية، $(0, 0)$ عظمى محلية

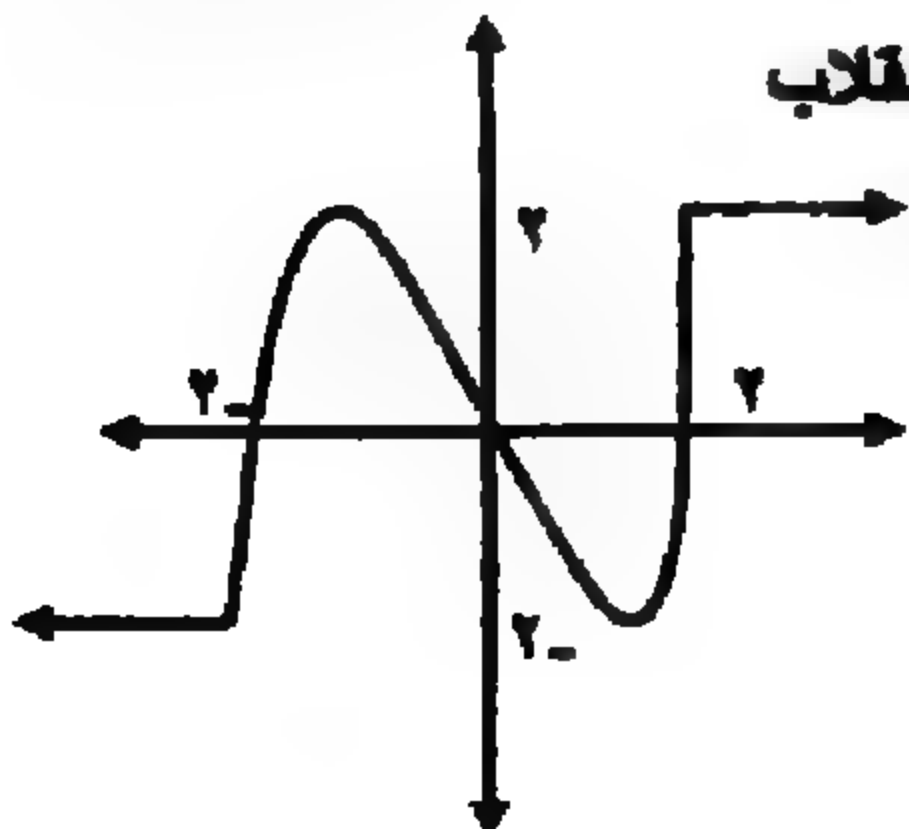
نقط مساعدة $(0, 2)$ ، $(0, 0)$



[و] $(2, 1)$ عظمى محلية، $(-2, 1)$ صفري محلية

$(2, 2)$ عظمى محلية، $(-2, -2)$ صفري محلية

$(0, 0)$ نقطة الانقلاب



$$[z] = (m) = \left. \begin{array}{l} m \leq 0 \\ m > 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} m^1 + m^2 \\ m^1 + m^2 \end{array}$$

الدالة متزايدة المنحني

محبب لأعلى في الفترة

$$]0, \infty[$$

ولأسفل في $] \infty, 0[$

(0,0) نقطة انقلاب

** نقط مساعدة

$$(3, 1), (3, -1)$$

طول تمرين (٩)

$$(1) \quad m \cdot m = m^2 = m^1 + m^2$$

$$(2) \quad \frac{m^2}{8} = m \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{8} = m^1 + m^2$$

$$(3) \quad \frac{m^2}{13} = m \cdot \frac{1}{13} = m^1 + m^2 \quad \text{حيث } m^1 + m^2 = 1$$

$$(4) \quad (m^2 - m + 1) = m^2 - m + 1 = m^1 + m^2$$

$$(5) \quad (m^2 - m + 1) = m^2 - m + 1 = m^1 + m^2$$

$$m^2 - m + 1 = m^1 + m^2$$

$$(6) \quad (m^2 - m + 1) = m^2 - m + 1 = m^1 + m^2$$

$$\frac{1}{4} = m^1 + m^2 = \frac{1}{4} + m^1 + m^2$$

$$(7) \quad (m^2 - m + 1) = m^2 - m + 1 = m^1 + m^2$$

$$(m^2 - m + 1) = m^2 - m + 1 = m^1 + m^2$$

$$(m^2 - m + 1) = m^2 - m + 1 = m^1 + m^2$$

$$\frac{1}{4} = m^1 + m^2 = \frac{1}{4} + m^1 + m^2$$

$$(8) \quad \frac{m^2 + m^1}{m} = m + \frac{m^1}{m} = m + m^1$$

$$(m + m^1) = m + m^1$$

$$\frac{1}{4} = m^1 + m^2 = \frac{1}{4} + m^1 + m^2$$

$$(9) \quad (m - 1) = m - 1 = m^1 + m^2$$

$$(m - 1) = m - 1 = m^1 + m^2$$

$$\frac{1}{4} = m^1 + m^2 = \frac{1}{4} + m^1 + m^2$$

$$(10) \quad \frac{1}{4} = m^1 + m^2 = \frac{1}{4} + m^1 + m^2$$

$$(m + \frac{1}{4}) = m + \frac{1}{4} = m^1 + m^2$$

$$\frac{1}{4} = m^1 + m^2 = \frac{1}{4} + m^1 + m^2$$

$$(11) \quad \frac{1}{4} = m^1 + m^2 = \frac{1}{4} + m^1 + m^2$$

$$(m + \frac{1}{4}) = m + \frac{1}{4} = m^1 + m^2$$

$$2 = m^1 + m^2 = \frac{2}{4} + m^1 + m^2$$

$$(12) \quad (m + \frac{1}{4}) = m + \frac{1}{4} = m^1 + m^2$$

$$(m + \frac{1}{4}) = m + \frac{1}{4} = m^1 + m^2$$

$$\frac{1}{4} = m^1 + m^2 = \frac{1}{4} + m^1 + m^2$$

$$(13) \quad (1 - \sqrt{m}) = 1 - \sqrt{m} = m^1 + m^2$$

$$(m + \frac{1}{4}) = m + \frac{1}{4} = m^1 + m^2$$

$$\frac{1}{4} = m^1 + m^2 = \frac{1}{4} + m^1 + m^2$$

$$(14) \quad \frac{1}{4} = m^1 + m^2 = \frac{1}{4} + m^1 + m^2$$

$$2 = m^1 + m^2 = \frac{2}{4} + m^1 + m^2$$

$$(15) \left\{ (3-s) \cdot \frac{1}{v} \times 7 \right\}$$

$$\times \frac{1}{v} =$$

$$\text{لاحظ أن: } \left\{ (3-s) \cdot \frac{1}{v} \times 7 \right\}$$

$$= \frac{1}{1+n} \left\{ (3-s) \cdot \frac{1}{v} \times 7 \right\}$$

$$\text{المقدار} = \frac{1}{v} \times \frac{1}{9} (3-s) + \frac{1}{v}$$

$$= \frac{1}{9v} (3-s) + \frac{1}{v}$$

$$(16) \left\{ (2-s) \cdot \frac{1}{v} \right\}$$

$$= - \left\{ (2-s) \cdot \frac{1}{v} \right\}$$

$$= - \frac{1}{v} (2-s) + \frac{1}{v}$$

$$(17) \left\{ \left(\frac{2+s}{3} \right) \cdot \frac{1}{v} \right\}$$

$$= \frac{1}{v} \left\{ \left(\frac{2+s}{3} \right) \cdot \frac{1}{v} \right\} \times 3 =$$

$$= \frac{1}{v} \left\{ \left(\frac{2+s}{3} \right) \cdot \frac{1}{v} \right\} \times 3 =$$

$$= \frac{1}{v} \left\{ \left(\frac{2+s}{3} \right) \cdot \frac{1}{v} \right\}$$

$$(18) \left\{ (2+s) \cdot \frac{1}{v} \right\}$$

$$= \left\{ (2+s) \cdot \frac{1}{v} \right\} = \left\{ (2+s) \cdot \frac{1}{v} \right\}$$

$$= \frac{1}{v} (2+s) + \frac{1}{v}$$

$$(19) \left\{ (7+s) \cdot \frac{1}{v} \right\}$$

$$= \frac{1}{v} \left\{ (7+s) \cdot \frac{1}{v} \right\}$$

$$= \frac{1}{v} \left\{ (7+s) \cdot \frac{1}{v} \right\}$$

$$= \frac{1}{v} \left\{ (7+s) \cdot \frac{1}{v} \right\}$$

$$(20) \left\{ (1-s) \cdot \frac{1}{v} \right\}$$

$$= \frac{1}{v} \left\{ (1-s) \cdot \frac{1}{v} \right\}$$

$$= \frac{1}{v} \left\{ (1-s) \cdot \frac{1}{v} \right\}$$

$$= \frac{1}{v} \left\{ (1-s) \cdot \frac{1}{v} \right\}$$

$$(21) \left\{ (1+s) \cdot \frac{1}{v} \right\}$$

$$= \frac{1}{v} \left\{ (1+s) \cdot \frac{1}{v} \right\}$$

$$(22) \left\{ \left(\frac{3}{2} - 1 \right) \cdot \frac{1}{v} \right\}$$

$$= \left\{ \left(\frac{3}{2} - 1 \right) \cdot \frac{1}{v} \right\}$$

$$= \left\{ \left(\frac{3}{2} - 1 \right) \cdot \frac{1}{v} \right\}$$

$$(23) \left\{ \frac{27-s}{3} \cdot \frac{1}{v} \right\}$$

$$= \frac{1}{v} \left\{ \frac{27-s}{3} \cdot \frac{1}{v} \right\}$$

$$= \frac{1}{v} \left\{ \frac{27-s}{3} \cdot \frac{1}{v} \right\}$$

$$= \frac{1}{v} \left\{ \frac{27-s}{3} \cdot \frac{1}{v} \right\}$$

$$(24) \left\{ \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{1}{v} \right\}$$

$$= \left\{ \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{1}{v} \right\}$$

$$= \left\{ \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{1}{v} \right\}$$

$$= \frac{1}{v} \left\{ (3-2) \cdot \frac{1}{v} \right\}$$

$$= \frac{1}{v} \left\{ (3-2) \cdot \frac{1}{v} \right\}$$

$$= \frac{1}{v} \left\{ (3-2) \cdot \frac{1}{v} \right\}$$

$$(25) \left\{ (11+s) \cdot \frac{1}{v} \right\}$$

باجراء التكامل بالنسبة للطرفين

$$\therefore \text{ص} = \left(2-3 \text{ من}^2 + 1 \text{ من}^3 + 2 \text{ من}^4 \right) \text{ ع. ص}$$

$$\therefore \text{ص} = 2-3 \text{ من}^2 + 1 \text{ من}^3 + 2 \text{ من}^4 \text{ ع. ص} + \text{ث}$$

$$\text{ص} = 2-3 \text{ من}^2 + 1 \text{ من}^3 + 2 \text{ من}^4 \text{ ع. ص} + \text{ث}$$

$$\text{ولكن ص} = 2 \text{ عندما من} = 1$$

$$\therefore 2 = 2-3 + 1 + 2 \text{ ع. ص} + \text{ث} \therefore \text{ث} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \text{ص} = 2-3 \text{ من}^2 + 1 \text{ من}^3 + 2 \text{ من}^4 \text{ ع. ص} + \frac{1}{4}$$

$$(2) \frac{\text{ص}}{\text{ع. ص}} = \frac{1-2 \text{ من}^2}{1-2 \text{ من}^2}$$

$$= \frac{(1-2 \text{ من}^2)(1+2 \text{ من}^2+1 \text{ من}^4)}{(1-2 \text{ من}^2)}$$

$$\therefore \frac{\text{ص}}{\text{ع. ص}} = 1+2 \text{ من}^2+1 \text{ من}^4$$

$$\therefore \text{ص} = (1+2 \text{ من}^2+1 \text{ من}^4) \text{ ع. ص}$$

$$\therefore \text{ص} = \frac{4}{3} \text{ من}^3 + 1 \text{ من}^2 + \text{ص} + \text{ث}$$

$$\text{ص} = 10 \text{ عندما من} = 1$$

$$\therefore 10 = 10 + 1 + 1 + \frac{4}{3} \text{ ع. ص} + \text{ث} \therefore \text{ث} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \text{ص} = \frac{4}{3} \text{ من}^3 + 1 \text{ من}^2 + \text{ص} + \frac{2}{3}$$

$$(3) \text{ ص} = \left[12 \text{ من}^2 - 9 \text{ من}^3 + 7 \text{ من}^4 - 12 \text{ من}^5 \right] \text{ ع. ص}$$

$$= \frac{12}{2} \text{ من}^2 - \frac{9}{3} \text{ من}^3 + \frac{7}{4} \text{ من}^4 - \frac{12}{5} \text{ من}^5 \text{ ع. ص} + \text{ث}$$

$$\therefore \text{ص} = 6 \text{ من}^2 - 3 \text{ من}^3 + \frac{7}{4} \text{ من}^4 - \frac{12}{5} \text{ من}^5 \text{ ع. ص} + \text{ث}$$

$$\text{ص} = 0 \text{ عندما من} = 2$$

$$= \left[(11+2 \text{ من}^2) \frac{1}{2} \right] \text{ ع. ص}$$

$$= \frac{1}{2} \left[(11+2 \text{ من}^2) \frac{1}{2} \right] \text{ ع. ص}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} (11+2 \text{ من}^2) \text{ ع. ص} + \text{ث}$$

$$= \frac{1}{2} (11+2 \text{ من}^2) \text{ ع. ص} + \text{ث}$$

$$\text{ع. ص} = \frac{1}{2} (11+2 \text{ من}^2) \text{ ع. ص}$$

$$(1) \left[2 \text{ من}^2 + 2 \text{ من}^3 \right] \text{ ع. ص}$$

$$= 2 \text{ من}^2 \text{ ع. ص} = - \text{ع. ص} + 2 \text{ من}^2$$

$$(2) - \text{ع. ص} + \frac{1}{2} \text{ من}^2 + \text{ث}$$

$$(3) 5 \text{ ع. ص} + \frac{1}{2} \text{ من}^2 + \text{ث}$$

$$(4) \frac{1}{2} \text{ ع. ص} + 2 \text{ من}^2 + \text{ث}$$

$$(5) - \text{ع. ص} + \left(1 + \frac{1}{2} \text{ من}^2 \right) + \text{ث}$$

$$(6) \frac{1}{2} \text{ ع. ص} + (1-2 \text{ من}^2) + \text{ث}$$

$$(7) 5 \text{ ع. ص} + \left(1 - \frac{1}{2} \text{ من}^2 \right) + \text{ث}$$

$$(8) \left[- \frac{1}{2} \text{ ع. ص} + (1+2 \text{ من}^2) + \frac{1}{2} \text{ ع. ص} + (1+2 \text{ من}^2) \right] + \text{ث}$$

$$(9) [8 \text{ ع. ص} - 4 \text{ ع. ص}] + \text{ث}$$

$$(10) [6 \text{ ع. ص} - 2 \text{ ع. ص}] + 5$$

$$(11) 3 \text{ ع. ص} + (5 + 2 \text{ من}^2) + \text{ث}$$

$$(12) \left[\frac{2 \text{ ع. ص} + 2 \text{ ع. ص}}{2 + \text{ع. ص}} \right] \text{ ع. ص} = \left[\text{ع. ص} \right] \text{ ع. ص}$$

$$= \text{ع. ص} + \text{ث}$$

$$\text{ع. ص} = \frac{1}{2} (11+2 \text{ من}^2) \text{ ع. ص}$$

$$(1) \frac{\text{ص}}{\text{ع. ص}} = 2-2 \text{ من}^2 + 1 \text{ من}^3 \text{ ع. ص} \neq 0$$

$$\therefore 0 = 2 \times 64 - 64(12-12) + 7$$

$$\therefore 0 = 7$$

$$\therefore 2 \text{ ص} = 2 \text{ ص} - 1(7-12)$$

$$(4) \frac{7+2 \text{ ص}}{2 \text{ ص} - 2} = \frac{6 \text{ ص}}{6 \text{ ص}}$$

$$\therefore (2-2 \text{ ص}) \cdot 6 \text{ ص} = (7+2 \text{ ص}) \cdot 6 \text{ ص}$$

$$\therefore (2-2 \text{ ص}) \cdot 6 \text{ ص} = (7+2 \text{ ص}) \cdot 6 \text{ ص}$$

$$\therefore 2 \text{ ص} - 2 \text{ ص} = 7 + 2 \text{ ص}$$

$$\text{ص} = 2 \quad \text{عند ص} = 1$$

$$\therefore 9-9 = 7+1 = 8 \quad \text{عند ص} = 8$$

$$(5) \text{ ميل المماس } \frac{6 \text{ ص}}{6 \text{ ص}} = 1-2 \text{ ص}$$

$$\therefore \text{ص} = (1-2 \text{ ص}) \cdot 6 \text{ ص}$$

$$\therefore \text{ص} = \text{ص} + 2 \text{ ص} - 12 \text{ ص}$$

$$\text{المنحنى يمر بالنقطة } (3, \frac{1}{4})$$

$$\therefore \text{ص} = \frac{1}{4} \quad \text{عند ص} = 3$$

$$\therefore 3 = \frac{1}{4} + 4 + 4 \quad \text{عند ص} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \text{ص} = \text{ص} + \frac{2}{4} - \frac{2}{4} \quad \text{بالضرب } 2 \times \text{ص}$$

$$\therefore 2 \text{ ص} - 2 \text{ ص} = 4 + 4 \text{ ص} - 4 \text{ ص}$$

$$(6) \text{ ميل المماس } \frac{6 \text{ ص}}{6 \text{ ص}} = \frac{6 \text{ ص}}{6 \text{ ص}}$$

$$\therefore \text{ص} = 6 \text{ ص} = 6 \text{ ص}$$

$$\therefore \text{ص} = 6 \text{ ص} = 6 \text{ ص}$$

$$\therefore \frac{1}{4} \text{ ص} = \frac{1}{4} \text{ ص} + 7$$

$$\therefore (2, 3) \text{ للمنحنى} \quad \therefore \text{ص} = 2 \quad \text{عند ص} = 3$$

$$\therefore 2 = \frac{1}{4} + 7 \quad \text{عند ص} = \frac{5}{4}$$

$$\therefore \frac{1}{4} \text{ ص} = \frac{1}{4} \text{ ص} - 1 \quad \text{بالضرب } 2 \times$$

$$\therefore \text{ص} = 5 \text{ ص} - 4$$

$$(7) \text{ ميل المماس } \frac{6 \text{ ص}}{6 \text{ ص}} = 3-2 \text{ ص}$$

$$\therefore \text{ص} = 3-2 \text{ ص} - 2 \text{ ص} + 7$$

$$\therefore (2, 3) \text{ للمنحنى} \quad \therefore \text{ص} = 2 \quad \text{عند ص} = 3$$

$$\therefore 2 = 27-27-6+7 \quad \text{عند ص} = 8$$

$$\therefore \text{ص} = 3-2 \text{ ص} - 2 \text{ ص} + 7$$

$$(8) \text{ ميل المماس } \frac{1-}{6-2 \text{ ص}} = \frac{1-}{6-2 \text{ ص}}$$

$$\text{ميل المماس} = \frac{1-}{6-2 \text{ ص}} = \frac{1-}{6-2 \text{ ص}}$$

$$\therefore \frac{6 \text{ ص}}{6 \text{ ص}} = 6-2 \text{ ص} \quad \text{بإجراء التكامل}$$

$$\therefore \text{ص} = 6-2 \text{ ص} + 7$$

$$(9, 4) \text{ للمنحنى} \quad \therefore \text{ص} = 4 \quad \text{عند ص} = 4$$

$$\therefore 4 = 16-16-24+7 \quad \text{عند ص} = 13$$

$$\therefore \text{ص} = 13-6 \text{ ص} + 13$$

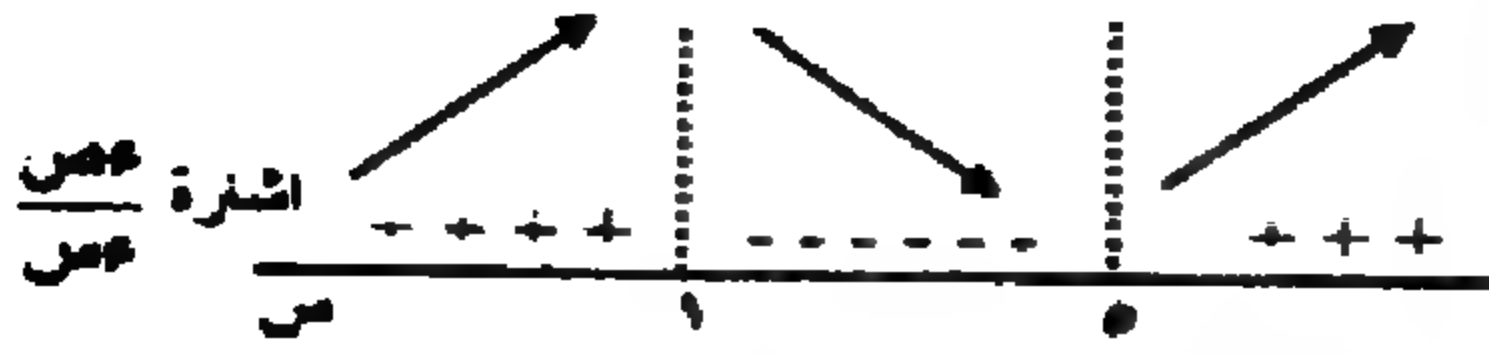
$$(9) \text{ ميل المماس } \frac{6 \text{ ص}}{6 \text{ ص}} = \frac{1-}{2 \text{ ص} - 3}$$

$$\therefore \frac{6 \text{ ص}}{6 \text{ ص}} = (2 \text{ ص} - 3) \cdot \frac{1}{6 \text{ ص}}$$

$$\therefore \text{ص} = \frac{1}{2} \times (2 \text{ ص} - 3) + \frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{ص} = \sqrt{2 \text{ ص} - 3} + 7$$

$$(3, 1) \text{ للمنحنى} \quad \therefore \text{ص} = 3 \quad \text{عند ص} = 1$$



عند $s = 1$ توجد عظمة محلية $17 = 10 + 10 + 9 - 1 =$

عند $s = 0$ توجد صفري محلية

$$10 = 10 + 70 + 220 - 120 =$$

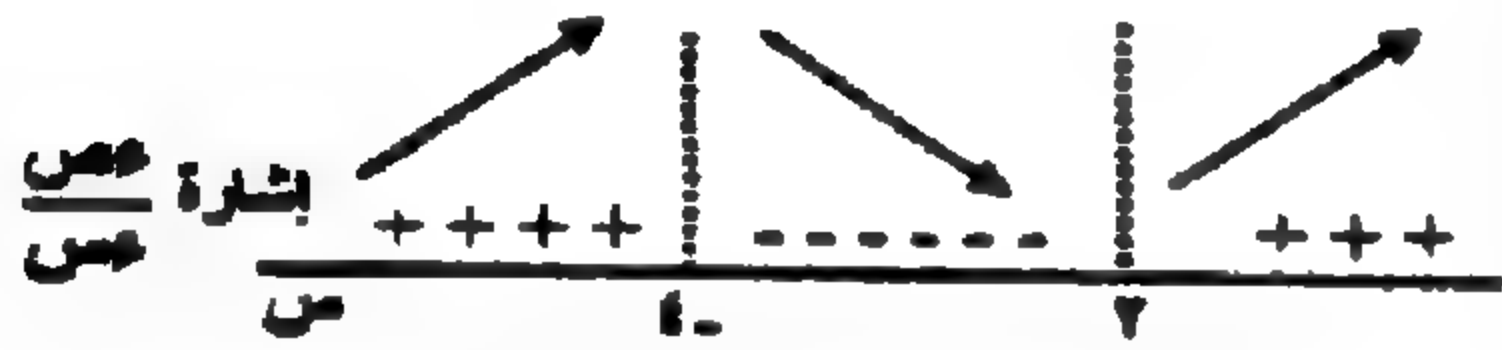
$$(12) \text{ ميل المنحنى } \frac{\text{من}}{\text{من}} = s^2 + s - 8$$

$$\therefore \text{من} = \frac{1}{s} = s^2 + s - 8 \text{ ث} \text{ — (1)}$$

عند القيم الصفري والعظمى المحلية $\frac{\text{من}}{\text{من}} = 0$

$$\therefore \text{من} = s^2 + s - 8 = 0$$

$$(s+1)(s-2) = 0 \therefore s = -1, \text{ أ. } s = 2$$



من اشارة $\frac{\text{من}}{\text{من}}$ توجد قيمة عظمى محلية $\frac{2}{3} = 26$

عند $s = -1$

$$\therefore (-1, \frac{2}{3}) \text{ و للمنحنى}$$

من (1)

$$\therefore \frac{2}{3} = \frac{2}{3} + 16 + 22 + 32 = 0 = \text{ث} \therefore \text{من} = 0$$

$$\therefore \text{من} = \frac{1}{s} = s^2 + s - 8 \text{ من}$$

عند $s = 2$ توجد صفري محلية $\frac{2}{3} =$

$$(13) \frac{\text{من}}{\text{من}} = (s-1)(s+1) = s^2 - 1 = 3 - 1 = 2$$

$$\therefore \text{من} = s^2 - 1 = 2 \text{ ث} \text{ — (1)}$$

عند القيم العظمى والصفري المحلية $\frac{\text{من}}{\text{من}} = 0$

$$\therefore 2 = \text{ث} \Leftarrow \sqrt{2-3} + \text{ث} = 2$$

$$\therefore \text{من} = \sqrt{2-3} + 2$$

$$(10) \frac{\text{من}}{\text{من}} = s^2 - \frac{1}{s} = 0$$

$$\therefore \text{من} = s^2 - \frac{1}{s} = 0 \text{ ث}$$

$\therefore (10,0)$ و للمنحنى $\therefore \text{من} = 1$ عندما $s = 0$

$$\therefore 1 = \text{ث} \Leftarrow \text{ث} + 0 = 1$$

$$\therefore \text{من} = s^2 - \frac{1}{s} = 1 + \frac{1}{s}$$

$$\therefore \text{عندما } s = 3 \therefore \text{من} = 9 - \frac{1}{3} = 1 + \frac{27}{3} = \frac{11}{3}$$

$$\therefore \text{ميل المماس} = 2 \times 3 - 9 \times \frac{1}{3} = \frac{3}{3}$$

ميل العمودي $= -\frac{3}{3}$

$$\text{معادلة المماس (من-} \frac{11}{3} \text{)} = \frac{3}{3} = (3-\text{من})$$

$$\text{أى : } 0 = 2 + \text{من} - 3$$

$$\text{معادلة العمودي (من-} \frac{11}{3} \text{)} = \frac{3}{3} = (3-\text{من})$$

$$\text{أى : } 0 = 11 + \text{من} - 33$$

$$(11) \therefore \text{ميل المماس} = \frac{\text{من}}{\text{من}} = 3 = (s^2 - 1) = 3 + 6 = 0$$

$$\therefore \text{من} = s^2 - 1 = 9 + 10 = 19 \text{ ث}$$

$\therefore (10,0)$ و للمنحنى $\therefore \text{من} = 10$ عندما $s = 0$

$$\therefore \text{ث} = 10$$

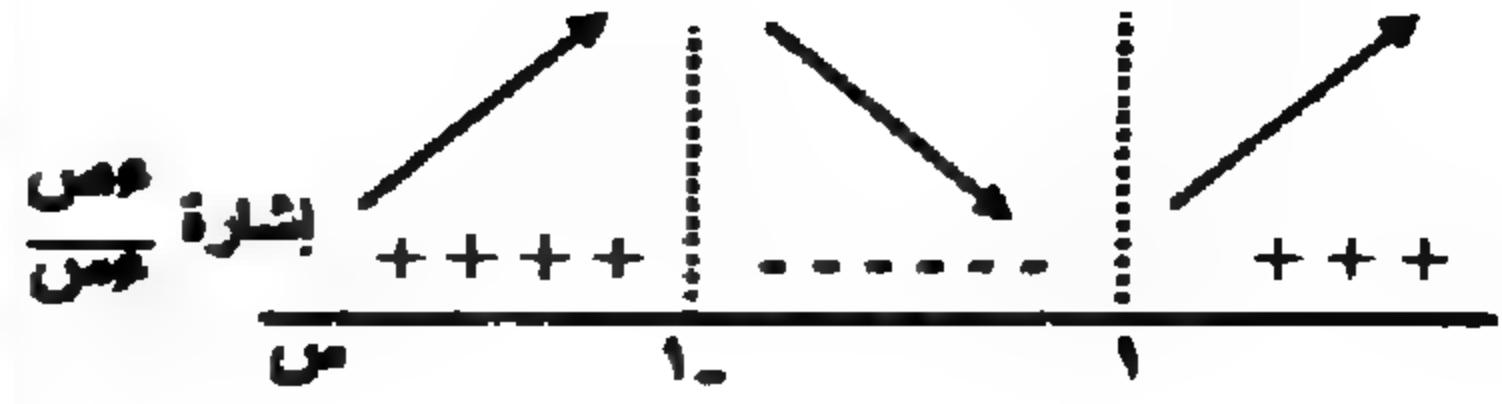
$$\therefore \text{من} = s^2 - 1 = 9 + 10 = 19$$

$$\frac{\text{من}}{\text{من}} = 0 \text{ عندما } (s-1)(s-5) = 0$$

$$\text{أى } s = 1, \text{ أ. } s = 5$$

$$0 = (1 + س) (1 - س)^3 \therefore$$

$$\therefore س = 1, 1 - س = 1$$



$$\therefore \text{عند } س = 1 \text{ توجد صغرى محلية } = 1$$

$$\text{من (1)} \therefore 2 - 1 = 1 + 3 - 1 = 2 = 0$$

$$\therefore س = س^2 - 3$$

$$\text{العظمى المحلية عند } س = 1$$

$$\therefore \text{العظمى المحلية } = 2 = 3 + 1$$

$$(14) \frac{f}{n} = 0.015 \text{ ن} + 0.02 \text{ ن} \text{ يجرى التكامل}$$

$$\therefore م = 0.0005 \text{ ن} + 0.01 \text{ ن} + 0$$

$$\text{ولكن } م = 90 \text{ عندما } ن = 10$$

$$\therefore 84 = 90 = 1 + 0 + 0 = 0$$

$$\therefore م = 0.0005 \text{ ن} + 0.01 \text{ ن} + 84$$

$$\text{عند بدء التسخين } ن = 0$$

$$\therefore م = 84 = 84 + 0 + 0$$

$$(15) \frac{f}{ض} = \frac{1}{ض} = 1 - ض$$

$$\therefore ح = 1 - ض$$

$$= 1 - ض + 0$$

$$\text{أي أن } ح = \frac{1}{ض} + 0$$

$$12 - 12 = 0 + \frac{1}{ض} = 12$$

$$\therefore ح = 12 - 12 + \frac{1}{ض}$$

$$(16) \frac{f}{ن} = 10 - \frac{2}{ن}$$

$$\therefore ح = 10 - \frac{2}{ن}$$

$$\text{عند بدء الزمن } ن = 0 \text{ كان } ح = 10$$

$$\therefore 0 = 0 + 0 = 0$$

$$\therefore ح = 10 - \frac{2}{ن}$$

$$\text{عندما } ن = 2 \therefore ح = 10 - \frac{2}{2} = 9$$

$$(17) 90 + 12 \text{ ن} + 0 = 0$$

$$\therefore 0 = 12 \text{ ن} + 90 + 0$$

$$\text{عند } ن = 0 \therefore 0 = 0$$

$$\therefore 0 = 12 \text{ ن} + 90 + 0$$

$$\text{بالمثل ينتج أن } 84 = 12 \text{ ن} + \frac{3}{ن} + 0$$

$$\text{بالطرح لـ } 84 = 12 \text{ ن} - \frac{3}{ن}$$

$$\text{عند } ن = 0 \therefore 84 = 0$$

$$\therefore 84 < 0$$

$$\therefore \text{الثانية تكتب أكثر}$$

محتويات الكتاب

أولاً: الجبر

الباب الأول : التباديل والتوافيق

٦	- التباديل والتوافيق
٧	- التباديل
١٢	- التوافيق
١٨	- نظرية ذات الحدين
٢١	- الحد العام في المفكوك
٢١	- الحد الأوسط في المفكوك
٢٤	- إيجاد الحد الذي يحتوى على قوة معينة في المفكوك
٣٠	- النسبة بين حدين متتاليين

الباب الثاني : الأعداد المركبة

٣٥	- الأعداد المركبة
٣٦	- مجموعة الأعداد التخيلية
٣٧	- مجموعة الأعداد
٣٨	- نظام الأعداد المركبة
٥١	- التمثيل البياني للأعداد المركبة
٥٩	- الصورة المثلثية للعدد المركب
٦٧	- نظرية " دى موافر "
	- الصورة الأسية للعدد المركب
٧٩	- الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

الباب الثالث : المحددات

٨٧	- المحددات
٩٠	- العوامل المرافقة لعناصر المحددات
١٠٩	- حل المعادلات الخطية في ثلاث مجاهيل

ثانياً: الهندسة الفراغية

الباب الأول : المستقيمات والمستويات

١١٣	- مفاهيم ومسلمات
١١٤	- تعيين المستوى في الفراغ
١١٤	- الأوضاع النسبية للمستقيمات والمستويات في الفراغ
١١٧	- الزاوية بين مستقيمين متخالفين
١٢١	- بعض المجسمات الشهيرة
١٣٠	- توازي مستقيم ومستو
١٤٣	- المستقيم العمودي على مستو

الباب الثاني : الإسقاط العمودي

- ١٥١ تعاريف مسقط نقطة على مستو - مسقط مستقيم على مستو
- ١٥٢ الزاوية بين مستقيم ومستو
- ١٦٢ الزاوية الزوجية
- ١٦٢ الزاوية المستوية للزاوية الزوجية
- ١٦٨ المستويات المتعامدة - تعاريف - نظريات

ثالثاً : التفاضل والتكامل

الباب الأول : النهايات - الاتصال

- ١٨٧ نهاية الدالة المعرفة بأكثر من قاعدة
- ١٩٢ الاتصال عند النقطة
- الاتصال على فترة

الباب الثاني : الاشتقاق

- ٢٠١ قابلية الاشتقاق
- ٢١٠ الاشتقاق الضمني
- المشتقات العليا

الباب الثالث : تطبيقات على المشتقة

- ٢١٥ أولاً : التطبيق الهندسي
- ٢٢٢ ثانياً : المعدلات الزمنية

الباب الرابع : سلوك الدالة - رسم منحناها

- ٢٣٥ تزايد وتناقص الدوال
- ٢٣٩ القيم العظمى والصغرى المحلية
- ٢٤١ القيم العظمى والصغرى المطلقة
- ٢٤٣ التحدب لأعلى ولأسفل ونقط الانقلاب
- ٢٥٥ رسم منحنيات الدوال

الباب الخامس : التكامل

- ٢٦١ خصائص التكامل
- ٢٧٠ تكامل بعض الدوال المثلثية
- ٢٧٣ بعض تطبيقات التكامل
- ٢٧٩ أجوبة التمارين ❖

هذا الكتاب

الرياضيات علم تجريدي من إبداع العقل البشري يعني من بين ما يعني به بالأفكار وطرق وأنماط التفكير.

وهذا العلم لا يقف عند مجموع فروع التقليديّة فهو أكثر من علم الحساب الذي يعالج الأعداد والأرقام والحسابات وهو يزيد عن الجبر لغة الرموز والعلاقات ويتسع عن علم الهندسة حيث دراسة الشكل والحجم والفضاء أنه يستوعب الآن فوق فروع التقليديّة علم المثلثات والإحصاء والتفاضل والتكامل وغيرها.

وهذا الكتاب هو مقتطفات من الجبر والهندسة الفراغية والتفاضل والتكامل وقد روعي في تأليفه الترتيب والتتابع والتأكيد على المفاهيم الأساسية والتمهل في الانتقال من مفهوم إلى آخر ويتميز هذا الكتاب بكثرة الأمثلة المتدرجة والتمارين المماثلة لها مع الاختلاف في الأرقام حتى يؤكد القارئ ما فهمه ويختبر مدى إستيعابه .. وذيل الكتاب بالحلول الكاملة لتمارين الكتاب. والامل كبير أن نكون وفقتا في تحقيق الهدف.

والله ولي التوفيق ،،،

الناشر

عبد الحي أحمد فؤاد

صدر أيضاً للناشر

- الإحصاء الوصفي والتحليلي
- الرياضيات I (تفاضل - حساب مثلثات - جبر)
- الرياضيات II الميكانيكا (إستاتيكا - ديناميكا)
- الإحصاء والإحتمالات في التطبيقات الهندسية
- اتجاهات حديثة في تدريس الرياضيات
- المعادلات التفاضلية
- أساسيات الرياضيات
- حساب التفاضل والتكامل
- طرق تدريس الرياضيات
- أ. أحمد السيد عامر
- أ. أحمد السيد عامر
- أ. أحمد السيد عامر
- د. أمجد إبراهيم شحادة
- د. حسن علي سلامة
- د. أمجد إبراهيم شحادة
- أ. حسين رجب محمد
- أ. حسين رجب محمد
- د. حسن علي سلامة

دار الفجر للنشر والتوزيع

4 شارع هاشم الأشقر - النزهة الجديدة

القاهرة - مصر

تليفون : 6242520 - 6246252 (00202)

فاكس : 6246265 (00202)

E-mail : daralfajr@yahoo.com

I.S.B.N

977-358-124-1